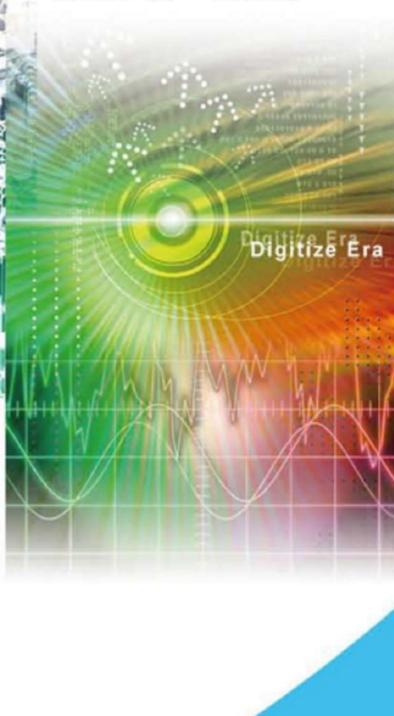
高中物理
竞赛教程
拓展篇

赵志敏　主编



復旦大學出版社

序　一

物理学是自然科学的基础，是探讨物质结构和基本运动规律的前沿学科。

古往今来，人们总是不断地设法理解我们周围的世界。现代物理学理论的建立，则是从伽利略开始的。经过300多年来一大批杰出物理学家的努力，建立了以力学、电磁学和热学为代表的经典物理的完美体系。20世纪以来，物理学又有了革命性的发展，以相对论和量子论为代表的近代物理，不仅极大地开阔了人们的视野，也为人类物质文明的高度发展和社会的巨大进步奠定了基础。

物理学是一门非常讲究美感的学问，它内在的魅力吸引着一代又一代的杰出物理学家为之奋斗终身，为人类的文明作出了无以伦比的巨大贡献。伽利略、牛顿、麦克斯韦、卡诺、爱因斯坦、玻尔……这些集中了人类的最高智慧、揭示了宇宙奥秘的物理学家，将永垂史册。

物理学的学习能够培养我们缜密的推理能力，能够培养我们提出问题、解决问题的能力，能够培养我们发现规律、总结规律的能力。这些能力恰恰是我们从事任何工作都需要的，因此，物理学的学习会使我们受益终身。

站在无数巨人的肩膀上，物理学成就了今天的辉煌，明天的物理学将更加璀璨夺目！选择物理，学好物理，研究物理，为中国文明和世界文明作出贡献，是新一代有志气、有抱负的青少年学生的正确选择之一。

本书是优秀中学生深入学习物理的辅助教材，希望对于引导中学生走进神奇而美丽的物理世界，理解物理学的知识、思想方法，提高应用能力有所帮助。

中国科学院院士
上海市物理学会理事长
上海交通大学校长
张　杰

序　二

无穷的追问，无穷的乐趣

物理，物理，万物之理。

追问万物之理，是物理学光芒四射的魅力。

这是为什么？那是为什么？追根溯源，物理的问题远远不止10万个，无穷无尽。

一个有好奇心的人，才会问为什么；好奇心越强，问题就越多。许多青少年就是这样，怀着强烈的好奇心，踏上学习物理的艰难路程，进入奇妙的科学世界。热爱物理的人，遇到问题就兴奋；问题越多，兴趣越浓，钻研的热情越高。

正是物理学这些令人兴奋的问题，吸引一代又一代物理学家奉献出他们毕生的时间和精力。正是在好奇心的驱使下，牛顿发现了力学三定律，麦克斯韦发现了电磁场的规律。在他们看来，发现问题，然后解决问题，是一件赏心悦目的事情。牛顿说："对我而言，我只是像在海滩边玩耍的男孩，偶然间发现了一粒比较圆的石头，和一枚比较漂亮的贝壳，就觉得很愉快。"

这并不意味，学习物理是件轻松的事。科学家决不满足于一时一事的愉悦、一时一事取得的成绩，他们永远像小学生一样，谦虚地对待自然界。热爱物理的人和所有热爱科学的人一样，不会浅尝辄止，不会因为解答了一个问题，就高枕无忧，相反，他们殚精竭虑，不断追问，把问题解决得臻于完美。就这样，在具有好奇心、创造力，而又不怕艰难的科学家们的前仆后继之中，物理学才有今天的成就，才会不断向前发展。

