

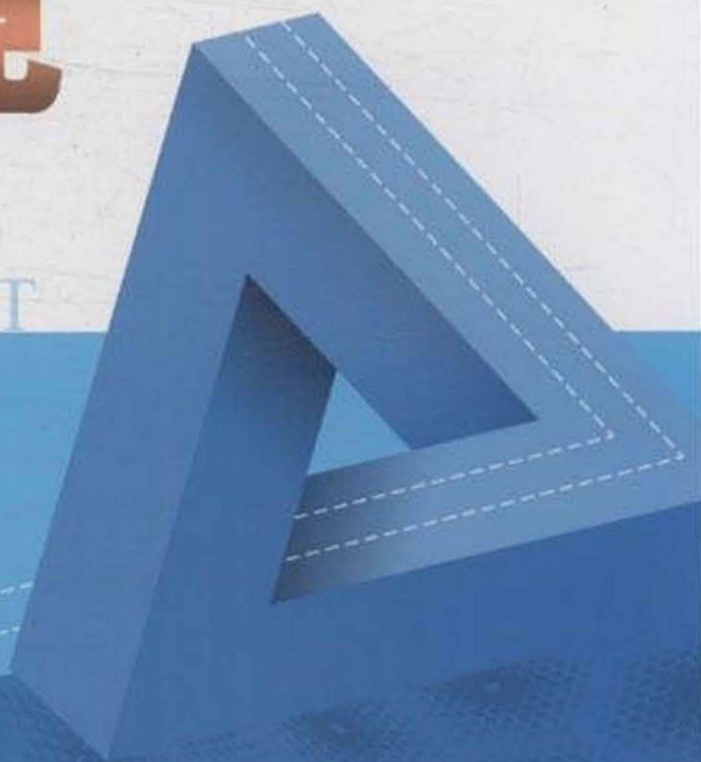
十年相聚 十年培训

中国东南数学 奥林匹克

(2004—2013年)

CHINA SOUTHEAST
MATHEMATICAL
OLYMPIAD

陶平生 李胜宏 张鹏程 主编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

十年相聚 十年培训

中国东南数学奥林匹克

(2004—2013 年)

主编 陶平生 李胜宏 张鹏程



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

中国东南数学奥林匹克:2004—2013 年. / 陶平生,
李胜宏,张鹏程主编. —杭州:浙江大学出版社,
2014.7

ISBN 978-7-308-13380-7

I. ①中… II. ①陶… ②李… ③张… III. ①数学—
竞赛题—题解 IV. ①01—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 129535 号

中国东南数学奥林匹克(2004—2013 年)

主 编 陶平生 李胜宏 张鹏程

责任编辑 沈国明
封面设计 杭州林智广告有限公司
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址: <http://www.zjupress.com>)
排 版 杭州星云光电图文制作有限公司
印 刷 德清县第二印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 12
字 数 208 千
版 印 次 2014 年 7 月第 1 版 2014 年 7 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-13380-7
定 价 28.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部联系方式:0571-88925591; <http://zjdxcs.tmall.com>

序 言^{〔1〕}

十年前,即 2003 年秋,老一辈数学家裘宗沪先生在鹰潭召集闽、浙、赣三省十七所重点中学校长举行研讨会,决定成立中国东南地区数学奥林匹克组委会并开展数学竞赛活动。东南数奥为这一地区的数学竞赛,注入了新鲜活力,谱写了新的篇章! 十年以来,福建、浙江、江西、台湾的一批名牌学校,先后承办了历届东南数奥。

一年一度的中国东南地区数学奥林匹克,已成为数学爱好者的一次次盛会。自 2004 年首次举办这项赛事以来,东南地区的数学竞赛水平得到了大幅度提高,每年都有众多的东南赛参与者入选中国国家集训队与国家队,并在国际数学奥林匹克中摘金夺银。赛事取得的丰硕成果,为世人所瞩目。

九百年前,诗人苏东坡曾经在富春江畔题写过这样的诗句:“春山磔磔鸣春禽,此间不可无我吟! 路长漫漫傍江浦,此间不可无君语。”今天,当这一赛事走过辉煌的十年,再度回归出发之地时,东南赛也迎来了新的鼎盛,七十多支参赛队伍齐聚人杰地灵的鹰潭,“宾主尽东南之美”,“龙光射牛斗之墟”,各个参赛学校,真正品尝到“十年磨一剑,如今剑乃成”的感觉。

