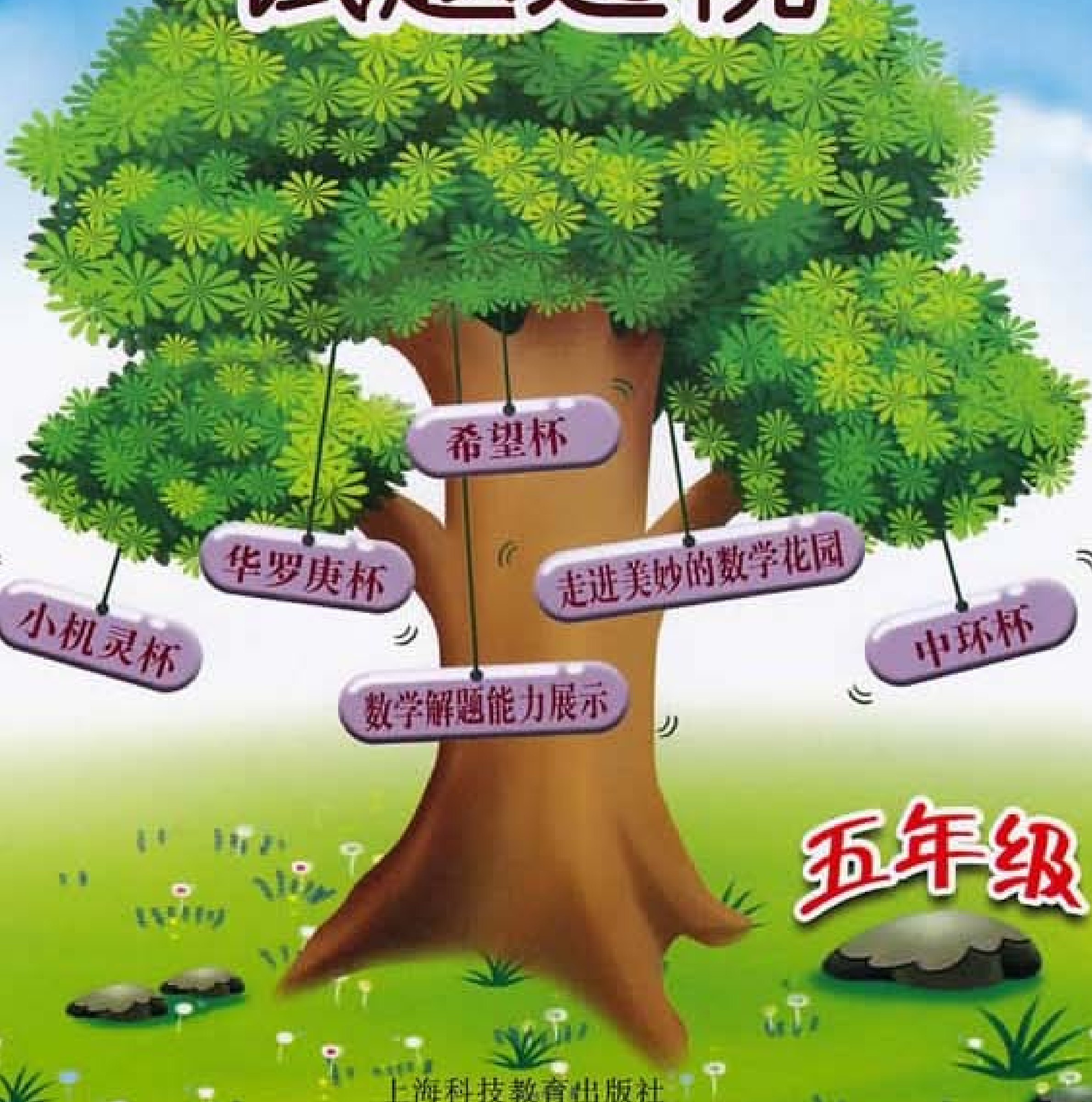
2011~2015

五年奥数

本书编写组 编

试题透视



五年级

上海科技教育出版社

五年奥数试题透视

（2015）

五 年 级

本书编写组　编

上海科技教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

五年奥数试题透视:2011～2015.五年级/《五年奥数试题透视》编写组编.—上海:上海科技教育出版社,2015.8

ISBN 978-7-5428-6309-6

Ⅰ.①五…　Ⅱ.①五…　Ⅲ.①小学数学课—题解
Ⅳ.①G624.505

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 183857 号

责任编辑　郑丽娟
封面设计　杨　静

五年奥数试题透视(2011～2015)
五年级
本书编写组　编

出版发行　上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 技 教 育 出 版 社
(上海市冠生园路 393 号　邮政编码 200235)
网　　址　www.sste.com　www.ewen.co
经　　销　各地新华书店
印　　刷　常熟华顺印刷有限公司
开　　本　787×1092　1/16
字　　数　461 000
印　　张　19
版　　次　2015 年 8 月第 1 版
印　　次　2015 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5428-6309-6/O·982
定　　价　38.00 元

目　　录

2015

2015 年奥数试题分类精析

一、速算与巧算

题 1

$0.\dot{1}\dot{8}\times0.\dot{8}\dot{1}+0.\dot{1}\dot{8}+0.\dot{8}\dot{1}=$________.