你面前的这本书，是富有教学经验的物理教师，为那些对物理充满好奇心的青少年学生所编。书中的内容，是以往物理学习的总结。在你没有用自己的脑袋思考之前，这些仅仅是别人的知识，而要把这些知识变成自己的思想，就需要在解题过程中用心钻研，并不断加以总结。

希望这本书能成为你攀登物理这座高山的拐杖，"在科学上没有平坦的大道，只有不畏劳苦沿着陡峭山路攀登的人，才有希望达到光辉的顶点"。

前上海市物理学会理事长

前复旦大学副校长

前复旦大学研究生院院长

周鲁卫

目　　录

第1章 运动学

1.1 运动的合成

知识拓展

(一) 矢量的概念及其加减运算

1. 矢量的基本概念

物理学中有一类物理量除了其本身数量的大小以外还有一定的方向,例如力学中常用的位移、速度、加速度、力、力矩、动量等物理量,这类物理量被称为矢量。另一些物理量只有大小而没有方向,例如质量、路程、密度、速率、功、能量等物理量,这类物理量被称为标量。标量的运算可以用一般的代数运算法则,而矢量的运算法则较为复杂。

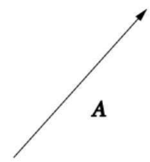


图 1-1-1

矢量是用有向线段来表示的。如图 1-1-1 所示,矢量的方向即图中有向线段箭头所指的方向;矢量的大小即图中有向线段的长度,用符号 **A** 表示。

此外,也可以用直角坐标系来描述矢量。如图 1-1-2 所示,在三维直角坐标系中,若矢量 **A** 与坐标轴 Ox、Oy、Oz 的夹角分别为 α、β、γ。则矢量 **A** 在坐标轴 Ox、Oy、Oz 上的投影,即 x、y、z 三个分量分别是

$$\begin{cases} A_x = A\cos\alpha \\ A_y = A\cos\beta \\ A_z = A\cos\gamma \end{cases}$$

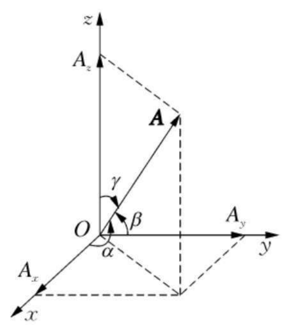


图 1-1-2

此处,$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 分别称为矢量 **A** 的方向余弦,显然有

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

通常用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 表示坐标轴 Ox、Oy、Oz 上的单位矢量,则矢量 **A** 亦可表示为

$$\mathbf{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$

显然有

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

当然,若矢量 **A** 在二维平面直角坐标系 $O\text{-}xy$ 中,则上述各式可分别改写成

$$\begin{cases} A_x = A\cos\alpha \\ A_y = A\cos\beta \end{cases}$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$$
$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}$$
$$A^2=A_x^2+A_y^2$$

2. 矢量的加减运算

如图 1-1-3 所示,矢量的加法运算符合平行四边形法则(请读者自行证明)。

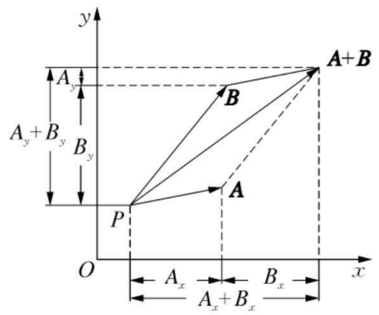


图 1-1-3

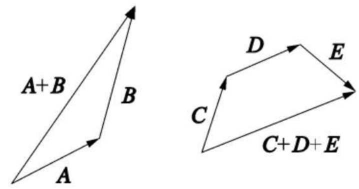


图 1-1-4

矢量的加法也可利用与平行四边形法则等价的三角形法则来进行。如图 1-1-4 所示,将矢量 $\boldsymbol{A}$ 和矢量 $\boldsymbol{B}$ 首尾相连,另作一矢量,自矢量 $\boldsymbol{A}$ 的起点指向矢量 $\boldsymbol{B}$ 的终点,该矢量即矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}$ 的和。这一方法可以推广到多个矢量相加的过程中。例如,将矢量 $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$ 依次首尾相连,作一矢量自 $\boldsymbol{C}$ 的起点指向 $\boldsymbol{E}$ 的终点,该矢量即矢量 $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$ 的和。

