

345

# 灰色系统

■ 理论与方法 ■

华中工学院自控计算机系

邓聚龙

中国科学院石家庄农业现代化研究所

一九八四三

## 一、灰色系统当前的研究内容及概况

客观世界是物质的世界，也是信息的世界。即有大片已知信息，也有不少的未知信息，非确知信息，未知的或非确知的信息，我们称为黑色的。已知信息称为白色的。系统中既皆有已知信息又皆有未知的非确知的信息，称为灰色的系统。

灰色系统的主要研究内容是：

- 灰色系统的建模思想、理论和方法。如分析某县历年末对农业的贷款与农业产值的关系如何建模。

- 灰色因素的关联分析，灰色关联序理论。比如影响粮食的因素有“化肥”“劳力”“气象”“水利”“种子”“土壤”……；究明这些因素与粮食产量有何种定序关系，那些因素关系密切，那些不密切。

- 灰色预测理论和方法。比如粮食如何预测；农产品市场如何预测。

- 灰色决策理论和方法。最后作决定都是决策。比如灰色系统的班次不力是不决策问题，农业布局如何安排，耕作制度如何确定，人员如何分配都是决策问题。

- 灰色系统分析。分析某个县农业、水利生态的发展态势，分析农业贷款的效益作用、农业贷款的发展变化态势与农业发展的态势的关系等。

- 灰色系统控制。在系统分析的基础上提出决策然后作决策

付诸实现即为控制，比如一对夫妇只生一胎这就是控制。

· 灰色系统优化，生产经济系统为了保证某种发尸速度，而生产投资的比例该多大，那些可书要调查，这是系统参数的优化。比如过去强调价格严格稳定，其实有时从发尸未看允许在某个范围内适当的波动反而更好，这是系统的动态、结构的优化。

灰色系统是普遍存在的，因此灰色系统的研究对象包括“农业系统”、“管理系统”、“生态系统”、“经济系统”、“工程技术系统”、“教育系统”、“生态系统”、“能源系统”、“气象系统”、（河南省气象学校等）。

灰色系统的描述，目前主要是用。

- 灰色参数、灰色数，灰色元素（简称灰元），並记为 $\otimes$ 。
- 灰色方程，包括微分，差分方程、代数方程。
- 灰色矩阵。
- 灰色群。

灰色参数不难在客观世界中找到实际原型，比如一颗生长在地上的大树的重量，一个人的准确年龄；一个系统的予测值……等都是灰色参数。

· 常见的灰色参数有下述类型。

- 下界的， $\otimes \in [c, \infty)$  比如生长在地上的树的重量。
- 上界的， $\otimes \in (-\infty, \bar{c}]$  财政方面的控制数字。
- 闭区间的， $\otimes \in [c, \bar{c}]$  人的脉搏在65~80次/分

- 开区间的  $\otimes \in (\underline{c}, \bar{c})$  某人的经济开支
- 高散的  $\otimes \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm N, \dots\}$  一般概念下的人的年龄

皆有关系故的方程，即灰方程：皆有灰元素的矩阵称灰矩阵。

无论是灰元、灰方程、灰矩阵，从自化的角度来看，都不是一个元，一个方程，一个矩阵，而是有限个或无限个元的总称（符号、集合）。

比如，  $\otimes x + 1 = 0 \quad \otimes \in \{1, 2\}, x \in \{-1, -0.5\}$   
 $\otimes \in (1, 2), x \in [-1, -0.5]$

研究灰色系统的关键是灰元如何处理，灰系统如何白化、淡化、劣化、模型化、优化。

灰元的处理一般有下述途径：

- i. 通过几个特殊的白矩阵（称为取样标子）对灰阵作用后，使灰矩阵变白，这称为“白元提取”。一般用在灰色控制中。
- ii. 通过控制措施（即控制矩阵），对灰系统作用后，使灰反忠通过对堵塞。一般用在控制决策的实施中。
- iii. 对有界的灰元起作用的系统，将灰元构造为变化域上的函数，观测灰元在域内变动时，系统性质、动态及静态特征有何改变、系统响应有何规律，这实际上是研究“灰元移动”到“系统响应”的映射。一般用在系统的趋势分析中。
- iv. 有界灰元，以其上界或下界作为他的估值，这称为灰元的自化值，然后按灰元自化值进行计算分析。一般用在优

