

用最简单的方法解最难的题

(八年级)



重点

主编 / 马士荣

初中数学

重难点全解

五点一测



难点

考试
易错点



能力
提高点



好题荟萃 精雕细琢

思想方法
拓展点



适用对象:

提高班、实验班、尖子班的学生



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS



重点

主编 / 马士荣



难点

考试
易错点



初中数学 重难点全解 五点一测

(八年级)

能力
提高点



思想方法
拓展点



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

· 上海 ·

图书在版编目(CIP)数据

初中数学重难点全解:五点一测. 八年级/马士荣主编.
—上海:华东理工大学出版社,2015.4

ISBN 978-7-5628-4188-3

I. ①数… II. ①马 III. ①中学数学课—初中—教
学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 052556 号

初中数学重难点全解:五点一测(八年级)

主 编 / 马士荣

策划编辑 / 陈月姣

责任编辑 / 陈月姣

责任校对 / 成 俊

封面设计 / 戚亮轩

出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司

地 址:上海市梅陇路 130 号,200237

电 话:(021)64250306(营销部)

(021)64252735(编辑室)

传 真:(021)64252707

网 址:press.ecust.edu.cn

印 刷 / 常熟市华顺印刷有限公司

开 本 / 787 mm×1092 mm 1/16

印 张 / 10

字 数 / 253 千字

版 次 / 2015 年 4 月第 1 版

印 次 / 2015 年 4 月第 1 次

书 号 / ISBN 978-7-5628-4188-3

定 价 / 27.80 元

联系我们:电子邮箱 press@ecust.edu.cn

官方微博 e.weibo.com/ecustpress

淘宝官网 <http://shop61951206.taobao.com>

华东理工大学出版社



扫一扫进入手机淘宝网店

前言

数学是研究数量关系和空间形式的科学,学好数学有助于我们用科学的方法思考问题,通过有效的途径解答问题. 同学们,在小学阶段,我们已经接触了数字的加、减、乘、除及乘方运算,进入初中,我们把数的范围、运算进一步拓展,运用适当的形式描述数字、图形等的变化规律.

当你翻开这套丛书时,你会发现,学习原来可以如此轻松、快乐! 其实数学就在我们身边,在每一次活动,每一次游戏中,都蕴含着不少的数学知识.善于发现活动、游戏中的某些数学规律,常常可以带给我们许许多多的快乐!

本套丛书根据国家课程标准的要求,结合 7~9 年级教材的具体内容编写,适应初中生的认知规律和思维特征,并以“章”为单位,从“重点”“难点”“考试易错点”“能力提高点”“思想方法拓展点”五个方面阐述这一章的知识点、各个概念与性质之间的联系规律,精选典型例题,通过例题的剖析、解答及知识拓展,让学生进行适当的数学思考,体会“数形结合”“转化”“分类讨论”及“方程与函数”等数学思想方法,发展合情推理和演绎推理能力,并能清晰地表达自己的想法,掌握分析问题和解决问题的一些基本方法,通过一题多解、一题多变的分析、点拨,体验解决问题的方法的多样性,发展创新意识.

每一分册不限制教材版本,以“专项”的形式概括内容. 每一个年级按照主要知识点都分为 8 章,在精心设计的每一个例题后面都附加一道相关的练习题,便于学生运用例题的思想方法,解答相关的问题,参考例题后面的知识拓展,感悟解题通法及一般规律. 从知识点之间的联系,延伸到知识面,从思维的广度到深度两个不同的层面,获得解决数学问题的成功体验.在讲解与跟踪练习后面,附加一章知识内容的测试题,按照由浅入深、由易到难的层次进行编排,便于学生在学习过程中及时发现知识层面的缺失,通过查漏补缺,完善自己的知识系统.

总之,本套丛书既有方法的讲解,又有习题的演练,是一本融知识技能、思想方法等为一体的学习参考书,希望同学们在本套丛书的陪伴下,像一条自由自在的鱼儿,在知识的海洋里尽情地遨游!

当然,由于作者水平有限,编写时间紧张,书中部分问题的解法或非最佳,同学们在使用的过程中对某一个问题的解法或许有更为独到的感悟,“一枝独放不是春,百花齐放春满园”! 这正是我们所期待的.同时敬请读者对书中出现的疏漏批评指正,使我们的书能不断改进、不断完善,让更多的读者受益.

第一章 三角形	(1)
知识导航	(1)
五点量化分析	(1)
1. 重点	(1)
2. 难点	(3)
3. 考试易错点	(5)
4. 能力提高点	(7)
5. 思想方法拓展点	(8)
本章自测	(9)
第二章 整式的乘除与因式分解	(14)
知识导航	(14)
五点量化分析	(14)
1. 重点	(14)
2. 难点	(16)
3. 考试易错点	(17)
4. 能力提高点	(18)
5. 思想方法拓展点	(20)
本章自测	(21)
第三章 分式与分式方程	(24)
知识导航	(24)
五点量化分析	(24)
1. 重点	(24)
2. 难点	(26)
3. 考试易错点	(28)
4. 能力提高点	(29)
5. 思想方法拓展点	(31)
本章自测	(33)