物理学中所谓矢量的合成,即求这些矢量的和。

在一个矢量符号前面加一个负号,表示一个与它大小相等、方向相反的矢量。因此,求矢量之差$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 可以理解为求矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量$-\boldsymbol{B}$ 的和。如图 1-1-5 所示,矢量减法亦可用三角形法则进行(请读者自行证明)。矢量的加减运算符合交换律和结合律,即

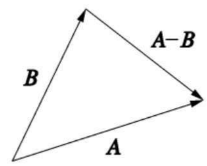


图 1-1-5

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$$

(二)运动的合成与分解

1. 运动的合成

在物理学的研究中,经常将一个复杂的运动过程分解为若干个简单的运动过程的合成。例如,一艘小船在流动的水里渡河,船的运动可以看成船在静水里的运动和水流的运动的合成。

当研究某个质点的运动时,我们需要获得其位置、速度、加速度随时间变化的规律。位移、速度和加速度都是矢量,故对这些物理量进行合成涉及矢量加法运算。

2. 运动的分解

运动的分解是运动合成的逆过程,即将一个质点的运动分解为若干分运动的过程。例如,研究质点的平抛运动时,通常将该运动分解成水平方向的匀速直线运动和竖直方向的自由落体运动。这时称平抛运动为质点的合运动,称水平方向的匀速直线运动和竖直方向的自由落体运动为质点的两个分运动。

分运动相互独立,不会因为其他方向上的分运动而受影响。合运动与分运动之间、分运动相互之间均满足等时性原则。各分运动的位移之和即合运动的位移,同样,分运动的速度之

和、加速度之和即合运动的速度与加速度。

设合运动的位移、速度、加速度分别为 $\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$，该运动的两个分运动(也可以有三个以上的分运动)的位移、速度和加速度分别记作 $\boldsymbol{s}_1$、$\boldsymbol{s}_2$、$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$、$\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_1+\boldsymbol{s}_2\\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2\\ \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2\end{cases}$$

运动的合成与分解均可按上式计算。将两个具体的分运动进行合成，其合运动是唯一的；而将一确定的运动分解成两个分运动，其结果并不唯一。一般而言，运动的分解是根据问题的具体情况来进行的。

3. 连接体和接触体之间的运动相关性

若两质点由刚性杆相连接，可将两质点的速度沿垂直杆方向和平行杆方向作正交分解，由于杆不会发生形变，因此它们沿杆方向的分速度必然相同。同样，对于不可伸长的张紧细绳，绳上所有动点沿绳方向的分速度大小都相等。

若质点在运动过程中始终与某一刚体保持接触，可将质点速度沿接触面的法向和切向进行正交分解，质点的法向分速度与刚体的法向分速度必然相同。

典型例题

例 1-1-1　一条河道由于深度不同被分成流速不同的两部分，如图 1-1-6 所示。图中给出了船渡河的最短航线。已知船沿该航线渡河所需的时间为 $t=25\ \mathrm{min}$。试根据图中标出的长度及比例关系，求：(1) 船在静水中的速度大小 v_0；(2)两条河道的水速大小 v_1 和 v_2。

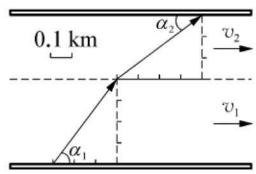


图 1-1-6

【分析与解】　渡河问题是一种典型的运动合成与分解的问题。船在渡河的过程中，其实际运动是船在静水中的运动和水流运动的合运动。因此，图 1-1-6 中船的航线即船的合运动的轨迹。当然，船的位移和速度亦为上述两分运动位移与速度的矢量和。

