大学数学系列课程学习指导

DAXUE SHUXUE XILIE KECHENG XUEXI ZHIDAO

主编　夏莉　李霄民

重庆大学出版社

大学数学系列课程学习指导

主　编　夏　莉　李霄民
副主编　张义萍　郭　伟　江晓涛

重庆大学出版社

内容提要

本书由具有丰富大学数学系列课程教学经验的教学团队,集长期教学实践总结而成。

本书突出教学大纲要求的基本知识点,将大学数学系列课程各章节知识整理成内容主线,使之一目了然,便于掌握。有与课程章节配套的同步练习、学期考试模拟试题及解答。书末附有近几年硕士研究生入学考试试题及详解。

本书内容丰富、层次分明、结构新颖。对于经管类、理工类大学教学课程的学习、考试、教学,培养学生掌握数学解题技巧,提高应用数学能力,有一定借鉴。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学系列课程学习指导/夏莉,李霄民主编.
—重庆:重庆大学出版社,2012.8
ISBN 978-7-5624-6811-0

Ⅰ.大… Ⅱ.①夏… ②李… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 140905 号

大学数学系列课程学习指导

主编 夏 莉 李霄民

责任编辑:曾令维 杨粮菊 版式设计:杨粮菊

责任校对:任卓惠 责任印制:赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:邓晓益

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编:401331

电话:(023)88617183 88617185(中小学)

传真:(023)88617186 88617166

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆五环印务有限公司印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:16.25 字数:406 千

2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 1 次印刷

印数:1—7 050

ISBN 978-7-5624-6811-0 定价:23.80 元

大数数学系列课程学习指导编委

（以姓氏笔画为序）

前　言

大学数学系列课程包括“高等数学”“微积分”“概率与数理统计”“线性代数”课程。在长期的大学数学课程教学实践中,深感大学生在学习数学课程中普通存在如下问题:一是对数学定义、定理的形成理解欠缺,计算公式难于掌握;二是例题听懂的情况下,独立完成习题经常出错或者无从下手。另外有不少准备报考研究生的学生,期望提高数学分析问题解决问题的能力,掌握一定的数学解题技能与方法。为了培养学生数学思维,更好地帮助学生理解数学定义、公式形成过程,掌握数学知识之间的联系、灵活计算数学习题的方法,提高分析问题解决问题的能力,我们特组织具有大学数学课程丰富教学经验的高职称教师编写此书,希望对学生学习大学数学课程以及报考研究生有所帮助。

本书的特色如下:

①内容选题上由浅入深,既有各章内容的同步练习和单元总结,又有与考研究生题型一致的综合模拟试题,适合学生课后练习、巩固数学知识和作为考硕士生的复习资料。

②内容选材上并不依赖于哪一套大学数学教材,适合各类大学所开设的“高等数学”“微积分”“概率与数理统计”“线性代数”课程学习对象。

本书各章分为以下几个版块:

1. 基本要求　介绍课程教学大纲各知识点的要求程度,使学习者把握各章知识要点。文中用黑体字排印的内容,应深入领会和掌握,并能熟练运用。其中,概念、理论用“理解”一词表述;方法、运算用“掌握”一词表述。非黑体字排印的内容,也是必不可少的,只是在要求上低于前者。其中,概念、理论用“了解”一词表述;方法、运算用“会”或“了解”表述。文中带 * 号内容根据专业不同作选择性要求。

2. 内容主线　以图表的形式清晰简明、系统地给出本章的基本概念、性质、定理、公式等知识结构,使读者对本章知识逻辑关系一目了然,以此提高学生的学习效率、质量,数学学习技巧。

3. 同步练习　按照各章节知识顺序及题目难易程度,体现基本概念、基本计算、基本应用方法的训练,提供配套的同步练习题及解答,以达到巩固所学数学知识,训练数学基本计算方法的目的。

4. 模拟试题　进一步强化解题训练,培养数学的综合运算、应用能力。提供学期结束的标准模拟考试题,通过模拟试题训练,达到检验学习效果的目的。

5. 习题解答　对同步练习试题给出标准答案,模拟试题给出详细解答过程,便于学习者评价学习效果。

6. 考研试题　书末附有近几年全国硕士研究生入学考试数学试题(一)、(二)、(三)及详解,便于通过本书学习后,检验学习效果,提高考研水平。

全书共分 3 部分。第 1 篇:高等数学(微积分);第 2 篇:概率与数理统计;第 3 篇:线性代数。高等数学(微积分)部分试题由张义萍、江晓涛编拟,概率统计部分试题由郭伟编似,线性代数部分试题由李霄民编拟。各章基本要求、内容主线、部分自测模拟试题由夏莉编写、整理。