第四章 二次根式	(37)
知识导航	(37)
五点量化分析	(37)
1. 重点	(37)
2. 难点	(39)
3. 考试易错点	(41)
4. 能力提高点	(43)
5. 思想方法拓展点	(45)
本章自测	(46)
第五章 勾股定理	(50)
知识导航	(50)
五点量化分析	(50)
1. 重点	(50)
2. 难点	(52)
3. 考试易错点	(55)
4. 能力提高点	(57)
5. 思想方法拓展点	(59)
本章自测	(62)
第六章 四边形	(67)
知识导航	(67)
五点量化分析	(67)
1. 重点	(67)
2. 难点	(69)
3. 考试易错点	(71)
4. 能力提高点	(73)
5. 思想方法拓展点	(76)
本章自测	(78)
第七章 正比例与一次函数	(83)
知识导航	(83)
五点量化分析	(83)
1. 重点	(83)
2. 难点	(85)
3. 考试易错点	(88)
4. 能力提高点	(89)
5. 思想方法拓展点	(92)
本章自测	(95)

第八章 数据的分析	(100)
知识导航	(100)
五点量化分析	(100)
1. 重点	(100)
2. 难点	(103)
3. 考试易错点	(106)
4. 能力提高点	(108)
5. 思想方法拓展点	(111)
本章自测	(115)
参考答案与提示	(122)

第一章 三角形

知识导航

ZHI SHI DAO HANG

本章的主要知识点可以概括为理解三角形的有关概念,三角形的角平分线、高线、中线;三角形的三边关系:两边之和大于第三边,两边之差小于第三边;三角形的内角和是 180° ,多边形内角和是 $(n-2) \cdot 180^\circ$,多边形的外角和是 360° 及外角的性质;轴对称图形和轴对称的概念及性质;线段垂直平分线的性质:垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等;等腰三角形的性质和判定;全等三角形的性质:对应边相等,对应角相等;全等三角形的判定方法:SSS、SAS、ASA、AAS、HL. 本章内容是学习四边形、圆等几何知识的基础,也是中考的重点考查内容之一.

五点量化分析

WU DIAN LIANG HUA FEN XI

1. 重点

三角形三边关系的应用,三角形的内角和与三角形外角和定理的应用,线段垂直平分线的性质综合应用,等腰三角形的性质及判定的识别方法;重点是三角形全等和角平分线的性质及其判定方法的灵活应用,最短路径在实际生活中的应用. 线段的垂直平分线的性质和角平分线定理的应用在中考中出现的频率较高. 在用等腰三角形的性质求角的度数、边长、周长时,注意不要漏解.

典型例题

例 1 现有四条线段长分别是 3cm, 4cm, 6cm, 10cm, 以小组为单位讨论, 任取其中的三根组成一个三角形, 那么可以组成三角形的个数是().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【解析】 我们可以采用枚举法, 可以分为 3, 4, 6; 3, 4, 10; 3, 6, 10; 4, 6, 10; 其中第一组 $3+4=7>6$, 所以能组成三角形, 其他三组不满足“任意两边之和大于第三边”的关系; 故选 A.

【说明】 从 4 条线段里任取 3 条线段的组合, 把所有可能的情况写出来, 根据三角形的三边关系判断出能组成三角形的个数, 把不符合三角形三边关系的舍去. 如果题目要求是否能够组成直角三角形, 则还需满足直角三角形的条件.

练习 1 有一组互不全等的三角形, 它们的三边长均为整数, 每一个三角形有两条边的长分别为 5 和 9, 设组中最多有 n 个三角形, 求 n 的值.

例 2 如图 1-1 所示，学校门前有一个池塘，学习了三角形全等后，数学老师想让小强量一下池塘的宽度，小强想了想，很快想到了方法，他在池塘两端取了 M, N 两点，其中在河岸取 O 点是 MQ 与 NP 的中点，则小强如何测量池塘的宽度？你知道吗？

【解析】 由题意知 $OM = OQ, ON = OP, \angle MON = \angle POQ$ ，所以 $\triangle PQO \cong \triangle NMO$ ，所以 $PQ = MN$ ，所以只需测出 PQ 的长度即可。

【说明】 用三角形全等的性质测量池塘的宽度，一般先构造出全等三角形，根据已知条件证明三角形全等，把不容易测量的距离转化为容易测量的三角形的边长，求出池塘的宽度。

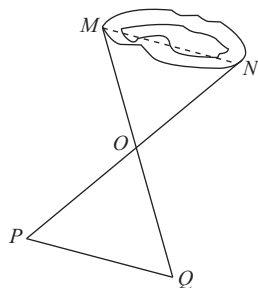


图 1-1

练习 2 如图 1-2 所示，一块直角三角板 ABC ， $\angle ACB = 90^\circ$ 。将直角三角板绕着顶点 B 顺时针旋转 60° 使得点 C 旋转到 AB 边上的一点 D ，点 A 旋转到点 E 的位置，点 F, G 分别是 BD, BE 上的点， $BF = BG$ ，延长 CF 与 DG 交于点 H 。