本题的关键在于正确理解"船的最短航线"的含义。当船在静水中的速度大小 $v_船$ 大于水流速度大小 $v_水$ 时，$\boldsymbol{v}_船$ 与 $\boldsymbol{v}_水$ 的合速度 $\boldsymbol{v}$ 可以垂直于河岸。此时，船的航线显然最短，如图 1-1-7 所示。但是，当船在静水中的速度大小 $v_船$ 小于水流速度大小 $v_水$ 时，船的航线不可能垂直于河岸。在这种情况下，船的最短航线如图 1-1-8 所示。以水流速度矢量 $\boldsymbol{v}_水$ 的末端为圆心，船在静水中的速度大小 $v_船$ 为半径作一圆弧，显然当合速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 恰好与该圆弧相切时，船的航线最短。由以上分析及图 1-1-6 可知

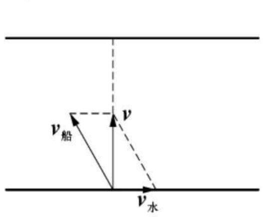


图 1-1-7

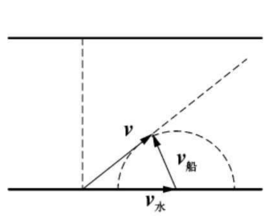


图 1-1-8

$$v_1=\frac{v_0}{\sin\alpha_1},\ v_2=\frac{v_0}{\sin\alpha_2} \quad ①$$

式中 $\sin\alpha_1=\frac{4}{5}$，$\sin\alpha_2=\frac{3}{5}$，则式①可改写为

$$v_1=\frac{5}{4}v_0,\ v_2=\frac{5}{3}v_0 \quad ②$$

又由图 1-1-6 可知，船在渡河过程中，在两条河道中沿水流方向的位移大小分别为 $s_1=0.3\ \text{km}$、$s_2=0.4\ \text{km}$，则渡河时间为

$$t=\frac{s_1}{v_1}+\frac{s_2}{v_2} \quad ③$$

②、③式联立可解得

$$v_0=0.32\ \text{m/s},\ v_1=0.4\ \text{m/s},\ v_2=0.53\ \text{m/s}$$

例 1-1-2 如图 1-1-9 所示，河岸两边有相距 $d=1\ 200\ \text{m}$ 的 A、B 两个码头，A、B 连线与河岸夹角为 $60°$，且 B 在 A 的下游。水流的速度大小为 $2.0\ \text{m/s}$。一艘渡轮要在 $t=5\ \text{min}$ 内往返于两码头之间，求其在静水中的速度。

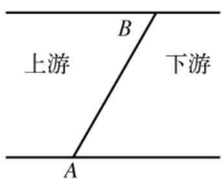


图 1-1-9

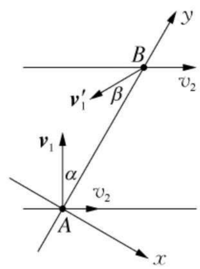


图 1-1-10

【分析与解】 渡轮在码头 A、B 之间往返时，其航线始终沿 A、B 连线，因此渡轮的合速度必须沿 AB 方向，如图 1-1-10 所示。设渡轮由 A 向 B 航行时，它在静水中的速度为 $\boldsymbol{v}_1$；由 B 向 A 航行时，它在静水中的速度为 $\boldsymbol{v}'_1$；水流速度始终为 $\boldsymbol{v}_2$，其中 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}'_1$ 大小相等。建立直角坐标系，x 轴与 AB 连线垂直，y 轴沿 AB 连线方向。$\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}'_1$ 与 y 轴所成夹角分别为 α、β。由于渡轮的合速度始终沿 AB 连线方向，则 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}'_1$ 的 x 分量始终与 $\boldsymbol{v}_2$ 的 x 分量抵消，即

