



全国高等院校土建类专业实用型规划教材

结构力学

JIEGOU LIXUE

张系斌 主编



中国电力出版社
www.cepp.com.cn

全国高等院校土建类专业实用型规划教材

结构力学

主 编 张系斌
副主编 李广军 李冠鹏
参 编 张 露 张 波 孟 玮



中国电力出版社

www.cepp.com.cn

本书依据教育部非力学专业教学指导委员会结构力学和弹性力学课程指导小组制定的“结构力学课程教学基本要求”的内容进行编写,适应于多学时结构力学课程的需要。本书内容主要包括绪论、几何组成分析、静定结构的内力计算、虚功原理和结构的位移计算、力法、位移法、力矩分配法、结构在移动荷载作用下的计算、矩阵位移法、结构的动力分析、结构的稳定分析、结构的极限荷载分析。全书注意与已修课程的平滑过渡;注重贯穿课程中的分析方法和基本理论及其在各种结构中的应用,主线清晰;深化基本概念;注意启发式编写,为学生独立思考留了适当的空间。

本书可作为普通高等院校土木工程专业的本科生教材,也可供交通、水利、机械等相关专业的师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构力学/张系斌主编. —北京:中国电力出版社,2010.2

全国高等院校土建类专业实用型规划教材

ISBN 978-7-5083-9669-9

I. ①结… II. ①张… III. ①结构力学—高等学校—教材 IV. ①O342

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第208933号

中国电力出版社出版发行

北京三里河路6号 100044 <http://www.cepp.com.cn>

责任编辑:未翠霞 关童 电话:010-6341 2611

责任印制:郭华清 责任校对:常燕昆

印刷厂印刷·各地新华书店经售

2011年1月第1版·第1次印刷

印数:0001~3000册

787mm×1092mm 1/16·20.25印张·494千字

定价:39.80元

敬告读者

本书封面贴有防伪标签,加热后中心图案消失

本书如有印装质量问题,我社发行部负责退换

版权专有 翻印必究

本社购书热线电话(010-88386685)

前 言

《结构力学》是土木工程、水利工程等专业的一门专业基础课。在《理论力学》和《材料力学》等课程的基础上,通过本课程的学习,掌握较简单的平面杆件结构内力和位移的计算原理和方法,了解常用结构的受力性能,为学习工程结构方面专业课提供必需的力学基本知识,培养学生的分析和计算能力。

本教材是全国高等院校土建类专业实用型规划教材,依据教育部非力学专业教学指导委员会结构力学和弹性力学课程指导小组制定的“结构力学课程教学基本要求”的内容进行编写,适应于实用型多学时结构力学课程的需要,在保证教育部颁布的基本要求前提下,突出了实用型人才的培养需要。

根据对 21 世纪人才进行素质教育和创新意识培养的要求,适当降低了对结构力学深度和难度的要求,更加注重于基本理论、基本方法和基本计算的训练,注重于培养创新能力。内容的选取借鉴了国内的优秀教材,本教材的特点是注重基础训练,淡化纯理论推导,注重公式物理意义的讲解和基本方法的学习掌握。

本书为了与前修课程理论力学和材料力学的衔接,适当回顾了前修课程的相关内容,但对初学结构力学的读者,也许还嫌不够。这些安排至少可使读者了解前修内容与结构力学的学习关系密切,要切实掌握结构力学知识,就必须很好地掌握这些前修课程内容。

全书共分 12 章,包括:绪论、几何组成分析、静定结构的内力计算、虚功原理和结构的位移计算、力法、位移法、力矩分配法、结构在移动荷载作用下的计算、矩阵位移法、结构的动力分析、结构的稳定分析和结构的极限荷载分析。为便于读者学习,本书配有复习思考题等。全书定位在中、多学时的教学安排,内容按 90~110 学时安排。因此,对少于此学时的使用者,可酌情删减部分内容。本书其他专业学习结构力学的教材或参考书,也可作自学考试等的学习资料。

全书由张系斌主编并统稿,由李广军、李冠鹏担任副主编。具体编写分工是:第 1 章、第 2 章由长江大学张露编写;第 3 章、第 9 章由河南城建学院李冠鹏编写;第 4 章、第 10 章由佳木斯大学李广军编写;第 5 章、第 12 章由陕西理工学院张波编写;第 6 章、第 7 章和第 11 章由长江大学张系斌编写,第 8 章由南京理工大学泰州科技学院孟玮编写。