规划、区划中。

V、有界或无界灰元，根据某种准则、规则、概念作定量化，这称为灰元的白色量化，亦称白化。

VI、将白元与灰元关生的方程、矩阵作“混染”的计标。一般用在系统分析中。

VII、将时间的数据列，或两个因素的相关序列，在因果平面、或时间—数据平面上作图（作出变化曲线）然后将曲线垂直地，或水平地，或按某种规则分为元块（元尔平面、元尔区段），这称为灰色的数据区划法。这一般用在决策分析、预测等方面。

VIII、有界灰元，按区间进行计标，即可区间数等来处理灰数。

IX、当灰元当作一个不予分割的全体进行处理，称灰元在体化。

X、将灰元在定义域内的值，一个尔地抽取进行处理，称灰元多点处理。

但是除了如何处理灰元外，有时更重要的是将一个不明确、不透明的全体因素不足的灰系统如何从结构上、模型上、关系上，使灰由灰变白，比如，一般的经济系统就是结构上、模型上、关系上，不透明的系统。意见、观点，要求如何概念化，概念化后如何规范化、模型化，语言形式的模型如何量化，量化后如何优化，比如，影响系统的因素不明确如何明确，明确后如何判断各因素间的

相关程度，根据相关程度如何判断其影响的程度、大小范围，系统的发展由一无所知，到知之较少，由知之较少到认识其变化规律，从变化规律中获得预测依据，通过预测再进行决策……等都体现了灰色系统灰度逐渐减少、白度逐渐增加的思想，总我们称为系统淡化或白化。

灰色系统理论自从1982年提出以来，一年多时间内在理论上和应用上都有明显的进步，一年多来我们接到来自全国各地的几百封信件，比如一个在瑞典的中国博士生说他研究生生态环境可是西方几乎没有一种方式能够对生态这种百有大劳地信息系统作量化，至于建模更是无从谈起，前天接日本医科齿科大学教授若松秀俊来信对灰色系统给予了极热情的赞扬，对工作给予了很高的评价，认为是与现有的控制理论系统理论平行发展但又更广泛的新理论，至于不过外国的评价与希望事实上是对我们的鞭策和压力，因为目前作的工作，毕竟有限，概括起来还只限于，“建模”“规划”与“控制”方面在这里我还希望通过大家一起来发展和完善，比如在主要技术思想上有。

- 白色信息充分利用的思想，
- 五步建模思想
- 灰色优化思想、
- 灰色系统分析思想
- 灰色系统/控制思想
- 残差信息概念。

在主要的方法有：

- 建模方面的“微分拟合”方法，
- 削弱随机性的灰色模拟法，
- 确定预测区域的灰色平面法，
- 提高预测精度的残差辨识法，
- 确定关联序的关联分析法，
- 获得代价尽可能小、效果尽可能大的灰色 Lagrang 乘子法，
- 对复杂因素、大量分散信息进行统计的灰色统计法，
- 对多元因素，在众多的指标下进行外类的灰色聚类法，
- 对灰色的规划问题求解的灰色物流、灰色区划等方法。

将现在已有的成果和可能获得的成果，将现有的内容和将要进一步研究的内容，概括到一起，有：

<1>、社会经济系统宏观时间上的五步建模、即语言模型 → 网络模型 → 劣化模型 → 动态模型 → 优化模型。

<2>、模型类型方面有：

- 单序列的 1 阶到  $n$  阶线性动态模型，
- 多序列的 1 阶到  $n$  阶线性动态模型，
- 非线性动态静态模型。

(这些主要用在社会、经济系统的建模方面)