（第十三届“小机灵杯”初赛第 9 题）

解题思路

本题的考点是循环小数化分数.根据规则将循环小数变成分数即可.

解题过程

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{18}{99}\times\frac{81}{99}+\frac{18}{99}+\frac{81}{99}\\&=\frac{2}{11}\times\frac{9}{11}+\frac{2}{11}+\frac{9}{11}\\&=\frac{18+22+99}{121}=\frac{139}{121}.\end{aligned}$$

同类汇总

1-1-1 计算：$2015-7\times11\times13\times2=$________.

（第二十六届“亚太杯”初赛第 2 题）

1-1-2 计算：$60.45\times0.28-0.403\times37=$________.

（第十三届“走进美妙数学花园”初赛第 1 题）

1-1-3 计算：$20150308=101\times(100000+24877\times$________$)$.

（第十三届“走进美妙数学花园”决赛第 1 题）

1-1-4 计算：$3.75\times1.28\times12.5=$________.

（第二十六届“亚太杯”决赛第 1 题）

1-1-5 计算：$(10^4-9^4+8^4-7^4+\cdots+2^4-1^4)+(10^2+9^2+5\times8^2+5\times7^2+9\times6^2+9\times5^2+13\times4^2+13\times3^2)=$________.

（第十五届“中环杯”决赛第 9 题）

题 2

计算：$\frac{9\times11+31}{2015}\times\frac{31+6\frac{1}{5}+4\frac{3}{7}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}=$________.

（第十五届“中环杯”决赛第 1 题）

解题思路

可以先将带分数化为假分数，然后利用因式分解原理进行化简，同时将 2015 拆分成三个数相乘即可.

解题过程

$$原式=\frac{99+31}{2015}\times\frac{31+\frac{31}{5}+\frac{31}{7}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}$$

$$=\frac{130}{5\times13\times31}\times\frac{31\times\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}=2.$$

同类汇总

1-2-1 算式 $5\times\frac{(2014-12)\times20}{930-830}$ 的计算结果是________.

（2015“数学花园探秘”初赛第 1 题）

1-2-2 算式 $2015\frac{1999}{2015}\times\frac{1}{4}-\frac{2011}{2015}$ 的计算结果是________.

（2015“数学花园探秘”决赛第 4 题）

1-2-3 已知 $A=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}$，则 A 的整数部分是________.

（第二十六届“亚太杯”初赛第 16 题）

1-2-4 算式 $\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)\div\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$ 的计算结果是________.

（2015“数学花园探秘”决赛第 1 题）

1-2-5 已知 $\frac{2+4+6+8}{1+3+5+7}-\frac{1+3+5+7}{2+4+6+8}=\frac{m}{n}$，其中 m、n 是两个互质的正整数，则 $10m+n$ $=$________.

（第十五届“中环杯”初赛第 1 题）

1-2-6 计算：$\frac{(2015-201.5-20.15)}{2.015}=$________.

（第十三届“希望杯”第 1 试第 1 题）

1-2-7 从 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$ 中删去两个加数后使余下的四个加数之和恰好等于 1，那么，删去的两个加数分别是________和________.

（第十三届“小机灵杯”决赛第 1 题）

题 3

$a=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$，则在 a 与 b 中，较大的数是________.

（第二十六届“亚太杯”初赛第 8 题）

解题思路

利用作差法，比较 $a-b$ 的结果和 0 的大小.

解题过程

$$a-b=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{7}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}.$$

$\because$ $\frac{1}{6}-\frac{1}{7}>0$，$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}>0$，$\therefore$ $a-b>0$，$\therefore$ $a>b$.

同类汇总

1-3-1 将$\frac{2}{3}$、$\frac{5}{8}$、$\frac{15}{23}$、$\frac{10}{17}$按照从小到大顺序排列：________________.

（第十三届“走进美妙数学花园”决赛第 2 题）

题 4

“24 点游戏”是很多人熟悉的数学游戏，游戏过程如下：任意从 52 张扑克牌（不包括大、小王）中抽取 4 张，用这 4 张扑克牌上的数字（$A=1$，$J=11$，$Q=12$，$K=13$）通过加减乘除四则运算得出 24，最先找到算法者获胜. 游戏规定 4 张扑克牌都要用到，而且每张牌只能用 1 次，比如 2、3、4、Q 则可以由算法$(2\times Q)\times(4-3)$得到 24. 王亮在一次游戏中抽到了 4、4、7、7，经过思考，他发现$\left(4-\frac{4}{7}\right)\times7=24$. 我们将满足$\left(a-\frac{a}{b}\right)\times b=24$的牌组$\{a,a,b,b\}$称为“王亮牌组”，请再写出一组不同的“王亮牌组”________.