由于作者水平有限,书中疏漏和不妥之处在所难免,望读者不吝指正。

编 者

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 结构力学的研究对象和任务	1
1.2 结构的计算简图	2
1.3 杆件结构的分类和荷载的分类	5
第 2 章 几何组成分析	7
2.1 概述	7
2.2 体系的计算自由度	9
2.3 平面几何不变体系的基本组成规则	11
2.4 平面体系几何组成分析示例	15
复习思考题	18
第 3 章 静定结构的内力计算	21
3.1 静定梁	21
3.2 静定平面刚架	27
3.3 静定平面桁架	34
3.4 组合结构	39
3.5 三铰拱	40
3.6 静定结构的特性和受力特点	46
复习思考题	48
第 4 章 虚功原理和结构的位移计算	52
4.1 位移计算概述	52
4.2 刚体虚功原理及应用	53
4.3 变形体虚功原理及应用	58
4.4 荷载作用下静定结构的位移计算	63
4.5 图乘法计算位移	67
4.6 静定结构由于支座移动引起的位移计算	74
4.7 静定结构由于温度改变及制造误差引起的位移计算	76
4.8 互等定理	78
复习思考题	82
第 5 章 力法	86
5.1 超静定结构的概念和超静定次数	86
5.2 力法的基本概念	89
5.3 荷载作用下超静定结构的计算	93

5.4	对称结构的计算	101
5.5	非荷载因素作用下的力法计算	104
5.6	超静定结构的位移计算	109
5.7	超静定结构内力图的校核	110
5.8	两铰拱	111
	复习思考题	117
第 6 章	位移法	122
6.1	位移法的基本概念	122
6.2	等截面直杆的转角位移方程	124
6.3	基本未知量数目的确定和基本结构	131
6.4	位移法典型方程及刚架计算	133
6.5	应用结点和截面平衡条件建立位移法方程	144
	复习思考题	148
第 7 章	力矩分配法	152
7.1	力矩分配法的基本概念	152
7.2	单结点力矩分配法	153
7.3	多结点力矩分配法——渐进运算	158
	复习思考题	165
第 8 章	结构在移动荷载作用下的计算	168
8.1	概述	168
8.2	静力法作单跨静定梁的影响线	169
8.3	结点荷载作用下梁的影响线	172
8.4	机动法作静定梁影响线	175
8.5	利用影响线计算量值	178
8.6	最不利荷载位置	179
8.7	简支梁的内力包络图和绝对最大弯矩	183
8.8	超静定结构影响线的概念	185
	复习思考题	188
第 9 章	矩阵位移法	191
9.1	单元刚度矩阵	191
9.2	整体坐标系下的单元刚度矩阵	194
9.3	连续梁的整体刚度矩阵	196
9.4	等效结点荷载	200
9.5	刚架计算步骤和算例	201
	复习思考题	205
第 10 章	结构的动力分析	207
10.1	动力分析的特点和动力自由度	207
10.2	单自由度体系的自由振动	213

10.3	单自由度体系的受迫振动·····	219
10.4	阻尼对振动的影响·····	228
10.5	多自由度体系的自由振动·····	235
10.6	主振型的正交性·····	250
10.7	多自由度体系在简谐荷载作用下的受迫振动·····	253
10.8	多自由度体系在一般动力荷载作用下的受迫振动·····	261
10.9	无限自由度体系的自由振动·····	265
10.10	近似法计算自振频率·····	268
	复习思考题·····	271
第 11 章	结构的稳定分析 ·····	276
11.1	结构稳定的基本概念·····	276
11.2	稳定分析方法及两类稳定问题的分析·····	279
11.3	有限自由度体系的稳定分析·····	284
11.4	无限自由度体系的稳定分析计算——静力法·····	290
11.5	无限自由度体系的稳定分析计算——能量法·····	294
	复习思考题·····	298
第 12 章	结构的极限荷载分析 ·····	301
12.1	概述·····	301
12.2	极限弯矩、塑性铰和极限状态·····	302
12.3	超静定梁的极限荷载·····	305
12.4	比例加载时判定极限荷载的一般定理·····	308
12.5	刚架的极限荷载·····	312
	复习思考题·····	314
	参考文献 ·····	316

第 1 章

绪 论

本章学习的主要内容是结构力学的研究对象和任务、结构的分类和研究方法；讨论结构计算简图的简化原则、结点和支座的简化方法，给出了杆件结构的分类和荷载的分类。

本章要求学生应熟悉结构力学的研究对象和任务。了解结构计算简图的简化原则及简化要点，能合理对支座和结点进行简化，并能针对具体情况进行具体分析，熟练地画出物体的计算简图。了解杆件结构的分类，荷载的分类。

1.1 结构力学的研究对象和任务

1.1.1 结构和结构的分类

在工程中，能承受和传递荷载起到骨架作用的物体或体系称为结构，如工业与民用建筑中的桥梁体系、工业厂房、公路桥梁、铁路上的桥梁、立交桥等。结构按几何特征可分为以下三类：