<3> 模型结构方面有,

- 白色子块与灰色大块的耦合,
- 大系统的等效窗口,
- 灰色大系统逐步白化的白色嵌入,

<4> 建模方法有,

- 微分拟合法,
- 灰色模块求解法,

<5> 关联分析方面有,

- 关联度、关联极性、关联序,
- 计划经济与市场经济的关联模型,

<6> 灰色预测方面有,

- 灰色模块,
- 灰色平函,
- 数据残差辨识,
- 多段函数残差辨识,
- 单段函数残差辨识,
- 灰色 Markov 模型,

<7> 在规划方面有,

- 灰色物流,
- 灰色非线性规划,
- 灰色动态规划,



- 灰色区划；
- 灰色动态区划。

<8>、在决策方面有、

- 局势决策、
- 层次决策。

<9>、非典型系统助动态分析方面有、

- 信息补充的特征多项式计算法。

上述内容，有的已在实践中得到某种程度的利用，并已步取得了成效，比如：

- 棉花害虫生物防治（陕西农科院李宝林）。
- 机床控制系统分析（华中工学院陈绵云）。
- 新型液压系统的创造（华中工学院李从心）。
- 粮食长期预测（华中工学院邓家龙等）。
- 河南人民胜利渠的灌溉决策（河南邓琦、冯诗坚、华中工学院邓家龙）。
- 气象预报及形势分析（河南气象学校冯亮平等）。
- 区划方面（湖南双峯）。
- 农业经济预测方面（沈阳农学院罗庆成）。

在基本理论方面的工作则为故更多不便一一列举。

因为，一个农业系统/社会经济系统，工程技术系统，往往有信息流，物流，资金流，能源流，人流的复合系统，其中信息流是流的“灵魂”，资金流往往是其他流如

物流、能流、流的总的表达形式，在下面的讨论中主要涉及量流，仅质流为主。

用灰色系统研究社会经济系统的意义，在于：

将抽象的问题比如经济问题、规划问题、事物问题、转变问题……实体化、量化，将变化规律不明显的事物找出规律，找出规律分析事物的发展变化；分析事物的可控性、可测性、可评性，通过分析说明那些系统那些因素是可控的，哪些是不可控的，哪些事物、现象是将要发生的，哪些是将要消失的，哪些是需要扶持的，哪些是需要制止的，在治的，通过分析揭示系统发展过程的优劣、劣势、潜力、危机，通过揭示作出正确决策以防患于未然，以扬长而避短，以受潜力为实力、变不利为有利、变大害为小害为无害、变停滞为发展，总之是确定事实、找出核心、分析问题、提供对策，以促进系统迅速地、健康地、满意地、高效益地发展。

## 二、五步建模的思想与方法。

研究社会、经济系统最大的障碍是模型的建立。

工程技术系统，建模问题不如社会经济系统那样突出，因为工程技术系统是客观实体，有物理原型，具有可实验室，而社会经济系统，要弄清其有关的因素就不容易，至于量化则更困难。我们提供的五步建模，就是得到了各种因素

前、前因与后果间，作用与响应的关系后，通过定性到定量，由粗到细，由次到首的建模过程。

### 1. 语言模型 (第一步思想开发)

研究系统首先要明确目的、目标、要求条件，而这些问题的明确首先要思想开发，然后将思想开发后的结果，用准确精练的语言进行描述，这就是语言模型。

毛主席著作中有许多精辟的见解，比如“鼓足干劲，力争上游，多、快、好、省地建设社会主义”；邓小平同志实现四化建设社会主义、开创经济建设新局面的许多精辟论述，都承借的语言模型。社会主义中许多结论性的论述语言模型。

### 2. 网络模型 (第三步明关系)

在语言模型的基础上，进行因素分析，作前因与后果的辨识，作关系的规纳分解，然后将构成“前因”与“后果”的一对或几对，多个前因或多个后果，作为一个整体(环节)，并用方框表示，就得到一个单元网络，或称一个环节的框图见图 1。

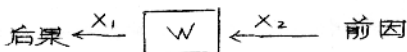


图 1

图 1 中，前因亦称该环节的输入，用  $X_2$  表示，后果亦称该环节的输出，用  $X_1$  表示。

但是系统或要素(变量)是相互关联的,作为后果的因素,可能同时又是下一个环节的前因,作为前因的因素,也可能是上一个环节的后果。有时这些相互穿插,交替影响,为此种可能得到图 2 所示的多环节框图,我们就称它为网络系。