（第十三届“走进美妙数学花园”决赛第 5 题）

解题思路

从满足“王亮牌组”的式子入手，分析 a、b 应满足怎样的关系.

解题过程

因为$\left(a-\frac{a}{b}\right)\times b=ab-a=a(b-1)=24$，所以 24 能被 a 整除，所以 a 的可能取值为 1、2、3、4、6、8、12、24，对应的 b 的取值为 25、13、9、7、5、4、3、2. 又因为 a、b 的取值范围为 1 至 13，所以满足条件的“王亮牌组”有$\{2,2,13,13\}$、$\{3,3,9,9\}$、$\{4,4,7,7\}$（题目中已知条件）、$\{6,6,5,5\}$、$\{8,8,4,4\}$、$\{12,12,3,3\}$.

同类汇总

1-4-1 用四则运算符号及括号，对 10、10、4、2 这四个数进行四则运算，使所得结果是 24. 那么，这个四则运算的算式是________________________________.

（第十三届“小机灵杯”决赛第 2 题）

1-4-2　把四个数 8、8、8、10，用四则运算组成一个算式，使它的结果等于 24(可添加括号)．

（第二十六届“亚太杯”初赛第 10 题）

1-4-3　用加减乘除四则运算及添括号将 3、6、6、7、9 五个数列式计算得到 103(每个数都要用一次且只能用一次)：____________________．

（第二十六届“亚太杯”决赛第 15 题）

专题回顾　四则混合运算是竞赛中必定会出现的试题类型之一．一般来说包括基本题和灵活应用题两类．基本题主要是对学生基础知识的考察，而灵活应用题，就需要学生对已有的基础知识进行巧妙的应用，找到计算的简便方法．这些问题需要学生扎实地掌握计算方法，拥有强大的计算能力．

二、数与式

（一）质数与合数

题 1　两个质数的和是 60，则这两个质数的乘积最大值是________．

（第二十六届“亚太杯”决赛第 6 题）

解题思路　两个数的和一定，要求乘积最大，就需要这两个数越接近．因此，通过尝试法，可以求出这两个数．

解题过程　60＝30＋30，但 30 不是质数．

60＝29＋31，29 和 31 都是质数，29×31＝899，即这两个质数的乘积最大值是 899．

同类汇总

2-1-1　两位数 $\overline{ab}$ 和 $\overline{ba}$ 都是质数，则 $\overline{ab}$ 有________个．

（第十三届“希望杯”第 1 试第 13 题）

2-1-2　用 1、2、3、5、6、7、8、9 这 8 个数字最多可以组成________个质数(每个数字只能使用一次，且必须使用)．

（第十三届“希望杯”第 2 试第 3 题）

2-1-3　将 1 到 25 这 25 个数随意排成一行，然后将它们依次和 1、2、3、…、25 相减，并且都是大数减小数，则在这 25 个差中，偶数最多有________个．

（第十三届“希望杯”第 1 试第 4 题）

2-1-4　A、B、C 为 3 个小于 20 的质数，$A+B+C=30$，这三个质数是________．

（第二十六届“亚太杯”初赛第 11 题）

2-1-5　7 个连续的自然数，每个数都是合数，这 7 个连续的自然数的和最小是________．

（第十三届“走进美妙数学花园”初赛第 2 题）

2-1-6 像 2、3、5、7 这样只能被 1 和自身整除的大于 1 的自然数叫做质数或素数.将 2015 分拆成 100 个质数之和,要求其中最大的质数尽可能小,那么这个最大质数是________.

(第十三届"走进美妙数学花园"决赛第 3 题)

2-1-7 如果两个质数的差恰好是 2,则称这两个质数为一对孪生质数,例如:3 和 5 是一对孪生质数,29 和 31 也是一对孪生质数.在数论研究中,孪生质数是最热门的课题之一.华裔数学家张益唐在该课题的研究中取得了令人瞩目的成就,他的事迹激励着更多青年学子投身于数学研究.在不超过 100 的整数中,一共可以找到________对孪生质数.

(2015"数学花园探秘"网考第 1 题)

2-1-8 黑板上写着乘积 $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{2015}$,其中 a_1、a_2、…、a_{2015} 都是正整数.如果将其中的一个乘号改为加号(保持其余乘号),我们发现在所得的 2014 个和数中有 301 个是偶数,则在 a_1、a_2、…、a_{2015} 中至多有________个偶数.