1. 杆系结构

杆系结构是由若干个杆件相互联结而组成的结构。其几何特征是长度方向尺寸远大于其他两个方向的尺寸。梁、刚架、拱和桁架等都是杆系结构。

2. 板壳结构

板壳结构也称薄壁结构。其几何特征是厚度方向尺寸远小于其他两个方向的尺寸。房屋建筑中的楼板、壳体屋盖等属于板壳结构。

3. 实体结构

实体结构也称三维连续体结构。其几何特征是结构的长、宽、高三个方向的尺度大小相仿。重力式挡土墙和水工建筑中的重力坝等属于实体结构。

1.1.2 结构力学的任务和研究方法

结构力学作为力学的一个分支，其研究对象甚广。本书仅限于由杆件所组成的平面体系，即平面杆件结构。以此为对象的结构力学称为杆系结构力学，也称为经典结构力学。

结构力学是研究结构的合理形式以及结构在受力状态下内力、变形、动力反应和稳定性等方面的规律性的学科。研究的目的是使结构满足安全性、适用性和经济方面的要求。

结构力学的基本任务包括以下四个方面：

(1) 研究结构组成规律与合理形式，保证结构组成合理，能够承担荷载并保持平衡。

(2) 研究结构内力与变形的计算原理和计算方法——强度和刚度，也就是本课程的重要内容。

(3) 研究结构的整体稳定和动力荷载作用下的计算原理和计算方法。

(4) 了解各类结构的受力性能和特点，选取合理的结构类型，以利结构设计。

结构力学有各种计算方法，但都必须满足以下三个基本条件：

(1) 力系的平衡条件。结构的整体或结构的一部分（如一部分杆件、杆件的一部分及杆件的结点等）都应满足力系的平衡条件。

(2) 变形连续条件。一方面是指结构的杆件发生各种变形后仍是连续的，没有重叠或缝隙；另一方面指结构发生变形和位移后，仍应满足结构的支座和结点的约束条件。

(3) 物理条件。即把结构的应力和应变通过物理方程联系起来，如轴向应力和轴向应变、剪切应力和剪切应变、弯曲应力和弯曲应变之间都应满足相应的物理方程。

结构力学的计算问题分为静定和超静定两类：静定问题只需考虑平衡条件，而超静定问题还需考虑变形连续条件和物理条件。

1.2 结构的计算简图

1.2.1 简化原则

一个实际结构的受力情况往往是很复杂的，在计算时不可能采用实际结构，同时也是必要的，因而在结构力学的计算中一般采用一个简化的结构图形代替实际结构。这种简化了的结构图形称为结构的计算简图，计算简图的选择原则如下：

(1) 保留主要因素，使计算简图能反映实际结构的主要受力特征。因此，选择计算简图以前，应搞清结构杆件之间或杆件与基础之间实际连接构造，以保证计算的可靠性和必要的精确性。

(2) 略去次要因素，便于计算。结构的实际构造是很复杂的，必须分清主次，略去次要因素使计算简图便于计算。

因此，选取计算简图是结构受力分析的基础，是非常重要的。

1.2.2 简化要点

1. 结构体系的简化

杆系结构可分为平面杆系结构和空间杆系结构两大类。实际结构一般都是空间结构，各部分相互连接成为一个空间整体，以承受各个方向可能出现的荷载。但在多数情况下，常可以忽略一些次要的空间约束而将实际结构分解为平面结构，使计算得以简化。本书主要讨论平面结构的计算问题。

2. 杆件的简化

杆件的宽度、厚度通常比杆件长度小得多，因此，在计算简图中，杆件可用其轴线表示，杆件之间的连接区用结点表示，杆长用结点间的距离表示，荷载的作用点也转移到轴线上。

3. 结点的简化

结构中杆件与杆件之间的相互连接处称为结点。木结构、钢结构和混凝土结构的结点，具体构造形式虽不尽相同，但其结点的计算简图常可归纳为以下两种类型：

(1) 铰结点。铰结点的机动特征是各杆之间不能相对移动，可以绕铰结点作自由转动。受力特征能承受和传递力，不能承受和传递力矩，如图 1-1 (a)、(b) 所示。

(2) 刚结点。刚结点的机动特征是各杆之间不能相对移动，也不能相对转动，即在刚结点处各杆之间的夹角在变形前后保持不变。受力特征是能承受和传递力，也能承受和传递力矩，如图 1-1 (c) 所示。