$$v_{1x}=v'_{1x}=v_2\sin 60° \quad ①$$

因此 $\alpha=\beta$。设渡轮由 A 向 B 航行时，其合速度大小为 v；由 B 向 A 航行时，其合速度大小为 v'，则

$$v=v_{1y}+v_{2y},\ v'=v'_{1y}-v_{2y} \quad ②$$

即

$$v=v_1\cos\alpha+v_2\cos 60°,\ v'=v_1\cos\alpha-v_2\cos 60° \quad ③$$

$$v_1=v'_1=\sqrt{v_{1x}^2+v_{1y}^2} \quad ④$$

$$\alpha=\beta=\arctan\left(\frac{v_{1x}}{v_{1y}}\right) \quad ⑤$$

又由题意可知
$$t=\frac{d}{v}+\frac{d}{v'} \qquad ⑥$$

将以上①～⑥式联立，可解得
$$v_1=v'_1\approx 8.31\ \mathrm{m/s},\ \alpha=\beta\approx 12.03^\circ$$

例 1-1-3　如图 1-1-11 所示，一刚性正三角形 ABC 在水平面内运动，若某时刻 A 点的速度为 $\boldsymbol{v}_1$，方向沿 AB 方向，C 点的速度 $\boldsymbol{v}_2$ 恰好与 AB 垂直。求 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 的大小之比。

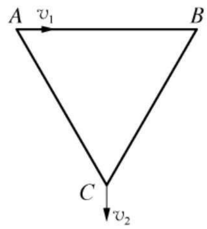


图 1-1-11

【分析与解】　由于正三角形 ABC 是刚性的，故其上 A、C 两点间距离始终保持不变，将这两点的速度均沿 AC 方向和垂直 AC 方向作正交分解，则沿 AC 方向的速度分量应相等。根据题设条件有
$$v_1\cos 60^\circ=v_2\sin 60^\circ$$
即
$$v_1:v_2=\sqrt{3}$$

例 1-1-4　如图 1-1-12 所示，长为 l 的硬质细杆一端靠在竖直墙面上，另一端搁在水平地板上，杆下端 B 点在水平面上以速度 v_0 向右运动。求：当硬杆与水平面成 α 角时，杆上哪一点速度最小？最小速度为多少？

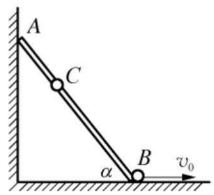


图 1-1-12

【分析与解】　如图所示，以竖直墙面和水平地面的交点为坐标原点，水平向右为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向，建立直角坐标系。则 A、B 两点坐标分别设为 $(0,\ y)$、$(x,\ 0)$。在杆上任取一点 C，设 $\overline{BC}=kl$，$0\leqslant k\leqslant 1$。设点 C 坐标为 (x_c, y_c)，由几何关系可知
$$x_C=kx,\ y_C=(1-k)y \qquad ①$$

将①式两边对时间求变化率
$$\frac{\Delta x_C}{\Delta t}=k\frac{\Delta x}{\Delta t},\ \frac{\Delta y_C}{\Delta t}=(1-k)\frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad ②$$
可得
$$v_{Cx}=kv_0,\ v_{Cy}=(1-k)v_A \qquad ③$$
因为 $v_B\cos\alpha=v_A\sin\alpha$，所以 $v_{Cy}=(1-k)v_0\cot\alpha$。

C 点速度的大小为
$$\begin{aligned}v_C&=\sqrt{v_{Cx}^2+v_{Cy}^2}=v_0\sqrt{k^2+(1-k)^2\cot^2\alpha}\\&=v_0\sqrt{k^2(1+\cot^2\alpha)-2k\cot^2\alpha+\cot^2\alpha}\end{aligned} \qquad ④$$
由④式可知，C 点速度为比例系数 k 的函数。易知当
$$k=\frac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}=\cos^2\alpha$$
时的 C 点速度最小，它的速度 $v_C=v_0\cos\alpha$。

例 1-1-5　狐狸看到距自己 $l=160$ m 处有一只兔子，兔子以恒定速度 $v_1=6$ m/s 沿直线跑，于是狐狸以速度 $v_2=10$ m/s 去追赶兔子。假设每时每刻狐狸总是朝着兔子的方向奔跑，初始时刻兔子的速度垂直于兔子与狐狸位置的连线。求：狐狸在何处追上兔子？这一