- (1) 求证： $CF = DG$ ；
- (2) 判断 $\triangle ABE$ 的形状；
- (3) 求出 $\angle FHG$ 的度数。

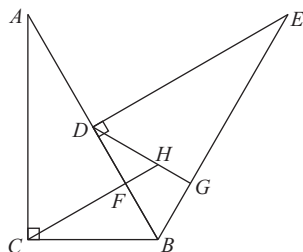


图 1-2

例 3 小华爷爷种了一块三角形的地，边长分别为 $15\text{m}, 25\text{m}, 30\text{m}$ ，爷爷让小华用学过的知识把地分成面积比为 $3:5:6$ 的三部分，分别种不同的花草，小华想了想很快设计出了方案；你知道小华是怎样设计的吗？并说明理由。

【解析】 如图 1-3 所示，本题的实质就是角平分线性质的应用，隐含了三个三角形的高相等，面积比就是三边长之比；设 $AC = 15\text{m}$ ， $AB = 25\text{m}$ ， $BC = 30\text{m}$ ，作 $\angle ACB, \angle BAC$ 的角平分线交于点 P ，连接 BP ，作 $PH \perp AB, PF \perp AC, PE \perp BC$ ，因为点 P 是 $\angle BAC, \angle ACB$

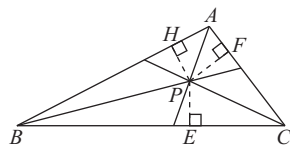


图 1-3

的角平分线的交点，所以 $PH = PF = PE$ ，所以 $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}AB \times PH =$

$12.5PH$ ， $S_{\triangle BPC} = \frac{1}{2}BC \times PE = 15PE$ ， $S_{\triangle APC} = \frac{1}{2}AC \times PF = 7.5PF$ ，所以 $S_{\triangle APC} : S_{\triangle ABP} : S_{\triangle BPC} = 7.5 : 12.5 : 15 = 3 : 5 : 6$ 。

【说明】 用角平分线的性质解决实际问题。已知三角形的三边的长，因为三角形的角平分线的交点到三角形三边的距离相等，三角形的面积之比等于三角形的三边的长度之比，即可确定三角形地的分法。

练习 3 如图 1-4 所示，已知 $\angle AOB = 30^\circ$ ， H, G 是 OA 上两点， E, F 是 OB 上两点，点 P 是 $\angle AOB$ 角平分线上的点，且 $HG = EF$ 。

- (1) 求证： $S_{\triangle HGP} = S_{\triangle EFP}$ 。
- (2) 若 $PH \parallel OB, OH = 2$ ，则 P 到 OA 的距离为_____。

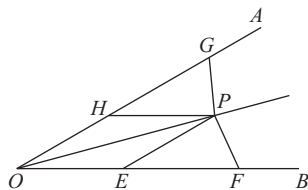


图 1-4



2. 难点

多边形内角和综合应用;凹多边形内角和的求法,常用转化法,把凹多边形转化成凸多边形,再利用多边形内角和求出;三角形三边关系及外角的综合应用;角平分线性质的综合应用题型,等腰三角形性质的综合应用难度比较大.

典型例题

例 1 如图 1-5 所示, $\angle M_1 + \angle M_2 + \angle M_3 + \dots + \angle M_{10} =$ _____.

【解析】 把图形延长为五角星,则五个角的度数是 180° ,剪去一个角后,多了一个角,则内角和为 360° ,剪去 2 个角后,则内角和为 540° ,因此每剪去一个角,内角和便多 180° ,五个角都剪去,则内角和为 $180^\circ + 180^\circ \times 5 = 1080^\circ$.

【说明】 我们常做的是求凸多边形的内角和,那么求凹多边形的内角和,可以把凹多边形转化为凸多边形来求解.本题是剪去五角星的五个角后得到的凹多边形,那么把图形延长为五角星,每剪去一个角图形就多出一个角,角的度数就增加 180° ,即可求出凹多边形的度数.

练习 4 如图 1-6 所示, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F =$ _____.

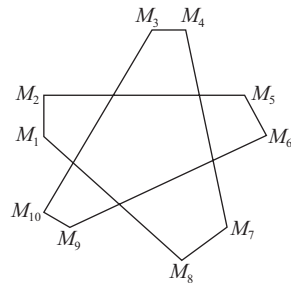


图 1-5

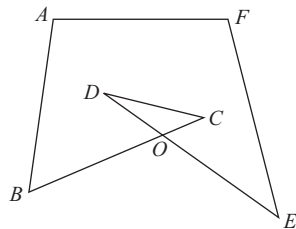


图 1-6

例 2 已知点 P 是边长为 2 的等边 $\triangle ABC$ 内任一点,求证: $3 < PA + PB + PC < 4$.

【解析】 如图 1-7 所示,过点 P 作 $EF \parallel BC$,分别交 AB 于点 E ,交 AC 于点 F ,则 $\angle AEP = \angle ABC = 60^\circ$,因为 $\angle EAP < \angle EAF = 60^\circ$,所以 $\angle APE > 60^\circ$,在 $\triangle AEP$ 中,根据三角形三边关系得 $AE > AP$, $BE + EP > BP$, $PF + FC > PC$;可得: $AB + EF + FC > AP + BP + PC$, $AB + (AF + FC) > AP + BP + PC$,所以 $PB + PA + PC < AB + AC = 4$.