(第二十六届"亚太杯"决赛第 28 题)

(二) 分解质因数

题 2 若 a、b、c、d 是互不相等的正整数,$a \times b \times c \times d = 357$,则 $a + b + c + d =$________.

(第十三届"小机灵杯"决赛第 4 题)

解题思路 利用质因数分解,将 357 化为 4 个正整数之积.

解题过程 因为 $357 = 3 \times 7 \times 17$,

所以把 357 拆成四个互不相同的正整数的乘积只能是 $357 = 1 \times 3 \times 7 \times 17$,

即 $\{a, b, c, d\} = \{1, 3, 7, 17\}$,则这四个数的和是 $1 + 3 + 7 + 17 = 28$.

同类汇总

2-2-1 质数就好像自然数的"建筑基石",每一个自然数都能写成若干个质数(可以有相同的)的乘积,比如 $4 = 2 \times 2$,$6 = 2 \times 3$,$8 = 2 \times 2 \times 2$,$9 = 3 \times 3$,$10 = 2 \times 5$ 等,那么,$5 \times 13 \times 31 - 2$ 写成这种形式为________.

(第十三届"走进美妙数学花园"决赛第 4 题)

2-2-2 已知 $2014 = (a^2 + b^2) \times (c^3 - d^3)$,其中 a、b、c、d 是四个正整数,请你写出满足条件的一个乘法算式:________.

(第十五届"中环杯"初赛第 3 题)

2-2-3 在所有正整数中,因数的和不超过 30 的共有________个.

(2015"数学花园探秘"网考第 5 题)

2-2-4 从 1~2015 这 2015 个自然数中,最多能找出________个数,使得这个数乘以 240 所得的乘积是一个完全平方数.

(第二十六届"亚太杯"初赛第 19 题)

2-2-5　数学小组原计划将 72 个苹果发给学生，每人发的苹果数量一样多，后来又有 6 人加入小组，这样每个学生比原计划少发了 1 个苹果.那么，原来有_________名学生.

（2015"数学花园探秘"初赛第 2 题）

2-2-6　一个自然数有 10 个不同的因数（即约数，指能够整除它的自然数），但质因数（即为质数的因数）只有 2 与 3.那么，这个自然数是________.

（第十三届"走进美妙数学花园"决赛第 11 题）

2-2-7　我们知道 2013、2014、2015 的因数个数相同，那么具有这样性质（因数的个数相同）的三个连续自然数 n、$n+1$、$n+2$ 中，n 的最小值为________.

（第十五届"中环杯"初赛第 8 题）

2-2-8　已知 a 和 b 的最大公约数是 4，a 与 c 及 b 与 c 的最小公倍数都是 100，而且 a 小于等于 b，则满足条件的有序自然数对 (a,b,c) 共有________组.

（第十三届"希望杯"第 1 试第 11 题）

2-2-9　A 和 B 是两个非零自然数，B 是 A 的 24 倍，B 的因数个数是 A 的 4 倍，那么 A 与 B 的和最小是________.

（2015"数学花园探秘"初赛第 5 题）

2-2-10　我们用 S_k 表示一个首项为 k，公差为 k^2 的等差数列，比如 S_3 为 3、12、21、….如果 306 是 S_k 中的一项，满足条件的 k 之和为________.

（第十五届"中环杯"决赛第 6 题）

（三）最值

题 3　将 572 个桃子分给若干个孩子，这些孩子得到的桃子数量是一些连续的正整数，则获得桃子数量最多的那个孩子最多可以得到几个桃子？

（第十五届"中环杯"初赛第 12 题）

解题思路　根据连续整数这一条件列方程求解.

解题过程　设第一个人拿到 $(x+1)$ 个桃子，最后一个人拿到 $(x+k)$ 个桃子.

$572=(x+1+x+k)\times k\div 2=(2x+k+1)\times k\div 2$，

即 $1144=(2x+k+1)k$，k 是 1144 的因数，$1144=11\times 13\times 2^3$.

要求获得桃子数量最多的孩子最多分几个，即求最大值，则人数要少，即 k 要小，从小往大枚举 k 为 2、4 时，不合题意.当 $k=8$ 时，$2x+9=143$，$x=67$，$x+k=75$，所以获得桃子数量最多的孩子最多分 75 个.

同类汇总

2-3-1　用 3、4、7、8 这 4 个数字组成两个两位数（每个数字只能使用一次，且必须使用），它们的乘积最大是________.

（第十三届"希望杯"第 2 试第 1 题）

2-3-2　字母 a、b、c、d、e、f、g 分别代表 1 至 7 中的一个数字，若 $a+b+c=c+d+e=c+$

$f+g$,则 c 可取的值有________个.