过程持续时间为多少？

【分析与解】 本题如果以地面为参照系，狐狸的运动是一个变速曲线运动，难以求解。可以考虑以兔子为参照系。在这一参照系中，狐狸有了一个和兔子相反方向的速度 v_1（如图 1-1-13），兔子静止不动，狐狸沿曲线 ABO 运动。A、O 分别是狐狸和兔子的初始位置。

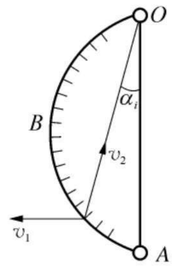


图 1-1-13

如图所示，令 $\Delta t_i \to 0$，在 Δt_i 时间内，在狐狸与兔子的连线方向，狐狸到兔子距离减少了

$$\Delta l_i = (v_2 - v_1 \sin\alpha_i)\Delta t_i \qquad ①$$

狐狸离开 AO 直线距离的变化为

$$\Delta x_i = (v_1 - v_2 \sin\alpha_i)\Delta t_i \qquad ②$$

对②式两边求和，左边显然应该为零，可得

$$\sum (v_1 - v_2 \sin\alpha_i)\Delta t_i = v_1 t - v_2 \sum \sin\alpha_i \Delta t_i = 0$$

即

$$\sum \sin\alpha_i \Delta t_i = \frac{v_1 t}{v_2} \qquad ③$$

全过程中狐狸到兔子的距离变化之和应为 l，①式、③式联立，

$$\sum \Delta l_i = \sum (v_2 - v_1 \sin\alpha_i)\Delta t_i = v_2 t - \frac{v_1^2 t}{v_2} = \left(v_2 - \frac{v_1^2}{v_2}\right)t = l$$

于是

$$t = \frac{l}{v_2 - \dfrac{v_1^2}{v_2}} = \frac{l v_2}{v_2^2 - v_1^2} = 25(\mathrm{s})$$

在这段时间内兔子跑了 150 m，狐狸在该处追上兔子。

课后练习

1-1-1 模型飞机以相对空气 $v=39$ km/h 的速度绕一个边长为 2 km 的等边三角形飞行，设风速 $u=21$ km/h，方向与三角形的一边平行，并和飞机起飞方向相同。求飞机绕三角形一周需要的时间。

1-1-2　如图 1-1-14 所示装置，以速度 v 匀速拉动绳端，在甲、乙两种情况下物体 A 运动到图示位置时的速度各是多少？（α 角已知）

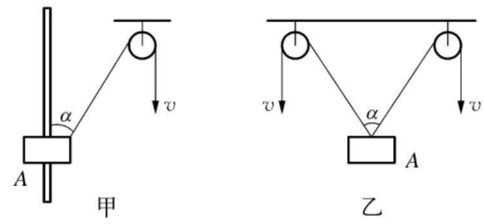


图 1-1-14

1-1-3　如图 1-1-15 所示，a 棒绕 O 轴以角速度 ω 逆时针转动，b 棒固定，O 轴离 b 棒距离为 d。某一时刻 a、b 棒的夹角为 θ，求此时两棒的交点 A 的速度。

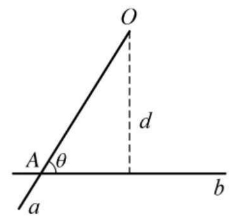


图 1-1-15

1-1-4　如图 1-1-16 所示，两个相同的半圆环 a、b，以大小相同、方向相反的速度相向而行，在两环从开始相遇到最后分离的过程中，两环交点 P 的速度的情况是(　　)