又因为 $PA + PB > AB$, $PB + PC > BC$, $PC + PA > AC$,所以 $2(PA + PB + PC) > AB + BC + AC = 6$,所以 $3 < PA + PB + PC < 4$.

【说明】 本题是求线段长度的和的取值范围,把要求的三边的和转化为等边三角形的三边,过点 P 构造小的等边三角形,把边 AP, BP, CP 三边用转化思想转化在三角形中,根据三角形的三边关系,判断出 $PA + PB + PC$ 的范围.

练习 5 已知:如图 1-8 所示,在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 上任意一点, E 是 AD 上任意一点.

求证: (1) $\angle BEC > \angle BAC$; (2) $AB + AC > BE + EC$.

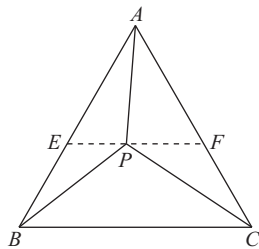


图 1-7

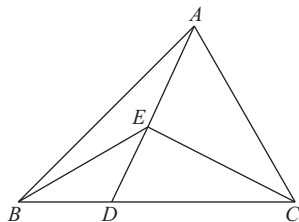


图 1-8

例 3 如图 1-9 所示，是由边长为 1 的小正方形组成的方格图。

(1) 请在方格图中建立平面直角坐标系，使点 A 的坐标为 (3, 3)，点 B 的坐标为 (-1, 0)。

(2) 在 x 轴上找出点 C，使 $\triangle ABC$ 成为以 AB 为腰的等腰三角形，并写出所有满足条件的点 C 的坐标。(不写作法，保留作图痕迹)

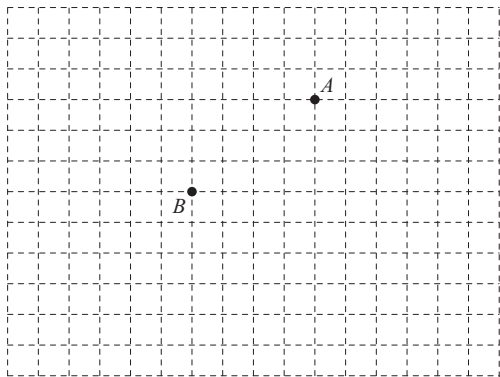


图 1-9

【解析】 (1) 建立坐标系，如图 1-10 所示。

(2) 以 AB 为腰的等腰三角形有 $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$, $\triangle ABC_3$ ，其中点 C 的坐标分别为 $C_1(-6, 0)$, $C_2(4, 0)$, $C_3(7, 0)$ 。

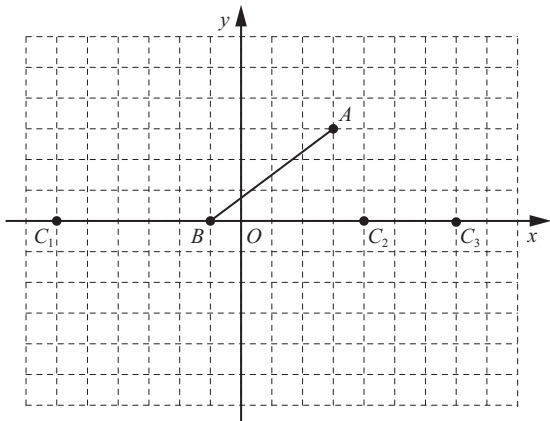


图 1-10

【说明】 观察已知点的坐标，根据点的坐标的特点建立平面直角坐标系；在坐标系中确定以 AB 为腰的三角形是等腰三角形的点的位置，分情况讨论：以 A 为顶点的等腰三角形，以 B 为顶点的三角形，则另一腰与 x 轴的交点坐标就是点 C 的位置。

练习 6 如图 1-11 所示，以 BC 为 x 轴，以 O 为原点建立坐标系，在矩形 ABCD 中， $AB=4$, $BC=12$, O 为 BC 上一点， $BO=2$, M 为线段 OC 上的一点。若点 M 的坐标为 (2, 0)，以 OM 为一边作等腰 $\triangle OMP$ ，使点 P 在矩形 ABCD 的一边上，则符合条件的等腰三角形有几个？请直接写出所有符合条件的点 P 的坐标。

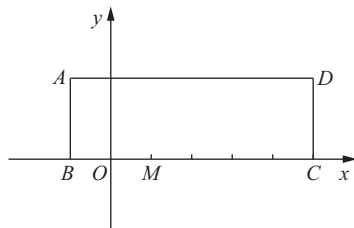


图 1-11

3. 考试易错点

三角形全等共有五种判定方法,要熟练掌握,常把 SAS 型误填为 SSA 型,在做题中结合图形来辨别.利用等腰三角形的性质求角的度数、边长、周长时,因对题目理解不透彻,考虑不全面而漏解,避免错误的方法是正确理解等腰三角形的概念和解题方法,审题要细心,考虑要全面;轴对称中折叠的题目常找不出相等的边和角,容易出错,避免的方法是熟悉折叠的性质和轴对称的性质.

典型例题

例 1 已知一等腰三角形的腰长为 6,底边长为 8,底角为 γ . 满足下列条件的三角形不一定与已知三角形全等的是().