（第十三届“希望杯”第 1 试第 6 题）

2-3-3 有一个三位数,百位数字是最小的质数,十位数字是算式$(0.3+\pi\times13)$的结果中的小数点后第 1 位数字,个位数字是三位数中能被 17 整除的最小数的个位数字,则这个三位数是________(π 取 3.14).

（第十三届“希望杯”第 1 试第 8 题）

2-3-4 有一类数,它们既是 7 的倍数也是 5 的倍数,并且加上 9 是质数.这类数中最小的为________.

（第二十六届“亚太杯”初赛第 7 题）

2-3-5 8 个互不相同的非零自然数从小到大排成一排,前 3 个数的平均数为 9,8 个数的平均数为 19,后 3 个数的平均数为 29,那么第二大的数与第二小的数的差最大是________.

（第十三届“走进美妙数学花园”初赛第 11 题）

2-3-6 对任意正整数 m、n,定义 $r(m,n)$为 $m\div n$ 的余数(比如 $r(8,3)$表示 $8\div3$ 的余数,所以 $r(8,3)=2$).那么满足方程 $r(m,1)+r(m,2)+r(m,3)+\cdots+r(m,10)=4$ 的最小正整数解为________.

（第十五届“中环杯”决赛第 11 题）

2-3-7 一个五位数$\overline{ABCDE}$是 2014 的倍数,并且$\overline{CDE}$恰好有 16 个因数,则$\overline{ABCDE}$的最小值是________.

（第十五届“中环杯”初赛第 18 题）

（四）整除

题 4 以下四个数 1307674368000、1307674368500、1307674368200、1307674368010,只有一个恰为 1 至 15 这十五个整数的乘积,这个数是________.

（第十三届“小机灵杯”初赛第 8 题）

解题思路 本题是整除的综合应用,可以利用整数乘积的特点,分析 1 到 15 乘积结果的情况,然后进行选择.

解题过程 观察发现,上面的四个数只有末三位不同.在 15!中:含有 11 个 2、3 个 5,所以末尾必有 3 个 0,故这个数只能是 1307674368000.

同类汇总

2-4-1 一个三位数是 6 的整数倍,且个位数字与百位数字之和是十位数字的 2 倍,这样的三位数共有________个.

（第二十六届“亚太杯”初赛第 21 题）

2-4-2 至少出现一个数码 3,并且是 3 的倍数的五位数共有________个.

（第二十六届“亚太杯”初赛第 26 题）

2－4－3　已知六位数$\overline{\square 9786\square}$是 99 的整数倍，这个六位数除以 99 的商是________.

（第十三届“小机灵杯”初赛第 16 题）

2－4－4　有一个六位数$\overline{2015\square\square}$能被 66 整除，则这个六位数为________.

（第二十六届“亚太杯”决赛第 9 题）

2－4－5　某班级有男女生各 30 名，现在将他们排成一排，女生在前，男生在后，分别编为 1～60 号. 现在将男女生顺序打乱重新排队，30 位女生还是在前，按编号从小到大，奇数在前，偶数在后，如 1、3、5、…、29、2、4、…、28、30；男生按编号被 3 整除余 1 的 10 个数排在最前面，然后被 3 整除余 2 的 10 个数放在中间，被 3 整除的 10 个数放在最后，如 31、34、…、60. 现在数出夹在每两个编号相差为 30 的人中间的人数，共有 30 个数字，则所得到的 30 个数的和是________.

（2015 年第 26 届“亚太杯”决赛第 27 题）

2－4－6　从 1～9 中选出 5 个数字，组成 1 个五位数，要求这个五位数能被选中的 5 个数字的任何一个数字整除，却不能够被未选中的 4 个数字的任何一个数字整除，那么，这个五位数的最小值是________.

（第十三届“走进美妙数学花园”初赛第 14 题）

（五）周期

题 5　我国农历有用鼠、牛、虎、兔、龙、蛇、马、羊、猴、鸡、狗、猪，按顺序代表年份的习惯，即若今年是鼠年，明年就是牛年，后年就是虎年，以此类推. 现知道，1949 年是牛年，那么，到 2020 年是________年.

（第二十六届“亚太杯”决赛第 2 题）

解题思路　此题是周期问题，12 年一个周期，按余数数出即可.

解题过程　1949 年再过 2020－1949＝71 年到 2020 年，

71÷12＝5……11，牛年往后数 11 是鼠年，所以 2020 年是鼠年.

同类汇总

2－5－1　9 个 13 相乘，积的个位数字是________.

（第十三届“希望杯”第 1 试第 2 题）

2－5－2　循环小数 $0.0\dot{1}4285\dot{7}$ 的小数部分的前 2015 位数字之和是________.

（第十三届“希望杯”第 1 试第 9 题）

2－5－3　80 名学生面向老师站成一行，按老师口令从左至右顺序报数：1、2、3、…，报完后，老师让所报的数是 2 的倍数的同学向后转，接着又让所有报的数是 4 的倍数的同学向后转，接着报 8 的倍数向后转……报 64 的倍数向后转，现在背向老师的同学有________名.