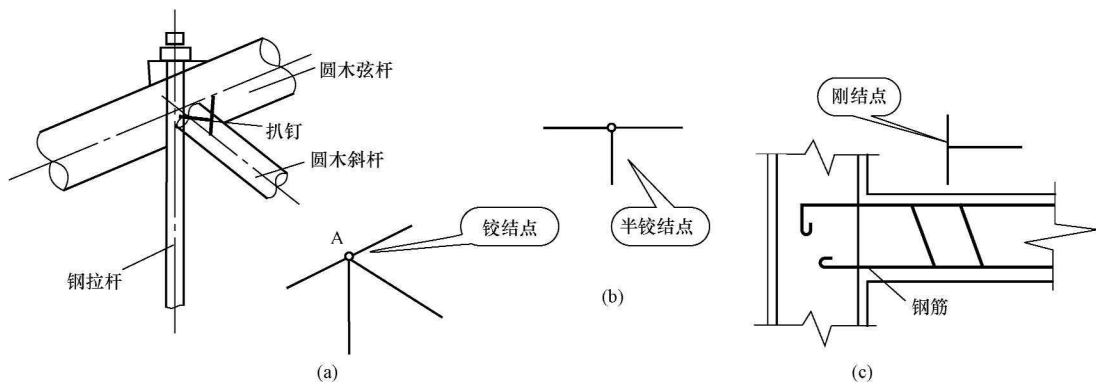


图 1-1 结点的简化

4. 支座的简化

结构与基础相联结的部分称为支座。结构所受的荷载通过支座传递给基础和地基。支座对结构的反作用力称为支座反力。平面结构的支座形式主要有以下四种类型：

(1) 活动铰支座。如图 1-2 (a) 所示，活动铰支座的机动特征是杆端可以绕 A 点转动，且可沿以 B 为圆心 AB 为半径圆弧微小移动，但不能有竖向移动。支座反力特征是没有反力矩，没有水平支座反力，只有竖向支座反力。计算简图可以用一根垂直于支承面的链杆表示。

(2) 固定铰支座。如图 1-2 (b) 所示，固定铰支座的机动特征是杆端可以绕铰中心 A 转动，不能有水平方向和竖直方向移动。支座反力特征是没有反力矩，有水平方向和竖直方向向支座反力。这种支座的计算简图可用交于 A 点的两根支承链杆来表示。

(3) 固定支座。如图 1-2 (c) 所示，固定支座的机动特征是杆端的水平方向移动、竖直方向移动和转动都受到限制。支座反力特征是有水平方向、竖直方向支座反力和反力偶。

(4) 定向支座。如图 1-2 (d) 所示，定向支座的机动特征是杆端沿一个方向上的移动和转动都受到限制，但允许结构在另一个方向上有滑动的自由。支座反力特征是有垂直于支承面的一个反力和一个反力偶。计算简图可用垂直于支承面的两根平行链杆表示。

由以上结点和支座的机动特征和受力分析可以看出，约束的机动特征和受力分析是紧密相应的。凡是结点或支座沿某一方向的位移或运动受到约束时，则结点或支座具有该方向的

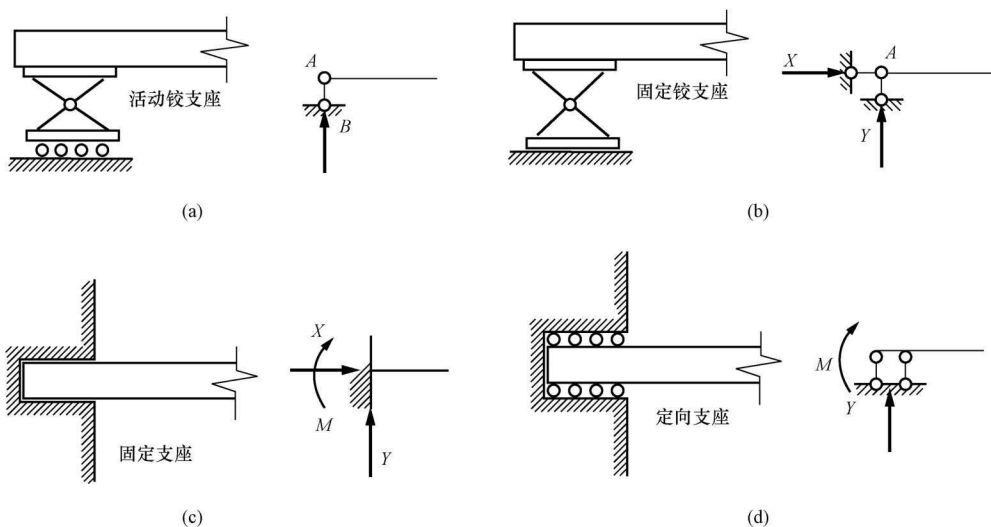


图 1-2 支座的简化

约束力；凡结点或支座沿某一方向可以自由位移或运动时，则它们沿该方向的约束力为零。

5. 材料性质的简化

在土木工程中结构所用的建筑材料通常为钢、混凝土、砖、石、木料等。在结构计算中，为了简化，对组成各构件的材料一般都假设为连续的、均匀的、各向同性的、完全弹性或弹塑性的。

6. 荷载的简化

结构承受的荷载可分为体积力和表面力两大类。体积力指的是结构的重力或惯性力等；表面力则是由其他物体通过接触面而传给结构的作用力，如土压力、车辆的轮压力等。在计算简图中将杆件简化为轴线，因此不管是体积力还是表面力都可以简化为作用在杆件轴线上的力。荷载按其分布情况可简化为集中荷载和分布荷载。

初学者应对一般结构计算简图的选取有初步的了解；重点应掌握结构杆件之间连接的结点和杆件与基础连接的支座的计算简图。

1.2.3 结构计算简图示例

如图 1-3 (a) 所示为一工业厂房结构示意图。该厂是钢筋混凝土厂房结构，梁和柱都是预制的。柱子下端插入基础的杯口内，然后用细石混凝土填实。梁与柱的连接是通过将梁端和柱顶的预埋钢板进行焊接而实现的。在横向平面内柱与梁组成排架，如图 1-3 (b) 所示，各个排架之间，在梁上有屋面板连接，在柱的牛腿上有吊车梁连接。计算上述的厂房结构时，可采用图 1-3 (c) 所示的计算简图。