A. 方向向上，大小变小

B. 方向向下，大小变大

C. 先是方向向上、大小变小，后是方向向下、大小变大

D. 先是方向向下、大小变大，后是方向向上、大小变小

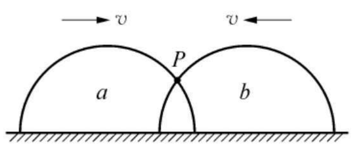


图 1-1-16

1-1-5　一染色块以 $v_1=0.9\,\mathrm{m/s}$ 的速度滑到与它运动方向垂直的传输带上，染色块在传输带上划出的痕迹长度 $l=0.5\,\mathrm{m}$。传输带的速度 $v_2=0.45\,\mathrm{m/s}$。以染色块进入传输带的点 O 为坐标原点，x 轴平行于速度 v_1 的方向，y 轴平行于速度 v_2 的方向（如图 1-1-17）。问：(1) 染色块相对地的速度的最小值是多少？(2) 染色块相对于地的速度在何处出现最小值？

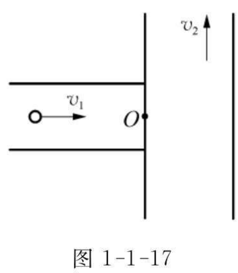


图 1-1-17

1-1-6 一片胶合板从空中下落，发现在某时刻板上 a 点和 b 点速度大小相同，即 $v_a=v_b=v$，其方向均沿板面；同时发现板上 c 点速度大小比速度 v 的大小大一倍，c 点到 a、b 两点的距离等于 a、b 两点之间距离。问板上哪些点的速度大小等于 $3v$？

1.2 抛体运动

知识拓展

(一) 抛体运动的基本概念和处理方法

以一定的初速度将质点抛出，若质点仅受恒定重力的作用，则质点做的是抛体运动。严格地说，地球对物体的引力作用在不同空间是不同的(大小、方向都随物体所在位置而变化)。但是在地球表面附近不太大的区域内，物体所受到的重力变化可以忽略，可以认为物体所受的重力是恒定的。

在上述条件下，质点被抛出后将被限制在由初速度矢量和重力加速度矢量所决定的竖直平面内运动。若质点的初速度沿竖直方向，则物体将做竖直上(下)抛运动；若质点的初速度不在竖直方向上，质点将做平抛或斜抛运动。

要了解平抛和斜抛运动的性质和规律，可以将其分解为水平方向的匀速运动(因为水平方向不受力)和竖直方向的匀变速直线运动(因为竖直方向只受重力)来研究。历史上，伽利略第一次指出，平抛运动可以看成是水平的匀速运动和竖直的匀加速直线运动的合成，其轨迹是抛物线。直到今天，伽利略对平抛运动的处理方法仍是处理一般平面曲线运动的重要方法。

(二) 抛体运动的规律

1. 竖直上(下)抛运动的规律

沿竖直方向建立一维坐标系 O-y，根据匀变速直线运动的规律以及运动的合成方法，可以方便地得到质点做竖直上(下)抛运动的速度方程和位移方程：

$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{g}t$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{y}_0+\boldsymbol{v}_0t+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$$

式中 $\boldsymbol{v}_0$、$\boldsymbol{y}_0$、t_0 分别表示抛体的初速度、初位移和初始时刻。对于自由落体运动，质点的初速度 $v_0=0$，则其运动学方程和速度时间关系为

$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{g}t$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{y}_0+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$$

2. 斜上抛运动的规律

若将质点以一定的初速度斜向抛出，质点将在竖直平面内做匀变速曲线运动。此时可将质点的运动分解为水平方向的匀速运动和竖直方向的上（下）抛运动。质点的速度始终沿其运动轨迹的切线方向。以斜上抛运动为例，建立如图 1-2-1 所示的直角坐标系。以抛出点为坐标原点，分别使 x 轴和 y 轴沿水平和竖直方向，可以分别写出质点的水平和竖直分运动中速度和位置随时间变化的关系。设 $t=0$ 时质点自坐标原点处抛出，则质点瞬时速度的水平和竖直分量为

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = v_0 \sin\alpha - gt \end{cases}$$

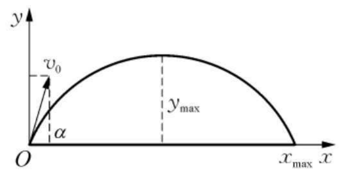


图 1-2-1

质点在水平和竖直方向的位移（相对于坐标原点）为

$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha \\ y = v_0 t\sin\alpha - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