（第十三届“走进美妙数学花园”初赛第 7 题）

2-5-4 算式：$1^{2015}+2^{2015}+3^{2015}+\cdots+2013^{2015}+2014^{2015}$，计算结果的个位数是________.

（第二十六届“亚太杯”初赛第 23 题）

（六）带余除法

题 6 我国南宋数学家杨辉在其《续古摘奇算法》上记载了这样一个问题：“二数余一，五数余二，七数余三，九数余四，问本数.”用现代语言表述就是：“有一个数用 2 除余 1，用 5 除余 2，用 7 除余 3，用 9 除余 4，问这个数是多少？”

请将满足条件的最小的自然数写在这里________.

（第十三届“走进美妙数学花园”决赛第 14 题）

解题思路与过程

方法一：

先考虑除以 5 余 2，除以 7 余 3，除以 9 余 4.

用剩余定理得 $5\times7\times5+5\times9\times1+7\times9\times4=472$，$[5,7,9]=315$，

故 $472\pm315k$ 都符合除以 5 余 2，除以 7 余 3，除以 9 余 4，

最小是 $472-315=157$，且也符合除以 2 余 1.

方法二：

除以 2 余 1 的数有：1，3，5，7，9，11，13，15，17，…；

除以 5 余 2 的数有：2，7，12，17，…；

除以 7 余 3 的数有：3，10，17，…；

所以满足“用 2 除余 1，用 5 除余 2，用 7 除余 3”的数的形式为 $[2,5,7]n+17=70n+17$（n 为自然数）.

此时只需要找一个最小的 n，满足除以 9 余 4 即可.

当 $n=2$ 时，满足除以 9 余 4，所以满足条件的最小的自然数为 $70\times2+17=157$.

同类汇总

2-6-1 如果自然数 a、b、c 除以 14 都余 5，则 $a+b+c$ 除以 14，得到的余数是________.

（第十三届“希望杯”第 1 试第 3 题）

2-6-2 有 158 个小朋友排成一排，从左边第一个人起（第一个人发一个苹果），每隔 1 人发一个苹果，又从右边第一个人起（第一个人发一个香蕉），每隔 2 人发一个香蕉，求没有得到水果的小朋友的人数.

（第十三届“希望杯”第 2 试第 16 题）

2-6-3 三位数$\overline{abc}$除以它的各位数字和的余数是 1，三位数$\overline{cba}$除以它的各位数字和的余数也是 1. 如果不同的字母代表不同的数字，且 $a>c$，那么$\overline{abc}=$________.

（2015“数学花园探秘”决赛第 11 题）

2-6-4 如果两个自然数的积被 9 除余 1，那么我们称这两个自然数互为“模 9 的倒数”. 比如，$2\times5=10$，被 9 除余 1，则 2 和 5 互为“模 9 的倒数”；$1\times1=1$，则 1 的“模 9 的倒数”是它自身. 显然，一个自然数如果存在“模 9 的倒数”，则它的倒数并不是唯一的，比如，10 就是 1 的另一个“模 9 的倒数”. 判断 1、2、3、4、5、6、7、8 是否有“模 9 的倒数”，并将存在

“模 9 的倒数”的数,以及它们相对应的最小的“模 9 的倒数”分别写出来__________.

（第十三届“走进美妙数学花园”决赛第 13 题）

（七）定义新运算

题 7 我们规定:$a@b=a\times(a+1)\times\cdots\times(a+b-1)$.已知 $x@y@2=420$,那么 $y@x=$________.

（第十三届“小机灵杯”初赛第 4 题）

解题思路 这题需要按照新运算的定义,将后面的算式展开计算即可.

解题过程 设 $x@y=m$,则 $m@2=420=m\times(m+1)$,解得 $m=20$.

即 $x@y=20=1\times20=4\times5$,所以 $x=20$,$y=1$ 或者 $x=4$,$y=2$.

$y@x=1@20=20!$ 或者 $y@x=2@4=2\times3\times4\times5=120$.

同类汇总

2-7-1　规定运算“$a☺b$”为$=a\times b-(a+b)$,请计算:$6☺(5☺4)=$________.

（第二十六届“亚太杯”初赛第 1 题）

2-7-2　定义 $n!=1\times2\times\cdots\times n$,比如 $5!=1\times2\times3\times4\times5$,若$\frac{n!\times(n+1)!}{2}$(其中 n 为正整数,且 $1\leqslant n\leqslant100$)是完全平方数,比如 $n=7$ 时,$\frac{n!\times(n+1)!}{2}=\frac{7!\times(7+1)!}{2}=\frac{7!\times8!}{2}=\frac{7!\times(7!\times8)}{2}=(7!)^2\times4=(7!)^2\times2^2$ 就是一个完全平方数,则所有满足条件的 n 的和为________.