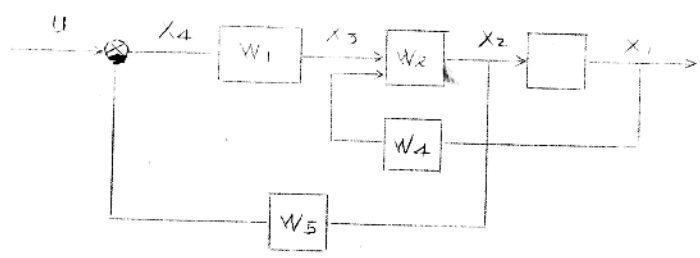


图 2

### 3. 劣化模型 (若三步建立初步的因果关系)

得到网络模型后,搜集前因与后果间的数量关系。比如  $X_1$  与  $X_2$  之间如果有比例系数  $k$ ,则在图 1 的方框内填上  $k$ ,这就是劣化模型。

$$X_1 = k X_2$$

### 4. 动态模型 (若四步研究前因后果间的动态关系)

上述劣化模型,只能说明前因后果间的简单劣化关系,它不能说明,“前因”作用在环节上以后,“后果”如何发生变化。“前因”如果随时间而变化,“后果”又如何变,是增长还是衰减,是变得快还是变得慢。显然这些问题的回

若的依赖  $X_1$  与  $X_2$  的时间数据序列。通过输入输出的时间数据序列可以建立它们之间的发后变化关系，这称为动态模型。

### 5、优化模型（若五步模型的改进）

前述动态模型的动态品质如果不令人满意，则采取适当措施、改变系数参数、结构、或加入新的环节。作这种优化处理后的模型，称为优化模型。

## 三、一个五步建模的例子

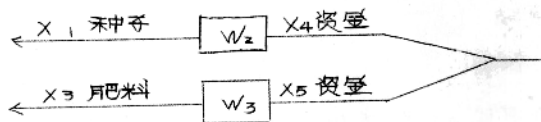
### 《语言模型》

以适当的初投资，发后大麻的旱地种植，并用适当比例的大麻收益作为再生产的投资，以促进大麻生产经济系统的不断发展，经济不断增长。

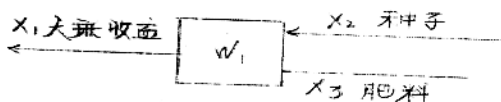
### 《网络模型》

经分析知上述语言模型中各有四因素：大麻收益  $X_1$ ，大麻旱地种子  $X_2$ ，肥料（钾肥） $X_3$ ，资金  $X_4$  或  $X_5$ 。

用资金买种子与肥料资金是前因、种子与肥料是后来得益的方框：



有了种子与肥料，可生产大麻得到效益。种子与肥料是前因，大麻收益是后果，得益4。



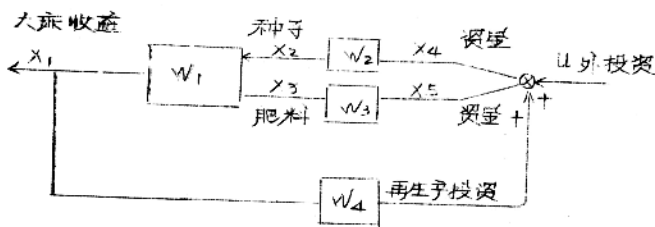
益4.

