初等数学

（二 册）

一九七七年十月

前　言

英明领袖华主席在党的“十一大”政治报告中指出：“要在二十世纪最后四分之一时间内把我国建设成为伟大的社会主义强国，迫切需要培养和造就大批又红又专的建设人材。这就要从教育入手，要真正搞好无产阶级教育革命”。这是以华主席为首的党中央向我们提出的光荣而艰巨的战斗任务。

为了适应教育事业的大发展，满足教学需要，提高教学质量，我们以湖南水利电力学校等于1975年所编的数学教材为基础，总结历年数学教学工作的体会，重新编写了《初等数学》一、二册和《高等数学》这套教材。在编写过程中，虽然我们力求做到：第一、以毛主席关于马克思主义的认识论和对立统一的光辉哲学思想为指导阐述教材内容，培养学生分析问题和解决问题的能力；第二、加强基本知识、基本理论、基本技能的训练与培养；第三、在内容与习题的选择上适应水利、电力专业的特点。但由于时间仓促，我们的认识水平和理论水平有限，业务水平低，因此错误、缺点在所难免，诚恳地希望批评指正。

西安电力学校
湖北电力学校

目　　录

第二章　函数及其图象

第四章 三角恒等式

第五章 正弦型曲线

第一章　指数与对数

"自然科学是人们争取自由的一种武装。"随着人们社会实践的不断发展，要求数学计算能够适应实际的需要，一方面发展计算方法以解决过去未能解决的问题；一方面使运算化繁为简，化难为易，使数学成为生产和科学实践的有力工具。本章所讨论的，是在正整指数幂的基础上推广而得到的幂运算，以及由幂运算转化而来的对数运算，它们是实践中经常应用的重要计算方法，也是理解与使用简易计算工具的基础理论知识，所以要很好地掌握这些理论和方法。

第一节　幂的概念的推广

前面我们已经学习正整指数幂a^n（n为正整数）的概念，以及它的一些运算法则（指数律）：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m > n);$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)。$$

它们在代数式的运算中，起过重要作用，但是，在实际应用中，正整指数幂的概念还有很大的局限性，例如我们在

电子学中会遇到如电子的直径为 $0.\underbrace{00\cdots0}_{10个0}1$ 厘米，电子质量为 $0.\underbrace{00\cdots0}_{28个0}9108$ 克等很小的正数，书写和计算都很不方便，因此有必要把幂的概念从正整数幂的基础上加以推广。

一、整数指数幂

我们看到，在正整指数幂的概念中，“同底的幂相除，指数相减”，这一条指数律：

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m > n)$$

带有限制性的条件 $m > n$。如果取消这种限制，运算规律的适应范围就得到扩大。因此，我们必须规定，当 $m = n$ 和 $m < n$ 时，乘幂都有意义，并且使得指数律仍然适用。

1、零指数幂

我们知道，相同的两个数相除的商是1，即 $a^n \div a^n = 1$，另一方面，在指数律 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$ 中，如果 $m = n$，那么

$$a^m \div a^n = a^{m-n} = a^0。$$

为了使符号 a^0 有确定的意义，同时使“同底的幂相除，指数相减”这一条指数律在 $m = n$ 时也能适用，那么上面用指数律运算得到的结果 a^0 和用除法得到的结果“1”就应当一致，所以我们有

定义：$a^0 = 1$ $(a \neq 0)$。即任何不为零的实数的零次幂等于1。

例如： $8^0=1$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^0=1$$

$$(a+b)^0=1 \quad (a+b\neq 0)$$

等等。

2、负整数指数幂

我们先看下面的一些运算：

$$7^3\div 7^5=\frac{7^3}{7^5}=\frac{7^3}{7^{3+2}}=\frac{7^3}{7^3\cdot 7^2}=\frac{1}{7^2};$$

$$a^2\div a^7=\frac{a^2}{a^7}=\frac{a^2}{a^{5+2}}=\frac{a^2}{a^5\cdot a^2}=\frac{1}{a^5} \text{ 等等。}$$

如果按"同底的幂相除，指数相减"的法则来计算的话，则应有

$$7^3\div 7^5=7^{3-5}=7^{-2},$$

$$a^2\div a^7=a^{2-7}=a^{-5}。$$

这说明只有把记号7^{-2}及a^{-5}分别规定为

$$7^{-2}=\frac{1}{7^2} \quad 及 \quad a^{-5}=\frac{1}{a^5}$$

时，才能既使 7^{-2} 与 a^{-5} 有确定的意义，又使所提到的指数律适用。

一般，当 $m<n$ 时(m, n 都是正整数)，可以把 n 表示为 m 和另一个正整数 k 的和，即 $n=m+k$，或 $n-m=k$，

于是 $$a^m\div a^n=\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{a^{m+k}}=\frac{1}{a^k},$$