该厂房是由许多排架用屋面板和吊车梁连接起来的空间结构，但各排架在纵向以一定的间距有规律地排列着。作用于厂房上的荷载，如恒载、雪载和风载等一般是沿纵向均匀分布的，通常可把这些荷载分配给每个排架，而将每一排架看作一个独立的体系，于是该厂房结构就由纵向构件组成的空间结构简化为由一系列屋架、柱和基础组成的平面单元，如图 1-3 (b) 所示。另外，梁和柱都可用它们的几何轴线来代表，是因为梁和柱的截面尺寸比长度

小得多,轴线都可近似地看作是直线。另外梁和柱的连接只依靠预埋钢板焊接,梁端和柱顶之间虽不能发生相对移动,但仍有发生微小相对转动的可能,因此可取为铰结点。柱底和基础之间可以认为不能发生相对移动和相对转动,因此柱底可取为固定端。如图1-3(c)所示的结构称为铰结排架,是单层工业厂房常用的一种结构型式。

从以上分析可知,简化采用了以下的做法:

- (1) 屋架的杆件(梁和柱)用轴线表示。
- (2) 屋架杆件之间的结点简化为铰结点。
- (3) 屋面荷载通过屋面板的4个角点以集中力的形式作用在屋架弦上。
- (4) 屋架的两端通过钢板焊接在柱上,可将其端点分别简化为铰支座和滚轴支座。

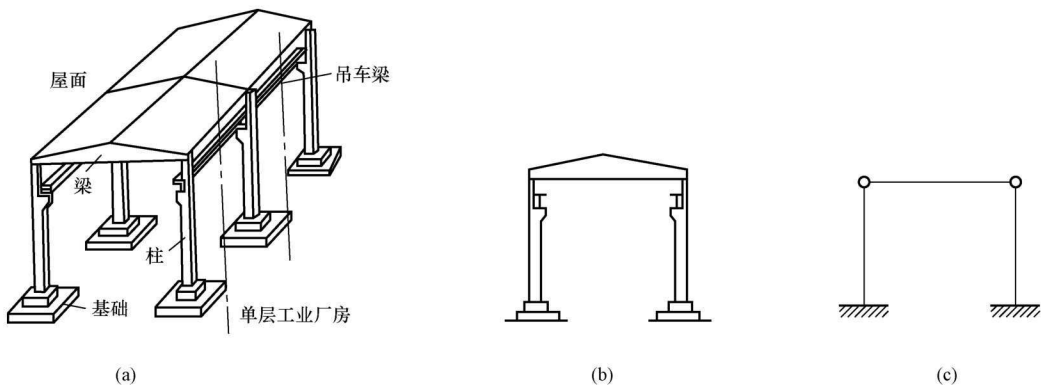


图1-3 单层工业厂房结构型式

结构计算简图的选择十分重要,又很复杂;需要选择者有较多的实际经验,并善于判断各种不同因素的相对重要性。对一些新型结构,往往要通过多次的实验和实践,才能获得比较合理的计算简图;但对常用的结构形式,已有前人积累的经验,可以直接取其常用的计算简图。所以,选择结构计算简图的能力是在本课程、后继结构课程以及长期工程实践中逐步形成的。