用适当比例的大麻收益作为再生产投资。大麻收益是前因，再生产投资是后果，得益5。



益5

再以上述为基础，求得系统、网络模型益6。



益6

《易化模型》。

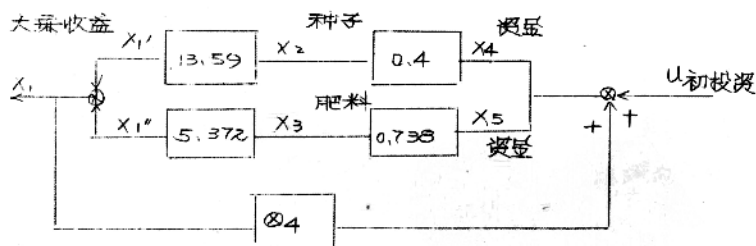
建立易化模型，需要了解各环节间的因果关系，比如

种子单价是 0.4 元, 则  $W_2 = 0.4$ , 肥料单价是 0.738 元, 则  $W_3 = 0.738$ 。单位种子的大麻收益为 13.59 元, 单位肥料的大麻收益为 5.272 元, 便有:

$$\frac{X_1}{X_2} = W_{12} = 13.59$$

$$\frac{X_1}{X_3} = W_{13} = 5.272$$

再生产投资的比例, 一时还不能定, 则以为  $W_4$  是变的, 即  $W_4 = \otimes_4$ , 为此得劣化模型见 7。



再生产投资比例

图 7

《动态模型》

建立动态模型, 需要各变量的时间数据序列, 如果有下述数据序列,

	1	2	3	4	5
种子 $X_2^{(0)}(i)$	2.874	3.27	3.3	3.4	3.7
$\Sigma X_2^{(0)}(i)$		6.152	9.450	12.079	15.353
种子 $X_4^{(0)}(i)$	7	7.6	8	8.5	9.8
投资 $\Sigma X_4^{(0)}(i)$		14.685	22.75	31.29	40

肥料 $X_3^{(0)}(i)$	1.63	1.76	1.76	1.75	1.89
$\Sigma X_3^{(0)}(i)$		3.39	5.15	6.3	8.79
肥料 $X_5^{(0)}(i)$	1.76	1.85	1.89	1.93	1.94
投资 $\Sigma X_5^{(0)}(i)$		3.61	5.41	7.37	9.18

大麻收益 $X_1^{(0)}(i)$	34.3	38.8	42.4	47.3	48.1
$\Sigma X_1^{(0)}(i)$		73.1	115.5	162.8	210.9

1°. 对种子与投资的时间序列建模.

将种子原始数据列  $\{X_2^{(0)}(i)\} \quad i=1, 2, 3, \dots, N$  与  
 其相应的投资数据列  $\{X_4^{(0)}(i)\} \quad i=1, 2, \dots, N$  作灰色  
 模型的相关度分析, 发现相关度 (或关联度) 不大, 但是  
 是  $\{X_2^{(0)}(i)\}$  的叠加数据列  $\{X_2^{(0)}(i)\}$  具有逆增的特



点，为此对种子与投资时间数据列作一阶二变量的微分模型，也就是按灰色系统的DM(1,2)模型建模。

先作数据累加，然后建立下述微分模型。

$$\frac{dx_2^{(1)}}{dt} + ax_2^{(1)} = bx_4^{(1)}$$

$x_2^{(1)}$ 与 $x_4^{(1)}$ 分别为种子与投资的累始数据 $x_2^{(0)}$ 及 $x_4^{(0)}$ 的累加，而 $a$ 与 $b$ 呢？按下式求。

$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = [X(2,4)^T X(2,4)]^{-1} X(2,4)^T Y_N$  这里 $X(2,4)$ 为累加数据阵， $Y_N$ 为原始数据序列。

构造数据阵 $X(2,4)$

$$X(2,4) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^2 x_2^{(0)}(i) + \sum_{i=1}^1 x_2^{(0)}(i) \right), & \sum_{i=1}^2 x_4^{(0)}(i) \\ -\frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 x_2^{(0)}(i) + \sum_{i=1}^2 x_2^{(0)}(i) \right), & \sum_{i=1}^3 x_4^{(0)}(i) \\ -\frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^4 x_2^{(0)}(i) + \sum_{i=1}^3 x_2^{(0)}(i) \right), & \sum_{i=1}^4 x_4^{(0)}(i) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4.513 & 14.685 \\ -7.52 & 22.75 \\ -11.134 & 31.29 \end{bmatrix}$$

构造 $Y_4$