参加编写的还有:丁宣浩、陈义安、陈修素、李庆玉等,全书由夏莉总纂。

本书可供高等学校本科学生作为大学数学课程学习指导,参加硕士研究生入学考试复习及教师教学参考使用。

在编写过程中,得到丁宣浩教授、陈义安教授的直接指导与大力支持,并参阅了大量的参考文献和同行们的研究成果,在此,一一表示感谢。

由于水平有限,编写时间仓促,错误在所难免,敬请同行和读者批评指正。

编　者

2012 年 2 月

目　录

第1篇　高等数学(微积分)

第 2 篇 概率与数理统计

第3篇　线性代数

附 录

第1篇

高等数学(微积分)

第1章　函　数

1.1　基本要求

1. 在中学已有的基础上，**加深对函数概念的理解**和对函数基本性态（奇偶性、周期性、单调性、有界性）的了解。

2. **理解复合函数的概念**；了解反函数的概念，**理解初等函数的概念**。

3. 会建立简单的经济问题的函数关系式；了解经济学中常用的一些函数。

1.2　内容主线

函数
- 定义：$\forall x\in D \xrightarrow{f}$ 唯一确定 $y=f(x)\in Z$：两个非空集合 D（定义域）Z（值域）之间的一个单值对应法则 f
- 分类
  - 基本初等函数

函数	定义域	值域
常数：$y=c$	$(-\infty,+\infty)$	$\{c\}$
幂函数：$y=x^{\alpha}(\alpha\neq 0)$	视 α 值而定	随 α 而定
指数函数：$y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$
↕ 互为反函数		
对数函数：$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
三角函数：$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$
三角函数：$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$
三角函数：$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$	$(-\infty,+\infty)$
三角函数：$y=\cot x$	$x\neq k\pi$	$(-\infty,+\infty)$
↕ 互为反函数		
反三角函数：$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$
反三角函数：$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
反三角函数：$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$
反三角函数：$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$

  - ↓ 有限次四则及复合运算
  - 初等函数：基本性质
    - 有界性：$\forall x\in D$，$\exists M$，使 $\begin{cases} f(x)\leqslant M, f(x)\text{在 } D \text{ 上有上界} \\ f(x)\geqslant M, f(x)\text{在 } D \text{ 上有下界} \\ |f(x)|\leqslant M, f(x)\text{在 } D \text{ 上有界} \end{cases}$ f 有界⇔既有上界又有下界
    - 周期性：$\forall x\in D$，若 $f(x)=f(x+T)$，T 为最小正周期，D 为无穷区间
    - 奇偶性：$\forall x\in D$，且 $-x\in D$，若 $\begin{cases} f(-x)=f(x)\text{，称 } f(x) \text{ 为 } D \text{ 上偶函数} \\ f(-x)=-f(x)\text{，称 } f(x) \text{ 为 } D \text{ 上奇函数} \end{cases}$ D 为对称区间
    - 单调性：$\forall x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 有 $\begin{cases} f(x_1)<f(x_2)\text{，} f(x) \text{ 为 } D \text{ 上单调递增函数} \\ f(x_1)>f(x_2)\text{，} f(x) \text{ 为 } D \text{ 上单调递减函数} \end{cases}$

1.3　同步练习

一、填空

1. 函数$f(x)=\begin{cases} x & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ -x^2 & 1<x<3 \end{cases}$的定义域为________。

2. 函数$y=\lg(9-x^2)$的定义域为________。

3. 函数$y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{1-x}$的定义域为________。

4. $f(x)-2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{2}{x}$,则$f(x)=$________。

5. 设$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,则$f(x)=$________。

6. 设$f(x)=\begin{cases} 0 & 0\leqslant x<1 \\ \dfrac{1}{2} & x=1 \\ 1 & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$　则$f\left(\dfrac{5}{4}\right)=$________。