我国的数学竞赛,是华罗庚、苏步青等老一辈数学家们亲手栽种的绿苗,几十年来,在一代代数学家们的精心培育下,在各地政府和社会各界的支持下,已经长成一株挺拔的大树。数学竞赛,在造就杰出人才过程中的地位和作用,已经是人所共知,它在培养人的创造性思维品质,锻炼人在处理和解决问题中的意志和毅力等方面,有着十分重要的意义。在最近两届菲尔兹奖的得主中,过半曾是国际数学奥林匹克的金牌获得者。有一篇文章“数学苍穹闪烁中国新星”介绍了 2001 年之后获得国际金牌的一大批中国学子在美国摘下多

〔1〕 序言是陶平生先生在第十届中国东南地区数学奥林匹克开幕式上的讲话,内容有删减。

项国际数学研究大奖的事迹,他们的成功,激励着一届又一届学生后来居上,不断超越。

至于世人对数学竞赛的褒贬,已故数学大师陈省身教授曾经深情地题写了杜甫的名句以寄感慨:“文章千古事,得失寸心知”。他还说过,“在数学许多领域,我们总要高看别人,唯有数学奥林匹克,我们一直受到别国的仰视”。

自从我国于1986年参加国际数学奥林匹克以来,这一舞台就成为一届又一届我国选手们为国增光而驰骋拼搏的疆场,他们凭借这一舞台,淋漓尽致地向世人展示了我国青年学子的聪明才智,让世界了解到我国强大的智力储备,并赢得国际盛誉和尊重。

正如许多体育比赛项目一样,我国在国际数学奥林匹克中一直保持长盛不衰,靠的是这项比赛在我国的广泛基础、选拔体制与训练水平,正是有了这些,才使得中国的数学奥林匹克选手能够在国际大赛的竞争中,不断攀登高峰、创造记录。

目 录

第一部分 历届东南数奥试题

2004 年首届中国东南地区数学奥林匹克	1
2005 年第二届中国东南地区数学奥林匹克	3
2006 年第三届中国东南地区数学奥林匹克	5
2007 年第四届中国东南地区数学奥林匹克	7
2008 年第五届中国东南地区数学奥林匹克	9
2009 年第六届中国东南地区数学奥林匹克	11
2010 年第七届中国东南地区数学奥林匹克	13
2011 年第八届中国东南地区数学奥林匹克	15
2012 年第九届中国东南地区数学奥林匹克	17
2013 年第十届中国东南地区数学奥林匹克	19

第二部分 历届东南数奥试题解答

2004 年首届中国东南地区数学奥林匹克	21
2005 年第二届中国东南地区数学奥林匹克	25
2006 年第三届中国东南地区数学奥林匹克	29
2007 年第四届中国东南地区数学奥林匹克	33
2008 年第五届中国东南地区数学奥林匹克	37
2009 年第六届中国东南地区数学奥林匹克	41
2010 年第七届中国东南地区数学奥林匹克	45
2011 年第八届中国东南地区数学奥林匹克	50
2012 年第九届中国东南地区数学奥林匹克	55
2013 年第十届中国东南地区数学奥林匹克	59

第三部分 历届东南数奥赛前培训

东南数奥(2004—2013)冬令营赛前培训题选(代数部分)	65
东南数奥(2004—2013)冬令营赛前培训题选(几何部分)	91
东南数奥(2004—2013)冬令营赛前培训题选(数论部分)	117
东南数奥(2004—2013)冬令营赛前培训题选(组合部分)	153



第一部分 历届东南数奥试题

2004 年首届中国东南地区数学奥林匹克

第一天

(2004 年 7 月 10 日 8:00—12:00) 浙江 温州

1. 设实数 a, b, c 满足 $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = \frac{3}{2}$, 求证: $3^{-a} + 9^{-b} + 27^{-c} \geq 1$.

(李胜宏提供)

2. 设 D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的一点, 点 P 在线段 AD 上, 过点 D 作一直线分别与线段 AB, PB 交于点 M, E , 与线段 AC, PC 的延长线交于点 F, N . 如果 $DE = DF$, 求证: $DM = DN$.

(陶平生提供)

3. (1) 是否存在正整数的无穷数列 $\{a_n\}$, 使得对任意的正整数 n 都有 $a_{n+1}^2 \geq 2a_n a_{n+2}$.