- A. 两条边长分别为 6, 8, 它们的夹角为 γ B. 两个角是 γ , 它们的夹边为 8
C. 三条边长分别是 6, 6, 8 D. 两条边长是 6, 一个角是 γ

【解析】 根据等腰三角形的性质两腰相等,两底角相等,所以已知等腰三角形可用 SAS, ASA, SSS, AAS 来判断三角形全等,方法是通过画图来说明;选项 A 是 SAS;选项 B 是 ASA;选项 C 是 SSS;选项 D 有可能是 SSA;所以有可能不全等的是选项 D.

【说明】 等腰三角形的两腰相等,两底角相等,可求出三角形的第三边的长,三角形的两底角是已知,根据三角形全等的四种判定方法:SSS, SAS, ASA, AAS, 正确地做出判断.

练习 7 如图 1-12 所示,点 P 是 AB 上的任意一点, $BC = BD$, 再添上一个条件使 $\triangle APC \cong \triangle APD$, 下列补充条件中,不一定能推出 $\triangle APC \cong \triangle APD$ 的是().

- A. $\angle ABC = \angle ABD$ B. $AC = AD$
C. $\angle ACB = \angle ADB$ D. $PC = PD$

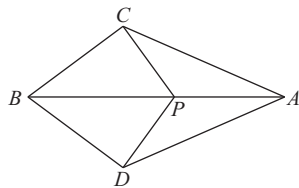


图 1-12

例 2 已知 $\triangle ABC$, $AB = AC$, 过底角向腰作垂线与另一腰的夹角为 50° , 腰长为 8cm. 求出等腰三角形的底角度数.

【解析】 如图 1-13(1)(2)所示.

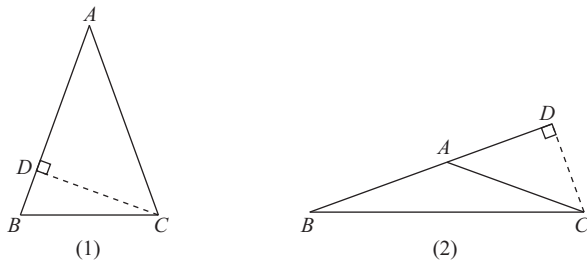


图 1-13

此题容易漏掉一个解,分为两种情况,①三角形为锐角三角形时,腰上的高在三角形的内部,则顶角为 40° ,底角为 70° ;②当三角形是钝角三角形时,腰上的高在三角形的外部,则顶角的邻补

角为 40° ，则顶角为 140° ，底角为 20° 。综合①②，可知底角为 70° 或 20° 。

【说明】 一般求等腰三角形的底角的度数，当题中没有说明三角形是钝角还是锐角时，把等腰三角形分为顶角是钝角和锐角两种情况，底角的度数也有两种情况；分别画出两种图形，由三角形的内角和定理求出角的度数。

练习 8 有下列命题：①等腰三角形高线、中线、角平分线重合即“三线合一”；②等腰三角形一定是锐角三角形；③等腰三角形有一个外角等于 120° ，这个三角形一定是等边三角形；④等腰三角形中有一个角是 40° ，那么它的底角是 70° ；⑤一个三角形中至少有一个角不小于 60° ；⑥顶角相等的两个三角形全等。其中正确的有_____（填相应序号）。

例 3 如图 1-14 所示， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，点 D, E 分别在边 AB, AC 上，且 $AD=DA', AE=EA'$ 且 $DE \parallel BC$ ， $\angle A = \angle A'$ 。若 $\angle A = 70^\circ$ ，(1) $\angle 1 + \angle 2 =$ _____；(2) $\triangle DEA'$ 的形状是什么？

【解析】 (1) 由已知可得 $\angle A' = \angle A = 70^\circ$ ，根据四边形内角和可知

$\angle ADA' + \angle AEA' = 360^\circ - \angle A - \angle A' = 360^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 220^\circ$ ，因为 $DE \parallel BC$ ，

所以 $\angle 1 = \angle EDA'$ ， $\angle 2 = \angle DEA'$ ，

又因为 $\angle ADE = \angle EDA'$ ， $\angle AED = \angle DEA'$ ，

所以 $\angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(\angle ADA' + \angle AEA') = 220^\circ \times \frac{1}{2} = 110^\circ$ ；

(2) 因为 $DE \parallel BC$ ， $AB=AC$ ，所以 $\angle B = \angle C$ ，

所以 $\angle EDA' = \angle DEA'$ ，因为 $\angle A = 70^\circ$ ，所以 $\angle EDA' = \angle DEA' = (180^\circ - 70^\circ) \div 2 = 55^\circ$ ，所以 $\triangle DEA'$ 是等腰三角形。

【说明】 求两个角的度数和，先根据四边形的内角和是 360° 和三角形折叠不变的性质，求出角的度数；判断三角形的形状，一般三角形是等腰三角形或等边三角形，根据两边相等的三角形是等腰三角形可判断。

练习 9 如图 1-15 所示。

(1) 在数学活动课上，数学老师画了一个长方形 $ABCD$ ，要求同学们动手折叠并回答问题，第 1 步把长方形沿对角线 BD 向上折叠；第 2 步在图中用实线画出折叠后得到的图形（要求尺规作图，保留作图痕迹，不写作图方法）；