另一方面，如果按指数律来运算，应有

$$a^m\div a^n=a^{m-n}=a^{-k}。$$

同样，为了使 a^{-k} 有确定的意义，且指数律在 $m<n$ 的情

况下也能适用，上面两种运算结果就应该一致，所以我们有

定义：$a^{-k}=\frac{1}{a^{k}}$（$a\neq0$，k是正整数），就是说，任何不为零的实数的$-k$（k是正整数）次幂，等于这个数的k次幂的倒数。

例如：$2^{-1}=\frac{1}{2}$；　　$10^{-5}=\frac{1}{10^{5}}$；

$$(a-b)^{-2}=\frac{1}{(a-b)^{2}}\quad(a\neq b)\text{ 等等。}$$

规定了零指数幂和负指数幂的意义以后，幂的幂指数就可以是任意整数了。这种推广不但符合客观实际，而且可以验证，前面五条幂的运算法则，当m、n为任意整数时仍然成立。

例如：　$10^{2}\times10^{-7}=10^{2}\times\frac{1}{10^{7}}=\frac{1}{10^{5}}$，

$$10^{2}\times10^{-7}=10^{2+(-7)}=10^{-5}=\frac{1}{10^{5}};$$

又如　$a^{-3}\times a^{-4}=\frac{1}{a^{3}}\times\frac{1}{a^{4}}=\frac{1}{a^{7}}$，

$$a^{-3}\times a^{-4}=a^{(-3)+(-4)}=a^{-7}=\frac{1}{a^{7}}.$$

可见当m、n是任意整数，公式$a^{m}\cdot a^{n}=a^{m+n}$仍然成立，其它法则就不一一验证了。

例1　计算下列各式：

(1) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-6}\div\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$；　(2) $[(-2)^{-3}]^{-2}$

解：　(1)　原式$=\left(\frac{3}{4}\right)^{-6-(-4)}=\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$

$$=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9};$$

（2）原式 $=(-2)^{(-3)\times(-2)}=(-2)^6=2^6=64$。

例 2 计算下列各式：

（1）$(3a^{-2}b^{-3}c^2)\left(\frac{4}{5}ab^3c^{-3}\right)$；

（2）$(x+y^{-1})^2(x-y^{-1})^2$。

解：（1）原式 $=\frac{12}{5}a^{-2+1}b^{-3+3}c^{2+(-3)}$

$$=\frac{12}{5}a^{-1}b^0c^{-1}=\frac{12}{5ac};$$

（2）原式 $=[(x+y^{-1})(x-y^{-1})]^2$

$$=[x^2-(y^{-1})^2]^2$$

$$=(x^2-y^{-2})^2$$

$$=x^4-2x^2y^{-2}+y^{-4}$$

$$=x^4-\frac{2x^2}{y^2}+\frac{1}{y^4}。$$

例 3 计算 $\left(\frac{3a^3x^{-2}}{b^2y^{-1}}\right)^{-2}$，并把结果化成不含负指数的式子。

解：原式 $=(3a^3x^{-2}b^{-2}y)^{-2}=3^{-2}a^{-6}x^4b^4y^{-2}$

$$=\frac{b^4x^4}{9a^6y^2}。$$

从上面的例子可以看出，有了负指数幂的定义，分子、分母的差异就消失了，分子可以转化为分母，分母可以转化为分子，于是体现了整式和分式的对立统一。

例 4 计算 $\frac{(-9x^{-1})^2(-4x^2y^{-1})^{-2}}{(-6x^2y^{-2})^3}$

解： $$原式=\frac{3^4x^{-2}\cdot 2^{-4}x^{-4}y^2}{-3^3\cdot 2^3x^6y^{-6}}$$

$$=-3\cdot 2^{-7}x^{-12}y^8$$

$$=-\frac{3y^8}{128x^{12}}。$$

前面我们在学习正整指数幂的时候，已经知道一个很大的数，可以写成一个具有一位整数和10的正整指数幂的乘积的形式。例如光速是每秒300000公里，可表示成3×10^5公里/秒；16克氧气中有原子$60\underbrace{200\cdots0}_{21个0}$个，可表成$6.02\times10^{23}$等等。