(2) 是否存在正无理数的无穷数列 $\{a_n\}$, 使得对任意的正整数 n 都有 $a_{n+1}^2 \geq 2a_n a_{n+2}$.

(金荣生提供)

4. 给定大于 2004 的正整数 n , 将 $1, 2, 3, \dots, n^2$ 分别填入 $n \times n$ 棋盘(由 n 行 n 列方格构成)的方格中, 使每个方格恰好有一个数. 如果一个方格中填的数大于它所在行至少 2004 个方格内所填的数, 且大于它所在列至少 2004 个方格内所填的数, 则称这个方格为“优格”. 求棋盘中“优格”个数的最大值.

(冯跃峰提供)

第二天

(2004年7月11日8:00—12:00) 浙江 温州

5. 已知不等式 $\sqrt{2}(2a+3)\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{6}{\sin\theta+\cos\theta}-2\sin 2\theta < 3a+6$ 对于 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

(张鹏程提供)

6. 设点 D 为等腰 $\triangle ABC$ 的底边 BC 上一点, F 为过 A, D, C 三点的圆在 $\triangle ABC$ 内的弧上一点, 过 B, D, F 三点的圆与边 AB 交于点 E . 求证: $CD \cdot EF + DF \cdot AE = BD \cdot AF$.

(冷岗松提供)

7. n 支球队要举行主客场双循环比赛(每两支球队比赛两场, 各有一场主场比赛), 每支球队在一周(从周日到周六的七天)内可以进行多场客场比赛. 但如果某周内该球队有主场比赛, 在这一周内不能安排该球队的客场比赛. 如果 4 周内能够完成全部比赛, 求 n 的最大值.

注: A, B 两队在 A 方场地举行的比赛, 称为 A 的主场比赛, B 的客场比赛.

(袁宗沪提供)

8. 求满足 $\frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-u}{z+u} + \frac{u-x}{u+x} > 0$, 且 $1 \leq x, y, z, u \leq 10$ 的所有四元有序整数组 (x, y, z, u) 的个数.

(冷岗松提供)

2005 年第二届中国东南地区数学奥林匹克

第一天

(2005 年 7 月 10 日 8:00—12:00) 福建 福州

1. (1) 设 $a \in \mathbf{R}$, 求证: 抛物线 $y = x^2 + (a+2)x - 2a + 1$ 都经过一个定点, 且顶点都落在一条抛物线上.

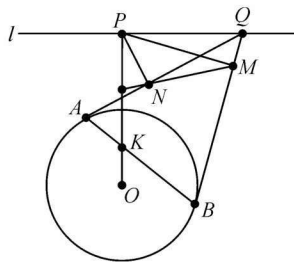
(2) 若关于 x 的方程 $x^2 + (a+2)x - 2a + 1 = 0$ 有两个不等的实根, 求其较大根的取值范围.

(吴伟朝提供)

2. 如图, 圆 O (圆心为 O) 与直线 l 相离, 作 $OP \perp l$, P 为垂足. 设点 Q 是 l 上任意一点 (不与点 P 重合), 过点 Q 作圆 O 的两条不同的切线 QA 和 QB , A 和 B 为切点, AB 与 OP 相交于点 K . 过点 P 作 $PM \perp QB$, $PN \perp QA$, M 和 N 为垂足.

求证: 直线 MN 平分线段 KP .

(裘宗沪提供)



3. 设 n 是正整数, 集合 $M = \{1, 2, \dots, 2n\}$. 求最小的正整数 k , 使得对于 M 的任何一个 k 元子集, 其中必有 4 个互不相同的元素之和等于 $4n+1$.

(张鹏程, 李迅提供)

4. 试求满足 $a^2 + b^2 + c^2 = 2005$, 且 $a \leq b \leq c$ 的所有三元正整数组 (a, b, c) .

(陶平生提供)

第二天

(2005年7月11日, 8:00—12:00) 福建 福州

5. 已知直线 l 与单位圆 S 相切于点 P , 点 A 与圆 S 在 l 的同侧, 且 A 到 l 的距离为 h ($h > 2$), 从点 A 作 S 的两条切线, 分别与 l 交于 B, C 两点. 求线段 PB 与线段 PC 的长度之乘积.

(冷岗松, 司林提供)

6. 将数集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 中所有元素的算术平均值记为 $P(A)$, $\left(P(A) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)$. 若 B 是 A 的非空子集, 且 $P(B) = P(A)$, 则称 B 是 A 的一个“均衡子集”.