1.3 杆件结构的分类和荷载的分类

1.3.1 杆件结构的分类

1. 按组成和受力特点分类

(1) 梁。梁的组成特点是轴线通常为直线。受力特点是在竖向荷载下无水平支座反力,内力有弯矩、剪力。梁可以是单跨的,也可以是多跨的,如图1-4(a)所示。

(2) 拱。拱的组成特点是轴线为曲线。受力特点是在竖向荷载下有水平支座反力,从而可以减少拱截面上的弯矩。内力有弯矩、剪力及轴力,如图1-4(b)所示。

(3) 刚架。刚架的组成特点是由梁、柱直杆用刚结点组成。受力特点是内力有弯矩、剪力、轴力,以弯矩为主,如图1-4(c)所示。

(4) 桁架。桁架的组成特点是由直链杆用铰结点联结而成。受力特点是荷载作用于结点

时,各杆只受轴力,如图 1-4 (d) 所示。

(5) 组合结构。组合结构的组成特点是由梁式杆和链杆组成。受力特点是梁式杆有弯矩、剪力、轴力,链杆只受轴力,如图 1-4 (e) 所示。

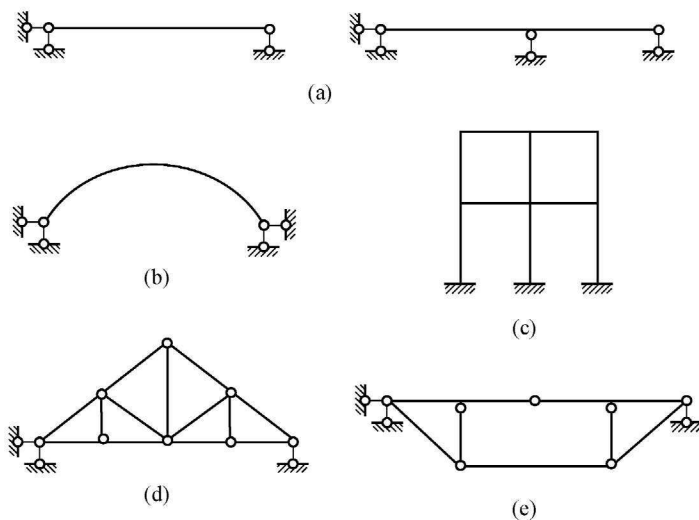


图 1-4 杆件结构的类型

2. 按计算特点分类

- (1) 静定结构: 用静力平衡条件可以唯一确定全部支座反力和内力。
- (2) 超静定结构: 不能由静力平衡条件确定全部支座反力和内力。

3. 按杆件和荷载在空间位置分类

- (1) 平面结构: 各杆件的轴线和荷载都在同一平面内。
- (2) 空间结构: 各杆件的轴线和荷载其中之一不在同一平面内。

1.3.2 荷载的分类

荷载是主动作用于结构的外力。

(1) 根据作用时间的久暂,可分为以下几种:

- 1) 恒载(不变荷载): 永久作用于结构上,如结构自重、固定设备质量。
- 2) 活载(可变荷载): 又分为可动荷载和移动荷载。可动荷载能作用于结构上的任意位置,如人群、雪载、风载;移动荷载互相平行、间距不变、能在结构上移动,如列车荷载、吊车荷载。

(2) 根据荷载作用的性质,可分为以下几种:

- 1) 静力荷载: 荷载的大小、方向和位置不随时间变化的荷载(包括只考虑位置改变、不考虑动力效应的荷载),对结构不产生显著的振动,如恒载等。
- 2) 动力荷载: 荷载随时间迅速变化的荷载,对结构产生显著的振动。如机械转动时的荷载、地震作用、冲击波等。

除荷载外,还有其他一些因素也可以使结构产生内力或位移,如温度变化、支座沉陷、制造误差、材料收缩以及松弛、徐变等。从广义上来说,这些因素也可视为广义荷载。

第 2 章

几何组成分析

本章研究的主要内容是体系的几何方面的问题。杆件体系是由若干杆件及地基用链杆、铰或刚结点连接而成的。本章对平面杆系的几何组成进行分析，以解决怎样组成的杆系才能承受荷载这个基本问题。同时，由于结构的组成方式不同将影响其力学性能和分析方法，因此，在分析结构受力、变形之前，也必须首先了解结构的组成。

本章让学生了解几何组成分析的目的，重点掌握以下基本概念：几何不变体、几何可变体、自由度、约束、瞬铰、必要约束、多余约束、静定结构和超静定结构；理解几何不变无多余约束的平面杆件体系的基本组成规律。并能够熟练地运用组成规律分析各种复杂的杆件体系。

2.1 概述

实际工程结构中，杆件结构一般是由若干根杆件通过结点间的连接及与支座的连接组成的。结构是用来承受荷载的，首先必须保证结构的几何构造是合理的，即它本身应该是稳固的，可以保持几何形状的稳定。一个几何不稳固的结构是不能承受荷载的。例如，图 2-1 (a) 所示结构由于内部的组成不健全，即使受到很小的扰动，结构也会引起很大的形状改变。

对结构的几何组成分析目的在于：判断结构有无保持自身形状和位置的能力；研究几何不变体系的组成规律；为区分静定结构和超静定结构及进行结构内力分析打下必要的基础。

1. 几何不变体系和几何可变体系

杆件结构在不计材料应变的条件下，体系的形状和位置保持不变，称为几何不变体系，如图 2-1 (a) 所示。反之，称为几何可变体系，如图 2-1 (b) 所示。

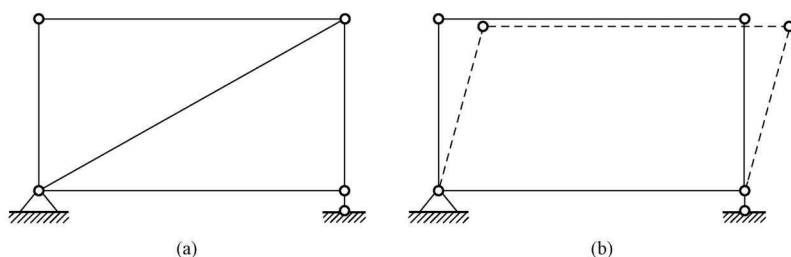


图 2-1 几何不变体系和几何可变体系

(a) 几何不变体系；(b) 几何可变体系

显然, 只有几何不变体系可作为结构, 而几何可变体系是不可以作为结构的。因此在选择或组成一个结构时必须掌握几何不变体系的组成规律。

2. 自由度 S

判断一个体系是否可变, 涉及体系运动的自由度问题。物体或体系运动时, 彼此可以独立改变的几何参数的个数, 称为该物体或体系的自由度。换句话说, 一个物体或体系的自由度就是它运动时可以独立改变的坐标个数。