7. 已知$y=\sqrt{1+u^2}$,$u=\sin x$,试将y表示成x的函数________。

8. $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$,则$f[f(x)]=$________。

9. 函数$y=\sqrt{x-2}$的反函数为________。

10. 函数$y=\sin 2x$是由________和________复合而成。

二、选择

1. 函数$f(x)=3^x$,则$f(x+y)=$(　　)。

A. $f(x)f(y)$　　B. $f(2x)$　　C. $f(x)$　　D. $f(y)$

2. 若$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上有定义的函数,则下列(　　)是奇函数。

A. $f(x^3)$　　B. $[f(x)]^3$　　C. $f(x)-f(-x)$　　D. $f(x)+f(-x)$

3. 下列函数中是偶函数的有(　　)。

A. $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$　　B. $y=x\cos x$

C. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$　　D. $y=\dfrac{1}{1-x}$

4. 设函数$f(u)$的定义域为$0<u<1$,则$f(\ln x)$的定义域为(　　)。

A. $(0,1)$　　B. $(1,a)$　　C. $(0,e)$　　D. $(1,e)$

5. 下列$f(x)$与$g(x)$是相同的函数有(　　)。

A. $f(x)=x$,$g(x)=(\sqrt{x})^2$　　B. $f(x)=\sqrt{x^2}$,$g(x)=|x|$

C. $f(x)=\lg x^2$,$g(x)=2\lg x$　　D. $f(x)=\sin^2 x$,$g(x)=\sin 2x$

6. 若$f(x-1)=x(x-1)$,则$f(x)=$(　　)。

A. $x(x+1)$　　B. $(x-1)(x-2)$　　C. $x(x-1)$　　D. 不存在

7. 下列函数为单调函数的有(　　)。

A. $y=10^x$　　B. $y=x^2-1$　　C. $y=\sin x$　　D. $y=|x|$

8. 下列(　　)为复合函数。

A. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$　　B. $y=\sin 2x$　　C. $y=\sqrt{x}\,(x<0)$　　D. $y=\lg(\sin x-1)$

9. 在区间$(0,+\infty)$内下列函数中无界的为(　　)。

A. $y=e^{-x^2}$　　B. $y=x-1$　　C. $y=\frac{1}{1+x^2}$　　D. $y=\cos x$

10. 函数$y=\lg(x-1)$在区间(　　)内有界。

A. $(2,3)$　　B. $(1,2)$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $(1,+\infty)$

三、计算

1. 求函数$y=\sqrt{x^2-4x+3}$的定义域。

2. 求函数$y=\arcsin\frac{2x-1}{3}$的定义域。

3. 求函数$y=\arcsin\frac{x}{2}+\ln(2-x)$的定义域。

4. 设函数$y=f(x)$的定义域为$[0,3a]\,(a>0)$，求$g(x)=f(x+a)+f(2x-3a)$的定义域。

5. 求函数$f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2} & |x|\leqslant 3\\ x^2-1 & 3<x<4\end{cases}$的定义域，并求$f(0)$的值。

6. 已知$\varphi(x+1)=\begin{cases}x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，求$\varphi(x)$及其定义域。

7. 设$f(x)=\lg 3$，求$f(x+1)-f(x-2)$。

8. 已知函数$f(x)=\frac{x}{1-x}$，求复合函数$f[f(x)]$。

9. 设$f(x)=\begin{cases}x-1 & x\geqslant 2\\ 2x-3 & x<2\end{cases}$，求$f(x+1)$。

10. 求函数$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，$x\in(-\infty,0]$的反函数。

四、应用

1. 某商品的单价为100元，单位成本为60元，商家为了促销，规定凡是购买超过200单位时，对超过部分按单价的九五折出售，求成本函数、收益函数和利润函数。

2. 某电视机每台售价为500元时，每月可销售2 000台，每台售价为450元时，每月可增销400台，试求该电视机的线性需求函数。

3. 某厂生产某商品的可变成本为15元/件，每天的固定成本为2 000元，如果每件商品的出厂价为20元，为了不亏本，该厂每天至少应生产多少件该商品？

第 2 章　极限与连续

2.1　基本要求

1. **理解数列极限和函数极限的概念**。

2. 了解无穷大、无穷小、高阶无穷小和等价无穷小的概念;会用等价无穷小求极限。

3. **掌握极限的四则运算法则**,会用变量代换求某些简单复合函数的极限。

4. 了解极限存在的两个准则(夹逼准则和单调有界准则);**了解两个重要极限** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ **与** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,**并会用它们求一些相关的极限**。