试求数集 $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 的所有“均衡子集”的个数.

(陶平生提供)

7. (1) 讨论关于 x 的方程 $|x+1| + |x+2| + |x+3| = a$ 的根的个数.

(2) 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为等差数列, 且

$$\begin{aligned} |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| &= |a_1+1| + |a_2+1| + \dots + |a_n+1| \\ &= |a_1-2| + |a_2-2| + \dots + |a_n-2| = 507. \end{aligned}$$

求项数 n 的最大值.

(林常提供)

8. 设 $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$, 且 $\sin^3 \alpha + \sin^3 \beta + \sin^3 \gamma = 1$,

求证: $\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + \tan^2 \gamma \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(李胜宏提供)



2006 年第三届中国东南地区数学奥林匹克

第一天

(2006 年 7 月 27 日, 8:00—12:00) 江西 南昌

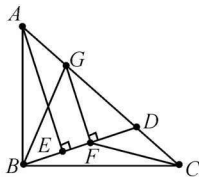
1. 设 $a > b > 0$, $f(x) = \frac{2(a+b)x + 2ab}{4x + a + b}$.

证明: 存在唯一的正数 x , 使得 $f(x) = \left(\frac{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}{2}\right)^3$.

(李胜宏提供)

2. 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, D, G 是边 CA 上的两点, 连接 BD, BG . 过点 A, G 分别作 BD 的垂线, 垂足分别为 E, F , 连接 CF . 若 $BE = EF$, 求证: $\angle ABG = \angle DFC$.

(熊斌提供)



3. 一副纸牌共 52 张, 其中“方块”、“梅花”、“红心”、“黑桃”每种花色的牌各 13 张, 标号依次是 2, 3, ..., 10, J, Q, K, A, 其中相同花色、相邻标号的两张牌称为“同花顺牌”, 并且 A 与 2 也算是顺牌 (即 A 可以当成 1 使用). 试确定, 从这副牌中取出 13 张牌, 使每种标号的牌都出现, 并且不含“同花顺牌”的取牌方法数.

(陶平生提供)

4. 对任意正整数 n , 设 a_n 是方程 $x^3 + \frac{x}{n} = 1$ 的实数根, 求证:

(1) $a_{n+1} > a_n$;

(2) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(i+1)^2 a_i} < a_n$.

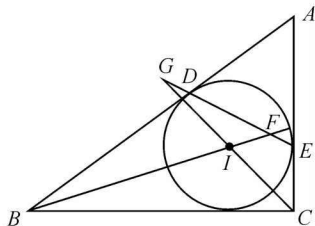
(李胜宏提供)

第二天

(2006年7月28日, 8:00—12:00) 江西 南昌

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $\triangle ABC$ 的内切圆 I 分别切边 AB, AC 于点 D, E , 直线 DE 分别与直线 BI, CI 相交于点 F, G , 证明: $FG = \frac{1}{2}BC$.

(张鹏程提供)



6. 求最小的实数 m , 使得对于满足 $a+b+c=1$ 的任意正实数 a, b, c , 都有 $m(a^3+b^3+c^3) \geq 6(a^2+b^2+c^2)+1$.

(熊斌提供)

7. (1) 求不定方程 $mn+nr+mr=2(m+n+r)$ 的正整数解 (m, n, r) 的组数.

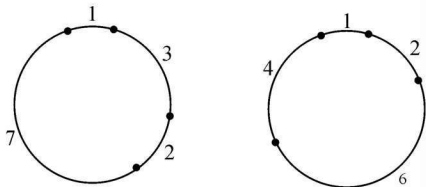
(2) 对于给定的整数 $k > 1$, 证明: 不定方程 $mn+nr+mr=k(m+n+r)$ 至少有 $3k+1$ 组正整数解 (m, n, r) .

(袁汉辉提供)

8. 对于周长为 $n (n \in \mathbf{N}^*)$ 的圆, 称满足如下条件的最小的正整数 P_n 为“圆剖分数”: 如果在圆周上有 P_n 个点 $A_1, A_2, \dots, A_{P_n}$, 对于 $1, 2, \dots, n-1$ 中的每一个整数 m , 都存在两个点 $A_i, A_j (1 \leq i, j \leq P_n)$, 以 A_i 和 A_j 为端点的一条弧长等于 m ; 圆周上每相邻两点间的弧长顺次构成的序列 $T_n = (a_1, a_2, \dots, a_{P_n})$ 称为“圆剖分序列”. 例如: 当 $n=13$ 时, 圆剖分数为 $P_{13}=4$, 如图所示, 图中所标数字为相邻两点之间的弧长, 圆剖分序列为 $T_{13} = (1, 3, 2, 7)$ 或 $(1, 2, 6, 4)$.