(1) 点的自由度。点在平面内的自由度为 $S=2$, 即图 2-2 (a) 中所示点的自由度 (x, y) 。

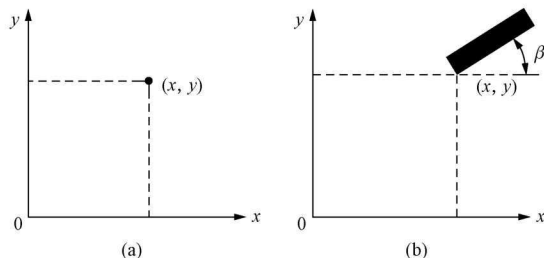


图 2-2 平面内点的自由度和平面内刚片的自由度
(a) 点的自由度; (b) 刚片的自由度

(2) 刚片的自由度。所谓刚片, 就是几何形状不变的部分。由于在讨论体系的几何组成时是不考虑材料应变, 因此可以把一根梁、一根柱、一根链杆甚至体系中已被确定为几何不变的部分看作是一个刚片, 图 2-2 (b) 所示为一平面内刚片。

刚片在平面内的自由度为 $S=3$, 即图 2-2 (b) 中所示刚片的自由度 (x, y, β) 。

3. 约束

约束是指限制物体或体系运动的各种装置, 分外部约束 (体系与基础之间的联系, 即支座) 和内部约束 (体系内部各杆件或结点之间的联系) 两种。物体的自由度, 将会因加入限制运动的装置而减少, 所以约束就是能减少自由度的装置。常见的约束装置的类型有下列几种:

(1) 链杆。链杆可减少一个自由度, 相当于一个约束, 如图 2-3 所示。

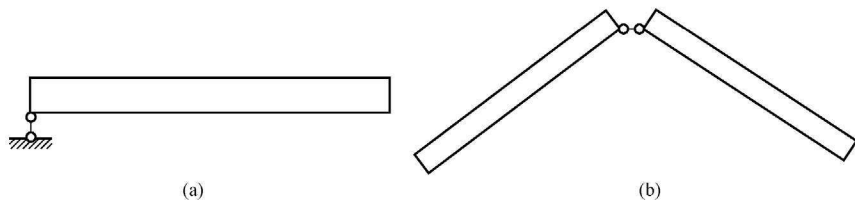


图 2-3 链杆约束

(2) 单铰。一个单铰可以减少两个自由度, 相当于两个约束, 如图 2-4 所示。

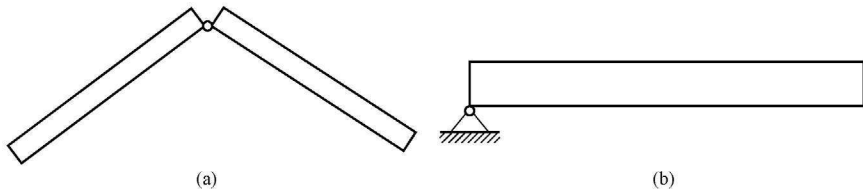


图 2-4 单铰约束

(3) 复铰。复铰是指连接两个以上刚片的铰, 如图 2-5 所示。

连接 n 个刚片的复铰, 相当于 $n-1$ 个单铰。

(4) 刚结点。一个刚结点能减少 3 个自由度，相当于 3 个约束，如图 2-6 所示。

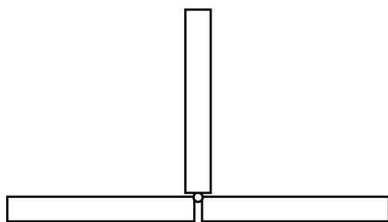


图 2-5 复铰约束

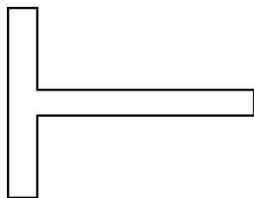


图 2-6 刚结点

(5) 复刚结点。复刚结点是指连接两个以上刚片的刚结点。

连接 n 个刚片的复刚结点，相当于 $n-1$ 个单刚结点。

4. 必要约束和多余约束

所谓必要约束，是指保证体系几何不变所需的最少的、合理约束；相反，必要约束以外的约束就称为多余约束。多余约束不改变体系的自由度。

5. 瞬变体系

瞬变体系指原来是几何可变，经微小位移后又成为几何不变的体系。图 2-7 所示两个刚片用 3 根互相平行但不等长的链杆联结，它是几何可变的。刚片 I 相对刚片 II 发生一个微小的位移 Δ 后， $\beta_1 = \frac{\Delta}{L_1}$ ， $\beta_2 = \frac{\Delta}{L_2}$ ， $\beta_3 = \frac{\Delta}{L_3}$ 。