（第十五届“中环杯”初赛第 13 题）

2-7-3　如果 $x*y=\frac{xy}{x+y}$,那么 $8*(8*8)=$________.

（第二十六届“亚太杯”决赛第 4 题）

（八）进位制的转换

题 8 两个七进制整数 454 与 5 的商的七进制表示为________.

（第十三届“小机灵杯”决赛组第 7 题）

解题思路 根据不同进制数转化为十进制数的规则就可以解决.

解题过程 $(454)_7=(4\times7^2+5\times7^1+4\times7^0)_{10}=235_{10}$,

$(5)_7=(5)_{10}$,

$(457)_7\div(5)_7=(235)_{10}\div(5)_{10}=(47)_{10}=(6\times7^1+5\times7^0)_{10}=(65)_7$.

同类汇总

2-8-1 计算：$1101_{(2)}\times101_{(2)}=$________$_{(2)}$.

（第二十六届"亚太杯"初赛第20题）

2-8-2 十进制中57改写成四进制为$(321)_4$，计算$(1003)_4+(1012)_4=($________$)_7$（结果用七进制表示）.

（第二十六届"亚太杯"初赛第7题）

专题回顾

数的整除问题，内容十分丰富，题型种类繁多，思维要求很高，是小学数学中非常重要的内容之一，同时也经常出现在各类数学竞赛中，内容包括：数的整除、质数、合数、质因数分解、最大公约数、最小公倍数等内容，丰富多彩．同时整除的应用也是各大竞赛热门的题型之一．

三、智解数字谜

题1

如图2015-1所示的算式中，最后的乘积为______.

（第十五届"中环杯"初赛第17题）

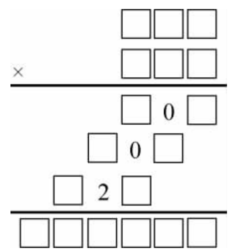


图 2015-1

解题思路

该题是典型的数字谜，分析得知□2□的首位一定是9，接下来再一一尝试．

解题过程

如图2015-2所示，乘积为100855.

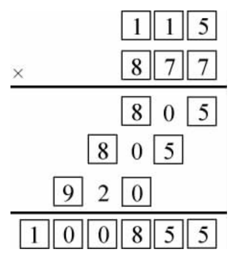


图 2015-2

同类汇总

3-1-1 下面算式中，不同的汉字代表不同的数字．如果$\overline{\text{二零一五}}=2015$，且两位数$\overline{\text{数学}}$是质数，那么四位数$\overline{\text{数学花园}}=$______.

$$\overline{\text{二零一五}}=\overline{\text{数学}}+\overline{\text{花园}}\times\text{探}\times\text{秘}$$

（2015"数学花园探秘"决赛第7题）

3-1-2 在如图2015-3所示的每个方框中填入一个数字，使得乘法竖式成立．那么，两个乘数的和是________.

（2015"数学花园探秘"初赛第3题）

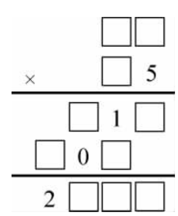


图 2015-3

3-1-3 $\overline{ab}$和$\overline{cde}$分别表示两位数和三位数，如果$\overline{ab}+\overline{cde}=1079$，则$a+b+c+d+e=$________.

（第十三届"希望杯"第1试第14题）

3-1-4 已知三位数$\overline{abc}$，并且$a(b+c)=33$，$b(a+c)=40$，则这个三位数

是________.

（第十三届"希望杯"第1试第15题）

3-1-5 有三个自然数，它们的和是2015，两两相加的和分别是$m+1$、$m+2011$和$m+2012$，则$m=$________.

（第十三届"希望杯"第2试第2题）

3-1-6 大于0的自然数n是3的倍数，$3n$是5的倍数，则n的最小值是________.

（第十三届"希望杯"第2试第7题）

3-1-7 今年是2015年，小明说："我现在的年龄正好与我出生那年年份的四个数字之和相同"，则小明现在________岁.

（第十三届"希望杯"第1试第20题）

题2 如果三位数m同时满足如下条件：①m的各位数字和是12；②$2m$还是一个三位数，且数字和是6，这样的三位数m共有________个.

（第十三届"小机灵杯"初赛第13题）

解题思路 该题考查了数的拆分和枚举法计数. 可以根据条件②将三位数的可能性缩小，并且列举，再根据其他条件进行解题.

解题过程 由$2m$仍为三位数且数字和为6，得$2m$为偶数，

可取600、510、420、402、330、312、240、222、204，

对应的m依次为300、255、210、201、165、156、120、111、102，

用m的数字和为12验证，只有255，165，156符合，共3个.