求 P_{21} 和 P_{31} , 并各给出一个相应的圆剖分序列.

(陶平生提供)



2007 年第四届中国东南地区数学奥林匹克

第一天

(2007 年 7 月 27 日, 8:00—12:00) 浙江 宁波镇海

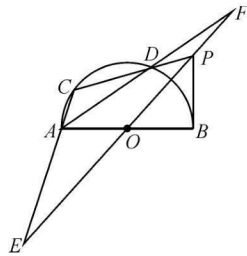
1. 试求实数 a 的个数, 使得对于每个 a , 关于 x 的三次方程 $x^3 = ax + a + 1$ 都有满足 $|x| < 1000$ 的偶数根.

(能斌提供)

2. 如图所示, 设 C, D 是以 O 为圆心、 AB 为直径的半圆上的任意两点, 过点 B 作 $\odot O$ 的切线交直线 CD 交于 P , 直线 PO 与直线 CA, AD 分别交于点 E, F .

证明: $OE = OF$.

(张鹏程提供)



3. 设 $a_i = \min \left\{ k + \frac{i}{k} \mid k \in \mathbf{N}^* \right\}$, 试求 $S_{n^2} = [a_1] + [a_2] + \cdots + [a_{n^2}]$ 的值. (其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数).

(张鹏程提供)

4. 试求最小的正整数 n , 使得对于满足条件 $\sum_{i=1}^n a_i = 2007$ 的任一个具有 n 项的正整数数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 其中必有连续的若干项之和等于 30.

(陶平生提供)

第二天

(2007年7月28日, 8:00—12:00) 浙江 宁波镇海

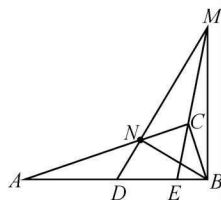
5. 设函数 $f(x)$ 满足: $f(x+1) - f(x) = 2x + 1 (x \in \mathbf{R})$, 且当 $x \in [0, 1]$ 时有 $|f(x)| \leq 1$.
证明: 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, 有 $|f(x)| \leq 2 + x^2$.

(金蒙伟提供)

6. 如图, 在直角三角形 ABC 中, D 是斜边 AB 的中点, $MB \perp AB$, MD 交 AC 于 N ; MC 的延长线交 AB 于 E .

证明: $\angle DBN = \angle BCE$.

(陶平生提供)



7. 试求满足下列条件的三元数组 (a, b, c) :

(i) $a < b < c < 100$, 且 a, b, c 为质数;(ii) $a+1, b+1, c+1$ 构成等比数列.

(陶平生提供)

8. 设正实数 a, b, c 满足: $abc = 1$, 求证: 对于整数 $k \geq 2$, 有

$$\frac{a^k}{a+b} + \frac{b^k}{b+c} + \frac{c^k}{c+a} \geq \frac{3}{2}.$$

(李胜宏提供)

2008 年第五届中国东南地区数学奥林匹克

第一天

(2008 年 7 月 27 日上午 8:00—12:00) 福建 龙岩

1. 已知集合 $S = \{1, 2, 3, \dots, 3n\}$, n 是正整数, T 是 S 的子集, 满足: 对任意的 $x, y, z \in T$ (其中 x, y, z 可以相同) 都有 $x + y + z \notin T$, 求所有这种集合 T 的元素个数的最大值.

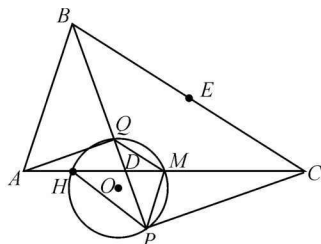
(李胜宏提供)

2. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + n \cdot (1 + 2^n), n = 1, 2, 3, \dots$. 试求通项 a_n 的表达式.

(吴伟朝提供)

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC > AB$, BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于 D , 如图, CP 垂直 BD , 垂足为 P , AQ 垂直 BP , Q 为垂足. M 是 AC 中点, E 是 BC 中点. 若 $\triangle PQM$ 的外接圆 O 与 AC 的另一个交点为 H . 求证: O, H, E, M 四点共圆.