由于 $\beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3$ ，也就是说当两刚片发生了微小的相对运动后，三根链杆就不再平行了，也不交于一点，故体系就变成了不可变体系。这种在短暂的瞬间是几何可变的体系称为瞬变体系。

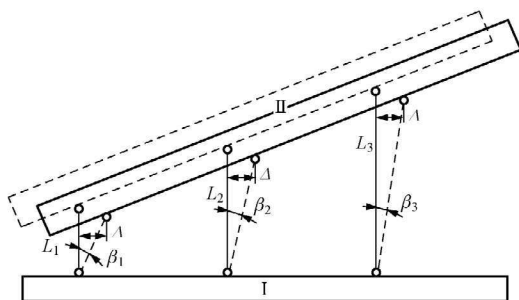


图 2-7 瞬变体系

2.2 体系的计算自由度

为了能对结构的几何组成分析进行量化，引入计算自由度 W 的概念。在给出计算自由度 W 的定义前，先给出自由度 S 的算法。假设结构体系中约束都不存在，各构件的自由度综合为 a ；再确定结构体系的必要约束个数为 c ，则结构体系的自由度 S 为：

$$S = a - c \quad (2-1)$$

在使用式 (2-1) 前必须区分必要约束和多余约束，这个问题往往很困难。为了回避这个困难，构造新的参数，即计算自由度 W 。

$$W = a - d \quad (2-2)$$

式中 d ——全部约束个数。

可见，式 (2-2) 计算自由度 W 就避免了研究哪些约束是多余约束 m 的难题。

由于多余约束和必要约束的和就是全部约束，所以有

$$S - W = m \quad (2-3)$$

式中 m ——多余约束的个数。

式 (2-3) 就是计算自由度 W 、自由度 S 和多余约束数 m 三者之间的关系。下面讲解由式 (2-2) 导出 W 的两种具体算法。

1. 把结构体系看成是由刚片受约束而组成的

以 p 表示体系中刚片的个数, 则刚片的总自由度为 $3p$ 。以 g 代表单刚结点的个数 (复约束应事先拆成单约束), h 代表单铰结点个数, b 代表单链杆个数 (计入支承链杆), 则总的约束个数为 $3g+2h+b$ 。体系的计算自由度 W 为:

$$W = 3p - (3g + 2h + b) \quad (2-4)$$

2. 把体系看成结点受链杆的约束而组成的

以 j 代表节点个数, b 代表单链杆个数 (计入支承链杆), 则体系的计算自由度 W 为:

$$W = 2j - b \quad (2-5)$$

由式 (2-4)、式 (2-5) 算出的 W 值可能为正、负或零。所以根据算出的 W 值还不能得出自由度 S 和多余约束 m 的确切值, 但可以得出它们的差值 $S-m=W$, 从而得出定性结论, 见表 2-1。

表 2-1 计算自由度与几何组成性质的关系

W 的数值	几何组成性质
$W > 0$	体系是几何可变的
$W = 0$	若无多余约束则为几何不变; 如有多余约束则为几何可变
$W < 0$	体系有多余约束且 $m = -W$ 。若为体系几何不变, 则为超静定结构

$W \leq 0$ 不一定就是几何不变的。因为尽管约束数目足够多甚至还有多余, 但若布置不当, 则仍可能是可变的。因此, $W \leq 0$ 只是几何不变体系的必要条件, 还不是充分条件。

如图 2-8 (a)、(b)、(c) 所示为 $W=0$ 情况; 图 2-8 (d)、(e)、(f) 所示为 $W=-1$ 情况。

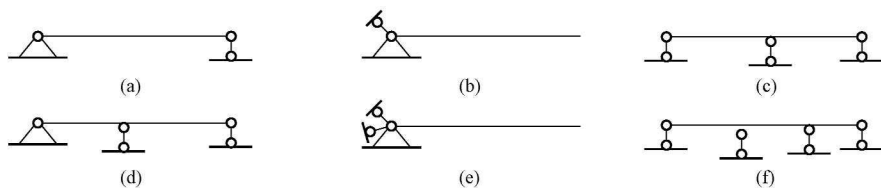


图 2-8 $W \leq 0$ 情况举例

例 2-1 计算图 2-9 (a) 所示体系的计算自由度。

解: 把图 2-9 (a) 所示体系的全部支座去掉以后, 剩下的是一个内部有多余约束的刚片。如果再在截面 G 处切开, 这样才变为无多余约束的刚片, 如图 2-9 (b) 所示。按式 (2-4) 计算, 刚片数 $p=1$, 链杆数 $b=4+6$, 铰结点数 $h=0$, G 处的单刚结点数 $g=1$, 因此, $W=3p-(3g+2h+b)=3 \times 1-(3 \times 1+2 \times 0+10)=-10$ 。由于这个体系是几何不变的, 故自由度为零, 因此, 由式 (2-3) 可以求出多余约束数 m 如下:

$$m = S - W = 0 - (-10) = 10$$

这是一个具有 10 个多余约束的几何不变体系。