有了负整指数幂的定义，同样地可以把一个绝对值很小的数表示成只有一位整数的数和10的乘幂之积的形式，而使数的写法及计算更加清楚简便。因为

$$0.1=\frac{1}{10}=10^{-1},\quad 0.01=\frac{1}{100}=10^{-2},$$

$$0.001=\frac{1}{1000}=10^{-3}\cdots$$

$$一般有0.\underbrace{00\cdots0}_{n个0}1=\frac{1}{1\underbrace{00\cdots0}_{n个0}}=10^{-n}。$$

所以$0.00004035=4.035\times0.00001=4.035\times10^{-5}$，

$0.000000005305=5.305\times10^{-9}$；等等。

例5 氢原子的质量是$0.\underbrace{00\cdots0}_{23个0}167$克，试表示成为只有一位整数的数和10的乘幂的积的形式。

解： 如果把小数点往右移到数字"1"的右面，一共要移24位小数，所以

$$\underbrace{0.00}_{23个0}\cdots 0167克 = 1.67\times 10^{-24}克。$$

例6 电子的质量 $m_e = 0.\underbrace{00\cdots 0}_{27个0}91085$ 克，质子的质量 $m_H = 0.\underbrace{00\cdots 0}_{23个0}16720$ 克，质子的质量是电子质量的几倍？

解： $\because$ $m_e = 9.1085\times 10^{-28}$克，

$m_H = 1.6720\times 10^{-24}$克，

$$\therefore \frac{m_H}{m_e} = \frac{1.6720\times 10^{-24}}{9.1085\times 10^{-28}} = \frac{1.6720}{9.1085}\times 10^4$$

$$= 0.1835\times 10^4 = 1835。$$

即质子的质量约为电子质量的1835倍。

例7 把1微秒，1厘米和1毫克分别表示成秒、公里和公斤。

解： 1微秒 $= 0.000001$秒 $= 10^{-6}$秒；

1厘米 $= 0.00001$公里 $= 10^{-5}$公里；

1毫克 $= 0.000001$公斤 $= 10^{-6}$公斤。

二、分数指数幂

上面我们已经把幂的概念加以推广，使指数在整数范围内，乘幂都有意义。但它仍没有脱离整数的局限性，使某些运算受到了限制，例如过去学习根式时，我们知道：乘幂的

开方，是把被开方数的幂指数，用根指数来除，即 $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$。当时对这一运算法则加有限制条件，就是m和n都是正整数，而且m能被n整除，其所以加这种限制，就是因为$a^{\frac{m}{n}}$的幂指数$\frac{m}{n}$必须是整数的缘故。

为了取消这种限制，使乘幂开方的法则，在m不能被n整除的情况下仍然适用，且要使$a^{\frac{m}{n}}$在指数$\frac{m}{n}$是分数的情况下也有确定的意义，因此我们有

定义：$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ ($a>0$，m、n 是正整数)，就是说，正数的分数指数幂是一个根式，指数的分子是根底数的幂指数，分母是根式的根指数。

和负整数幂的意义相类似，我们规定负分数指数幂的意义为

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}。$$

例如：$8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{(2^3)^2}=\sqrt[3]{2^6}=2^{\frac{6}{3}}=4$；

$$4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}；$$

反过来有：$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$；　$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$，

$\sqrt[3]{(a+b)^2}=(a+b)^{\frac{2}{3}}$；$\frac{1}{\sqrt{a+b}}=(a+b)^{-\frac{1}{2}}$，

等等。

分指数幂的引入，再一次推广了幂的概念，关于正整指数幂的运算法则在分指数幂的情形下完全适用。在应用这些法则进行运算之前，先就法则

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

进行验证，即验证它在 m、n 是 分数时仍然正确。

（1）假设 $m=\frac{1}{2}$，$n=\frac{1}{3}$，　那末

等式左 端：$a^m \cdot a^n = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^2}$

$$= \sqrt[6]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{5}{6}};$$

等式右 端：$a^{m+n} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$，

所以　$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}。$$

（2）假设 $m=\frac{1}{2}$，$n=-\frac{1}{3}$，那末

等式左 端：$a^m \cdot a^n = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

$$= \sqrt[6]{\frac{a^3}{a^2}} = \sqrt[6]{a} = a^{\frac{1}{6}};$$

等式右 端：$a^{m+n} = a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}}$，

所以　$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}。$$

其他法则也可用同样的方法验证。

下面我们通过例子来说明分指数幂的概念及其运算法则的应用。