(郑仲义提供)



4. 设正整数 $m, n \geq 2$, 对于任一个 n 元整数集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 取每一对不同的数 $a_i, a_j (j > i)$, 作差 $a_j - a_i$, 由这 C_n^2 个差按从小到大顺序排成的一个数列, 称为集合 A 的“衍生数列”, 记为 $\bar{A}$. 衍生数列 $\bar{A}$ 中能被 m 整除的数的个数记为 $\bar{A}(m)$.

证明: 对于任一正整数 $m \geq 2, n$ 元整数集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 及集合 $B = \{1, 2, \dots, n\}$ 所对应的“衍生数列” $\bar{A}$ 及 $\bar{B}$, 满足不等式 $\bar{A}(m) \geq \bar{B}(m)$.

(陶平生提供)

第二天

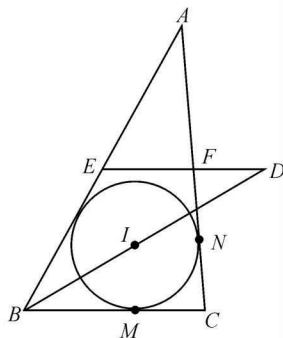
(2008年7月28日上午8:00—12:00)福建 龙岩

5. 求出最大的正实数 λ , 使得对于满足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的任何实数 x, y, z 成立不等式: $|\lambda xy + yz| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$.

(张正杰提供)

6. 如图, $\triangle ABC$ 的内切圆 I 分别切 BC, AC 于点 M, N , 点 E, F 分别为边 AB, AC 的中点, D 是直线 EF 与 BI 的交点. 证明: M, N, D 三点共线.

(张鹏程提供)

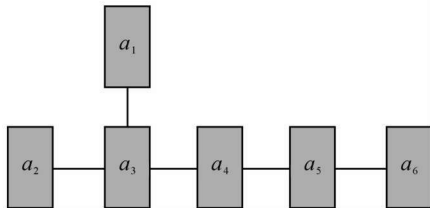


(第6题图)

7. 杰克(Jack)船长与他的海盗们掠夺到6个珍宝箱 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, 其中 A_i 内有金币 a_i 枚, $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$, 诸 a_i 互不相等. 海盗们设计了一种箱子的布局图(如下图), 并推派一人和船长轮流拿珍宝箱. 每次可任意拿走不和两个或两个以上的箱子相连的整个箱子. 如果船长最后所取得的金币不少于海盗们所取得的金币, 那么船长获胜.

问: 若船长先拿, 他是否有适当的取法保证获胜?

(孔文先提供)



(第7题图)

8. 设 n 为正整数, $f(n)$ 表示满足以下条件的 n 位数(称为波形数) $\overline{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 的个数:

(i) 每一位数码 $a_i \in \{1, 2, 3, 4\}$, 且 $a_i \neq a_{i+1}, i=1, 2, \dots$;

(ii) 当 $n \geq 3$ 时, $a_i - a_{i+1}$ 与 $a_{i+1} - a_{i+2}$ 的符号相反, $i=1, 2, \dots$.

(1) 求 $f(10)$ 的值;

(2) 确定 $f(2008)$ 被 13 除得的余数.

(陶平生提供)



2009 年第六届中国东南地区数学奥林匹克

第一天

(2009 年 7 月 28 日 上午 8:00—12:00) 江西 南昌

1. 试求满足方程 $x^2 - 2xy + 126y^2 = 2009$ 的所有整数对 (x, y) .

(张鹏程提供)

2. 在凸五边形 $ABCDE$ 中, 已知 $AB = DE$, $BC = EA$, $AB \neq EA$, 且 B, C, D, E 四点共圆.

证明: A, B, C, D 四点共圆的充分必要条件是 $AC = AD$.

(熊斌提供)

3. 设 $x, y, z \in \mathbf{R}^+$, $\sqrt{a} = x(y-z)^2$, $\sqrt{b} = y(z-x)^2$, $\sqrt{c} = z(x-y)^2$.

求证: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc + ca)$.

(唐立华提供)

4. 在一个圆周上给定十二个红点, 求 n 的最小值, 使得存在以红点为顶点的 n 个三角形, 满足: 以红点为端点的每条弦, 都是其中某个三角形的一条边.

(陶平生提供)