(2) 折叠后重合部分是什么图形？说明理由。

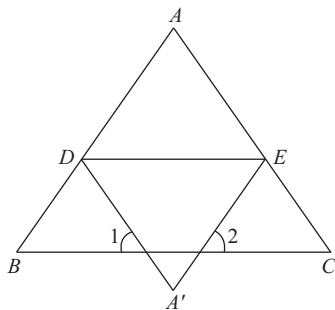


图 1-14

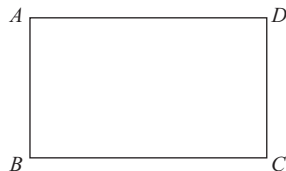


图 1-15



4. 能力提高点

学习本章后,要学会用三角形的运动,折叠,旋转来解决问题;等腰三角形的性质和判定的综合应用及线段的垂直平分线的性质是本章难点,要提高综合应用知识的能力;三角形外角和定理,内角的角平分线综合起来考查,难度比较大,也是中考的热点题目,要熟练掌握.

典型例题

例 1 如图 1-16 所示,已知点 D 为等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 内的一点, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle CAD = \angle CBD = 15^\circ$, E 为 AD 延长线上的一点,且 $CE = CA$. 求证: DE 平分 $\angle BDC$.

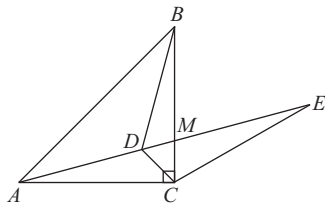


图 1-16

【解析】 在等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 因为 $\angle CAD = \angle CBD = 15^\circ$.

所以 $\angle BAD = \angle ABD = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$, 所以 $BD = AD$, 所以 $\triangle BDC \cong \triangle ADC$ 所以 $\angle DCA = \angle DCB = 45^\circ$.

由 $\angle BDE = \angle ABD + \angle BAD = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$, $\angle EDC = \angle DAC + \angle DCA = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ$,

所以 $\angle BDE = \angle EDC$, 所以 DE 平分 $\angle BDC$.

【说明】 此题是等腰三角形和等边三角形的性质和判定混合应用;解答这种类型的题目常运用等腰三角形的“三线合一”, 求出角相等.

练习 10 如图 1-17 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $AF \perp BC$, 点 D 在 BA 的延长线上, 点 E 在 AC 上, 且 $AD = AE$. 求证: $ED \parallel AF$.

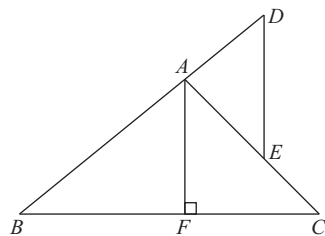


图 1-17

例 2 如图 1-18 所示, $\triangle DAC$, $\triangle EBC$ 是等边三角形, AE , BD 分别与 CD , CE 交于点 M , N . 求证: (1) $CM = CN$; (2) 试判断 $\triangle CMN$ 的形状.

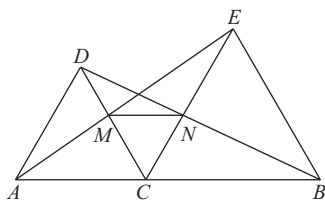


图 1-18

【解析】 (1) 由等边三角形的性质可以证明 $\triangle ACE \cong \triangle BCD$, 从而证明 $AE = BD$,

$\angle CDN = \angle CAM$, 又因为 $AC = DC$, $\angle DCN = \angle ACM = 60^\circ$, 所以 $\triangle CDN \cong \triangle CAM$, 所以 $CM = CN$.

(2) $\triangle CMN$ 是等边三角形. 因为 $\angle MCN = 60^\circ$, $CM = CN$, 所以 $\triangle CMN$ 是等边三角形.

【说明】 由等边三角形的性质可证明三角形全等, 根据三角形全等的性质求出边相等; 判断三角形的形状, 已证明两边相等, 再证明一个角是 60° , 则可判断出三角形的形状.

练习 11 如图 1-19 所示, $\triangle ABC$ 是等边三角形, 点 D 是 AC 的中点, 延长 BC 到 E , 使 $BD = DE$, $DM \perp BE$. 求证: (1) $CD = CE$; (2) $BM = EM$.

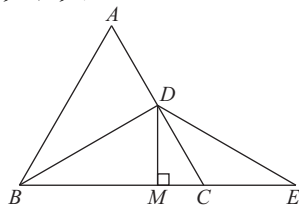


图 1-19

例 3 如图 1-20 所示， $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC, \angle ACB$ 的角平分线交于点 O 。你能找出 $\angle A$ 与 $\angle BOC$ 之间的关系吗？并说明理由。

【解析】 利用三角形的内角和定理求出 $\angle ABC + \angle ACB$ 的度数，再根据角平分线的定义和三角形的内角和定理进行求解。

在 $\triangle BOC$ 中， $\angle BOC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$ ，则 $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$ 。