5. **理解函数连续的概念**;了解函数间断点的概念，会判断间断点的类型。

6. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理和有界性定理、零点定理和介值定理)。

2.2　内容主线

- 极限
  - 定义:见附表Ⅰ.2.1
  - 性质
    - 有界性:若 $\lim f(x)$ 存在 $\Rightarrow f(x)$ 在该过程中有界
    - 唯一性:若 $\lim f(x)$ 存在 $\Rightarrow$ 极限唯一
    - 保号性
      - 若 $\lim f(x)=A>0(<0)\Rightarrow$ 该过程中 $f(x)>0(<0)$
      - 若 $\lim f(x)=A$ 且该过程中 $f(x)\geqslant 0(\leqslant 0)\Rightarrow A\geqslant 0(\leqslant 0)$
  - 判断
    - 夹逼定理:某过程中,$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且 $\lim g(x)=\lim h(x)=A\Rightarrow\lim f(x)=A$
    - 单调有界数列必有极限
      - 单调递增有上界数列必有极限
      - 单调递减有下界数列必有极限
  - 计算
    - 四则运算法则:若 $\lim u$,$\lim v$ 均存在,$\lim(u\pm v)=\lim u\pm\lim v$,$\lim(uv)=\lim u\cdot\lim v$,
      $\lim\dfrac{u}{v}=\dfrac{\lim u}{\lim v}$,且 $\lim v\neq 0$
    - 初等变换:利用代数方法求极限
    - 两个重要极限
      - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ $\xrightarrow{\text{推广}}$ $\lim\dfrac{\sin[f(x)]}{f(x)}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}1$
      - $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ $\xrightarrow{\text{推广}}$ $\lim\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}\overset{(1+0)^{\infty}}{=\!=\!=}\mathrm{e}$
    - 特殊极限
      - 定义:若 $\lim f(x)=0$,$f(x)$ 为该过程中无穷小量
      - 性质
        - 1)有限个无穷小和、差、积仍是无穷小
        - 2)无穷小与有界量之积是无穷小
        - 3)等价无穷小代换:$\sin x\sim x$,$\tan x\sim x$,$\mathrm{e}^{x}-1\sim x$,$\ln(1+x)\sim x$,$(x\to 0)$
        - 4)非零无穷小的倒数是无穷大
    - 罗比达法则(第 4 章)

附表Ⅰ.2.1 函数极限分析定义

自变量变化过程＼函数极限	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to-\infty$	$f(x)\to+\infty$
$n\to\infty$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $\lvert u_n-A\rvert<\varepsilon$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$			
$x\to\infty$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $\lvert x\rvert>X$ 时，有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$	$\forall M>0$，$\exists X>0$，当 $\lvert x\rvert>X$ 时，有 $\lvert f(x)\rvert>M$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$	$\forall M>0$，$\exists X>0$，当 $\lvert x\rvert>X$ 时，有 $f(x)<-M$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$	$\forall M>0$，$\exists X>0$，当 $\lvert x\rvert>X$ 时，有 $f(x)>M$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$
$x\to-\infty$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x<-X$ 时，有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$	$\forall M>0$，$\exists X>0$，当 $x<-X$ 时，有 $\lvert f(x)\rvert>M$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$	$\forall M>0$，$\exists X>0$，当 $x<-X$ 时，有 $f(x)<-M$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$	$\forall M>0$，$\exists X>0$，当 $x<-X$ 时，有 $f(x)>M$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$
$x\to+\infty$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x>X$ 时，有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$	$\forall M>0$，$\exists X>0$，当 $x>X$ 时，有 $\lvert f(x)\rvert>M$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$	$\forall M>0$，$\exists X>0$，当 $x>X$ 时，有 $f(x)<-M$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$	$\forall M>0$，$\exists X>0$，当 $x>X$ 时，有 $f(x)>M$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，有 $\lvert f(x)\rvert>M$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，有 $f(x)<-M$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，有 $f(x)>M$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$
$x\to x_0^-$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，有 $\lvert f(x)\rvert>M$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，有 $f(x)<-M$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty$	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，有 $f(x)>M$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=+\infty$
$x\to x_0^+$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有 $\lvert f(x)\rvert>M$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有 $f(x)<-M$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty$	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有 $f(x)>M$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty$

注：1. ε：任意小的正数；X：任意大的正数；M：充分大的正数，N：充分大的自然数。

2. 任意性（$\forall$）：刻画函数与极限的接近程度；存在性（$\exists$）：描述自变量变化过程。