同类汇总

3-2-1 由1、2、3、4、5、6、7、8组成一个八位数，并且它们每个数位上的数各不相同，则可以被1111整除的八位数有________个.

（第二十六届"亚太杯"决赛第23题）

3-2-2 在正整数N的右端增加了两位数字，组成了一个新的数，这个数等于由1到N的所有正整数的和，则N是________.

（第二十六届"亚太杯"决赛第24题）

3-2-3 已知3个互不相同的自然数之和为55，其中每两个数之和是完全平方数，那么这三个自然数分别是________.

（第二十六届"亚太杯"初赛第25题）

3-2-4 将1至8填入方格中，使得数列□□、9、□□、□□、□□从第三项开始，每一项都等于前面两项的和，那么这个数列的所有项之和是________.

（2015"数学花园探秘"初赛第7题）

3-2-5 在一个两位数中间插入一个数字，变成一个三位数. 有些两位数中间插入某一个数字后变成的三位数是原来两位数的k倍（k为正整数），则k的最大值是________.

（第十三届"小机灵杯"初赛第17题）

3-2-6　将 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 分别填入下列的方格中，使得两个五位数的和为 99999，那么不同的加法算式共有________个（$a+b$ 与 $b+a$ 看作同一个算式）.

□□□□□+□□□□□=99999

（第十三届“小机灵杯”初赛第 19 题）

3-2-7　将五位数“12345”重复写 403 次组成一个 2015 位数：“123451234512345…”，从左往右，先删去这个数中所有位于奇数位上的数字，得到一个新数，再删去新数中所有位于奇数位上的数字：按上述规则一直删下去，直到剩下一个数字为止，则最后剩下的数字是________.

（第十三届“希望杯”第 2 试第 12 题）

题 3　在一组英文字母串中，第一个字母串 $a_1=A$，第二个字母串 $a_2=B$，之后每个字母串 $a_n(n\geqslant3)$ 都是由 a_{n-1} 后面跟着 a_{n-2} 的反转构成的. 比如 $a_3=a_2\overline{a_1}=BA$（我们用 $\overline{a_i}$ 表示 a_i 的反转，就是从右往左读这个字母串得到的结果，比如 $\overline{ABB}=BBA$、$\overline{AABA}=ABAA$），$a_4=a_3\overline{a_2}=BAB$，$a_5=a_4\overline{a_3}=BABAB$，$a_6=a_5\overline{a_4}=BABABBAB$. 那么，这组字母串的前 1000 个中，有________个是回文字母串.（所谓的回文字母串，就是指从左往右读与从右往左读相同，比如 ABA、$AABAA$.）

（第十五届“中环杯”决赛第 4 题）

解题思路与过程　可以根据回文字母串的定义，分析出哪些是，哪些不是. 通过尝试，我们发现只有 a_3、a_6、a_9、…、a_{999} 不是回文字母串，别的都是，那么可以直接得到答案：一共只有 333 个非回文字母串，剩下的 1000－333＝667（个）都是回文字母串.

接下来严格证明一下：

假设 $a_n=P$，$a_{n+1}=Q$，那么 $a_{n+2}=Q\overline{P}$，$a_{n+3}=Q\overline{P}\overline{Q}$. 由于在 $\overline{P}$ 两边 Q 与 $\overline{Q}$ 可以保证其回文特性，最后 a_{n+3} 是否为回文字母串就取决于 $\overline{P}$ 的情况. 如果 $a_n=P$ 为回文字母串，那么 $a_{n+3}=Q\overline{P}\overline{Q}$ 也是回文字母串；如果 $a_n=P$ 不是回文字母串，那么 $a_{n+3}=Q\overline{P}\overline{Q}$ 也不是回文字母串. 考虑到 a_1、a_2 都是回文字母串，所以 a_4、a_7、…、a_{1000} 与 a_5、a_8、…、a_{998} 都是回文字母串. 而 $a_3=BA$ 不是回文字母串，所以 a_3、a_6、a_9、…、a_{999} 不是回文字母串.

同类汇总

3-3-1　如果一个自然数的各位数字能够分成两组，使得每组中的数字之和相等，则称这个数为“均衡数”. 例如 25254 是“均衡数”，因为 5＋2＋2＝4＋5. 如果相邻的两个自然数都是“均衡数”，则称这对“均衡数”为“孪生均衡数”. 那么最小的一对“孪生均衡数”的和是________.

（2015“数学花园探秘”决赛第 9 题）

3-3-2　2025 的百位数字为 0，去掉 0 后是 225（仅去掉百位上的 0），225×9＝2025，这样的 4 位数称为“零巧数”. 那么请罗列出所有的“零巧数”：________.

（第二十六届“亚太杯”初赛第 29 题）

3-3-3　如果一个数的数字和与它 3 倍的数字和相同，却与它 2 倍的数字和不同，我们称