【说明】 利用角平分线和三角形内角和定理相结合，由已知角的度数开始，运用转化思想，把两个角转化在同一个等式中，表示出两个角的关系。

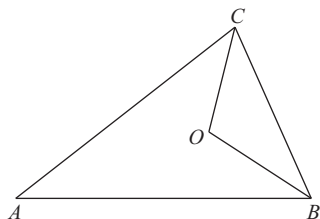


图 1-20

练习 12 如图 1-21 所示，已知 $\angle MON = 120^\circ$ ，点 A ，点 B 分别是 OM, ON 上的动点，若 P 是外角 $\angle ABN$ 的角平分线和 $\angle BAO$ 的角平分线的交点。

(1) 你能求出 $\angle P$ 的度数吗？

(2) 当点 A 和点 B 移动时， $\angle P$ 的度数发生变化吗？说明理由。

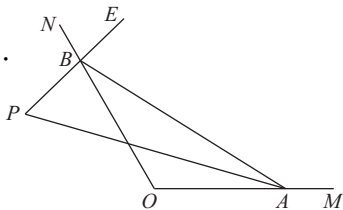


图 1-21

5. 思想方法拓展点

初中数学学过的思想方法有很多种，最基本的数学思想方法是数形结合的思想，分类讨论思想、转化的思想、函数的思想、方程思想等；数学竞赛试题中常常出现与方程有关的问题，求阴影部分的面积，利用直角三角形中 30° 角所对的直角边是斜边的一半，当已知条件能用这个性质时，可以用转化思想把线段的长或角的度数，转化成熟悉的或转化在同一个三角形中求解；分类讨论思想方法，在这一章中用得最多的是等腰三角形中，求角的度数、边长或周长。

典型例题

例 1 如图 1-22 所示，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ, \angle BAC = 60^\circ$ ， AB 的垂直平分线交 AB 于点 D ，交 BC 于点 E ，若 $CE = 6\text{cm}$ ，你能求出 BE 的长吗？

【解析】 连接 AE ，因为 DE 垂直平分 AB ，所以 $AE = BE$ ，因为 $\angle C = 90^\circ, \angle BAC = 60^\circ$ ，所以 $\angle B = 30^\circ$ ，所以 $\angle B = \angle EAB = 30^\circ$ ，所以 $\angle CAE = 30^\circ$ ，所以 $AE = 2CE = 12\text{cm}$ ，因为 $BE = AE$ ，所以 $BE = 12\text{cm}$ 。

【说明】 连接 AE ，构造直角三角形，利用垂直平分线的性质，把 BE 转化为 AE ，结合直角三角形的性质，把要求的线段转化到直角三角形中，问题就得到解决。

练习 13 如图 1-23 所示，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ，若 MN 是经过点 A 的直线， $BD \perp MN$ 于点 D ， $EC \perp MN$ 于点 E ， $AD = CE$ 。求证： $DE = BD + CE$ 。

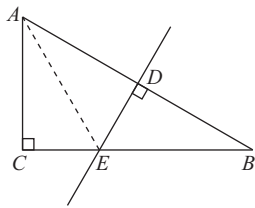


图 1-22

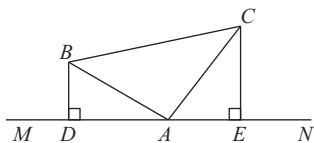


图 1-23

例 2 如图 1-24 所示, $\triangle ABC$ 是等腰三角形, $AB=AC$, 分别向 $\triangle ABC$ 外作等边 $\triangle ADB$ 和等边 $\triangle ACE$, 若 $\angle DAE = \angle DBC$, 你能求出 $\triangle ABC$ 中三个角的度数吗?

【解析】 先用 $\angle DAE = \angle DBC$, 求出 $\angle BAC$ 与 $\angle ABC$ 之间的关系, 再利用内角和定理, 求出它们的大小; 利用方程思想, 设 $\angle BAC$ 的度数, 用三角形内角和求出 $\angle BAC$.

因为 $\angle DAE = \angle DBC = 60^\circ + \angle BAC + 60^\circ = 60^\circ + \angle ABC$,

所以 $120^\circ + \angle BAC = 60^\circ + \angle ABC$, 所以 $\angle ABC = 60^\circ + \angle BAC$,

因为 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 所以 $\angle ABC = \angle ACB = 60^\circ + \angle BAC$;

设 $\angle BAC = x$, 则 $x + 2(x + 60^\circ) = 180^\circ$,

解得 $x = 20^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 三个角的度数是 $20^\circ, 80^\circ, 80^\circ$.

【说明】 求三角形各内角的度数, 根据已知条件, 找出合适的角设为 x , 用 x 把其他的角表示出来, 用三角形的内角和定理是 180° 及等边三角形的性质, 列出关于 x 的方程, 求出 x 的值, 再求出其他角的度数, 在求角的度数时, 常用方程思想来解答.

练习 14 如图 1-25 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=BC$, $\angle BDE = \angle BED$, $\angle ABD = 60^\circ$, 求 $\angle EDC$ 的度数.