上式为斜上抛运动轨迹的参数方程，消去其中的 t，即可获得斜上抛运动的轨迹方程

$$y = x\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$$

可见质点做斜上抛运动的轨迹是一条抛物线。当 $\alpha=0$ 且将 y 轴的正方向取作竖直向下时，可得到平抛运动的表达式：

$$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$y = \frac{g}{2v_0^2}x^2$$

事实上，由于抛体运动均为匀变速运动，故可以给出统一的关于抛体运动的位置和速度随时间变化的表达式：

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{g}t$$

$$\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$$

其中，$\boldsymbol{v}$ 表示抛体运动的瞬时速度，$\boldsymbol{s}$ 表示做抛体运动的物体相对于初始位置的位移。

做斜上抛运动的质点所能达到的最大高度称为射高 y_{max}，当质点到达该高度时其竖直方向的速度分量为 0，故

$$y_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$$

质点在水平地面上做斜上抛运动的射程

$$x_{max}=\frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}=\frac{v_0^2\sin2\alpha}{g}$$

由上式可知，$\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，质点的射程达到最大。另外，若质点的初速度大小一定，抛射角分别为 α_1、α_2，且 $\alpha_1+\alpha_2=\frac{\pi}{2}$，则质点射程相等。

典型例题

例 1-2-1　有一竖直放置、两端封闭的长玻璃管，管内为真空。管内有一小球自某处自由下落(初速度为零)，落到玻璃管底部时与底部发生弹性碰撞。以后小球将在玻璃管内不停地上下跳动。现用支架固定一照相机，用以拍摄小球在空间的位置。每隔一相等的确定的时间间隔 T 拍摄一张照片，照相机的曝光时间极短。从所拍摄到的照片发现，每张照片上的小球都处于同一位置。求：小球开始下落处离玻璃管底部距离(用 H 表示)的可能值，以及与各 H 值相应的照片中小球位置离玻璃管底部距离的可能值。

【分析与解】　上述小球被释放后将在其初始位置与管底之间不断下落、反弹。由竖直上抛运动的特点可知，小球的运动是周期性的。在相机相邻两次的曝光时间内，可以用 s-t 图来分析有关规律。设小球释放处 A 离管底的高度为 H，照片中摄下的位置 B 离管底高度为 h。小球自 A 落至 B 的时间为 t_1，小球由 B 落至管底的时间为 t_2。小球下落、反弹一次的时间为 t。如图 1-2-2 所示，小球释放后的位置 -时间图像明显呈现出周期性的特点。由竖直上抛运动的性质可知，球自 A 落至 B 的时间和小球从 B 上升至 A 的时间相等，球自 B 落至管底处的时间和从管底上升至 B 的时间亦相等，则

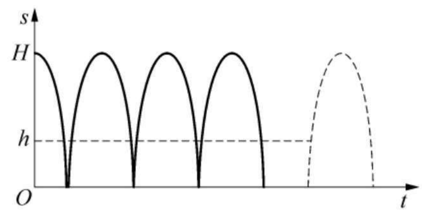


图 1-2-2

$$t=2t_1+2t_2$$

小球在两次相邻的曝光时间 T 内共经过 B 处 n 次，下面分别就 n 为奇数或偶数的情况进行讨论。

(1) 若 n 为奇数，由 s-t 图可知，$n\geqslant3$，则

$$T=(n-1)t_1+(n-1)t_2=\frac{n-1}{2}t$$

即
$$\frac{t}{2}=\frac{T}{n-1}$$

则
$$H=\frac{1}{2}g\left(\frac{t}{2}\right)^2=\frac{1}{2}g\left(\frac{T}{n-1}\right)^2,\ n=3,\ 5,\ 7\cdots$$

B 可以是 A 和管底间的任意位置。

(2) 若 n 为偶数，由 s-t 图可知，$n\geqslant2$，则

$$T=nt_1+(n-2)t_2=(n-2)t_1+nt_2$$