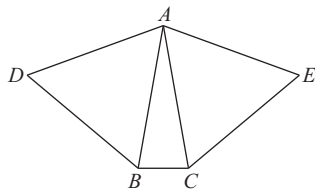


图 1-24

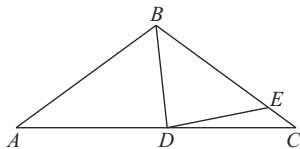
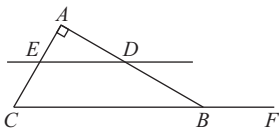


图 1-25

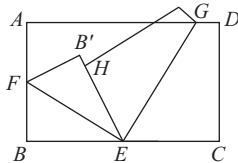
本章自测 (100分)

一、填空题(每题 2 分, 共 28 分)

1. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB=5\text{cm}$, $BC=8\text{cm}$, 第三边 AC 的取值范围是 _____.
2. 已知, 一个长方形桌面, 若锯去一个角, 则桌面变成了 _____ 边形, 内角和是 _____.
3. 如图所示, 有一 $\text{Rt}\triangle ABC$, $\angle ABF$ 是 $\triangle ABC$ 的外角, 直线 DE 平行于 BC , 若 $\angle ABF = 150^\circ$, 则 $\angle AED =$ _____.
4. 已知等腰三角形的两条边长为 a, b 且满足 $|a-2| + (a+2b-8)^2 = 0$, 则等腰三角形的腰长是 _____.



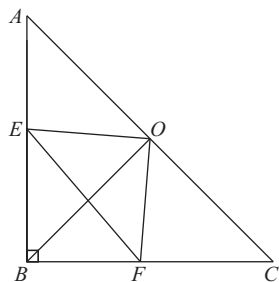
第 3 题图



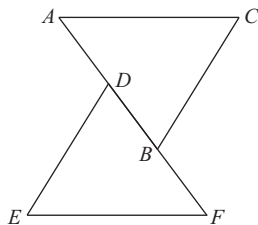
第 5 题图

5. 将一张长方形纸片 $ABCD$ 按如图所示的方式折叠, EF, EG 为折痕, 则 $\angle FEG$ 的度数 _____.
6. 如图所示, 在等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, E 在 AB 上, F 在 BC 上, O 为 AC 的中点,

$\angle EOF = 90^\circ$, 已知 $AE = 6$, $CF = 8$, 则 $S_{\triangle EOF} =$ _____.

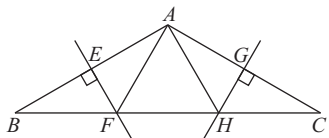


第 6 题图

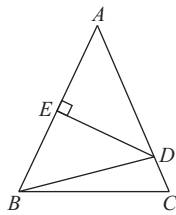


第 7 题图

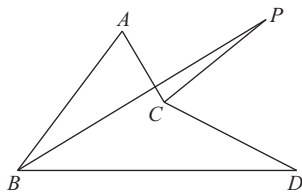
- 如图所示, 已知 A, D, B, F 在一条直线上, $AC \parallel EF$, $AC = EF$, 要想使 $\triangle ACB \cong \triangle FED$ 还需要添加的条件是 _____ (不添加辅助线).
- 小强买了一个遥控机器人, 小强遥控它每前进 4m 就向左转 36° , 它最终回到原地, 它至少走了 _____ m; 它走过的路程围成的多边形的内角和是 _____.
- 如图所示, $\triangle ABC$ 中, EF 和 GH 分别是 AB 和 AC 的垂直平分线, 若 $\angle BAC = 120^\circ$, 则 $\angle FAH =$ _____.
- 如图所示, 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 12\text{cm}$, E 为 AB 的中点, $DE \perp AB$ 于点 E , 交 AC 于点 D , 若 $\triangle BCD$ 的周长是 24cm, 则底边 $BC =$ _____.



第 9 题图



第 10 题图



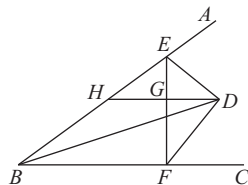
第 11 题图

- 如图所示, $\angle ABD$, $\angle ACD$ 的角平分线交于点 P , 若 $\angle A = 50^\circ$, $\angle D = 10^\circ$, 则 $\angle P$ 的度数是 _____.
- 已知三角形的一个外角等于 120° , 另两个外角的比为 $1:2$, 则这个三角形的形状是 _____.
- 已知 $\triangle ABC$ 在平面直角坐标系中, 点 A 的坐标为 $(0, 1)$, 点 B 的坐标为 $(3, 1)$, 点 C 的坐标为 $(4, 3)$, 如果要使 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABC$ 全等, 那么点 D 的坐标是 _____.

二、选择题(每题 3 分, 共 18 分)

- 如图所示, $\triangle BEF$ 的内角 $\angle EBF$ 的角平分线 BD 与外角 $\angle AEF$ 的角平分线交于点 D , 过点 D 作 $DH \parallel BC$ 分别交 EF , EB 于 G , H 两点. 下列结论: ① $S_{\triangle EBD} : S_{\triangle FBD} = BE : BF$; ② $\angle EFD = \angle HDF$; ③ $HD = BH$; ④ $BH - GF = HG$. 其中结论正确的是 ().

- A. 只有①②③ B. 只有①②④
C. 只有③④ D. ①②③④



第 14 题图

- 如图所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AD 平分 $\angle CAB$, $BC = 18\text{cm}$, 点 D 到直线 AB 的距离是 8cm, 则 $BD =$ ().