中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

高等數學簡明教程

上册

Н. С. МИХЕЛЬСОН 著

東北工學院數學教研組譯

商務印書館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

高等數學簡明教程

上　册

H. C. 米海里孫著
東北工學院數學教研組譯

商務印書館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

高等數學簡明教程

下 册

H. C. 米海里孫 著
東北工學院數學教研組譯

商 務 印 書 館

本書係根據蘇聯國營技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版米海里孫（Н. С. Михельсон）著"高等數學簡明教程"（Краткий курс высшей математики）1951年初版譯出的。原書經蘇聯高等教育部審定爲高等工業學校參考書。

參加本書翻譯工作的爲東北工學院數學教研組李凝華、高蘊光等同志。

高等數學簡明教程

上 册

東北工學院數學教研組譯

商務印書館出版

上海河南中路二一一號

中國圖書發行公司發行

商務印書館上海廠印刷

(50855A)

1953年5月初版　版面字數232,000

(第二次印)9,601—16,600　定價¥14,000

上海市書刊出版業營業許可證出〇二五號

本書係根據蘇聯國營技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版米海里孫（Н. С. Михельсон）著"高等數學簡明教程"（Краткий курс высшей математики）1951年初版譯出的。原書經蘇聯高等教育部審定爲高等工業學校參考書。

參加本書翻譯工作的爲東北工學院數學教研組童勤謨、李凝華、高藴光等同志。

高等數學簡明教程

下　冊

東北工學院數學教研組譯

商務印書館出版

上海河南中路二一一號

中國圖書發行公司總經售

商務印書館上海廠印刷

(50855 B)

1953年6月初版　版面字數 228,000

(10月第4次印) 21,001—26,000　定價 ¥ 14,000

上海市書刊出版業營業許可證出〇二五號

原　序

這本高等數學簡明教程是根據我的高等數學一般教程的第六版改編的。

改動和補充本書前一版的目的，是要使本書的材料能夠與蘇聯高等教育部的大綱所要求的一致。但是，考慮到要保持這個課本以前的特點，就是只介紹給讀者高等分析的基礎知識，我是依着大綱中對高等工業學校提出的要求，卽只須講授精簡的數學知識，來改編本書的。

在新版所作的改動和補充中，首先要指出的是加進了矢量代數的初步知識。我雖然敍述了這些知識作爲分析空間中直線與平面問題的前提，但我還是沒有發現將本篇材料以矢算論作基礎來研究的可能。我認爲在像本書這樣簡明的高等數學教程中，如果避開坐標法來敍述全部解析幾何的繁複知識，恐怕是一種冒失。但我又不能就這樣使矢量運算在後來得不到適當應用。因此我仍認爲有必要，在立體幾何中一方面繼續發揮以前所敍述的坐標法，同時又引用矢量形式來解決個別問題。這樣作法，我希望在採用矢算法來敍述時可能避免學生在開始時會感到困難的突然轉變，從而也就使學生能漸漸習慣於應用新形式來論述以前研究過的老問題。

定積分這一章也改編過了。在這章開始時，我加入了可以化爲積分和的極限的三個問題，以後，就一直把定積分當作這種和數的極限值來講述。當然在這個問題的討論中，我是不能達到完全的嚴密性的，但是我以爲經過這種方法的敍述後，積分的基本問題，將會大大地增加它的明晰性和目的性。

在本版中，我也加入關於二階和三階行列式的簡短知識。後來我

把這些知識應用到解析幾何這一篇中去了。本書也涉及了某種函數補正值的求法及線積分的初步概念。

本版中又加入了其他一些並非十分基本的問題。此外還應指出：在解析幾何問題的討論中，我比以前強調了投影理論的作用。至於其他方面，關於結構及敍述的方式，我仍保持着以前版本的特色。

米海里孫

中央人民政府高等教育部推薦高等學校教材試用本的說明

充分學習蘇聯的先進經驗，根據國家建設需要，設置專業，培養幹部，是全國高等學校院系調整後的一項重大工作。在我國高等學校裏，按照所設置的專業試用蘇聯教材，而不再使用以英美資產階級教育內容爲基礎的教材，是進一步改革教學內容和提高教學質量的正確方向。

一九五二年九月二十四日人民日報社論已經指出：'蘇聯各種專業的教學計劃和教材，基本上對我們是適用的。它是眞正科學的和密切聯系實際的。至於與中國實際結合的問題，則可在今後教學實踐中逐漸求得解決。'我們現在就是本着這種認識來組織人力，依照需要的緩急，有計劃地大量翻譯蘇聯高等學校的各科教材，並將繼續向全國推薦，作爲現階段我國高等學校教材的試用本。

我們希望：使用這一試用本及今後由我們繼續推薦的每一種試用本的教師和同學們，特別是各有關教研組的同志們，在教學過程中，對譯本的內容和譯文廣泛地認眞地提出修正意見，作爲該書再版時的參考。我們並希望各有關教研組在此基礎上逐步加以改進，使能結合中國實際，最後能編出完全適合我國需要的新教材來。

中央人民政府高等教育部

目　　錄

原序

引論……………………………………………………………… 1

第一章　行列式理論初步…………………………………………… 5

§1. 二階行列式　§2. 三階行列式　§3. 按照一行或一列的元素展開行列式　§4. 三元一次方程組的解　§5. 齊次一次方程組　§6. 習題

第二章　投影……………………………………………………………25

§7. 直線線段　§8. 兩直線間的夾角　§9. 點與線段在軸上的投影　§10. 線段投影定理　§11 折線的投影　§12. 點在平面上的投影　§13. 習題

第三章　坐標……………………………………………………………36

§14. 直角(笛卡兒)坐標　§15. 極坐標系　§16. 基本問題　§17. 習題

第四章　變量和函數……………………………………………………47

§18. 常量和變量　§19. 函數的一般概念　§20. 隱函數　§21. 顯函數的各種類型　§22. 圓函數　§23. 習題

第五章　一個自變量的函數的圖形和方程 $f(x,y)=0$ 的幾何意義……………………………………………………………57

§24. 函數 $y=f(x)$ 的圖形　§25. 方程 $f(x,y)=0$ 的幾何意義　§26. 依條件定曲線方程　§27. 坐標變換　§28. 習題

第六章　直線……………………………………………………………81

§29. 第一基本定理　§30. 係數 a 和 b 的幾何意義　§31. 第二基本定理(第一基本定理之逆)　§32. 線性函數的圖形舉例

第七章　關於直線的問題………………………………………………89

§33. 第一類問題　§34. 第二類問題　§35. 解直線問題的例　§36. 習題

第八章　橢圓 …………………………………………………………110

§37. 橢圓的方程　§38. 橢圓形狀的研究　§39. 橢圓的畫法　§40. 與橢圓有關的主要點和線　§41. 橢圓的直徑　§42. 橢圓的焦向徑與準線　§43. 以頂點為原點的橢圓方程　§44. 習題

第九章　雙曲線 ………………………………………………………123

§45. 雙曲線的方程　§46. 雙曲線形狀的研究　§47. 雙曲線的作圖　§48. 與雙曲線有關的主要點與線　§49. 雙曲線的直徑焦向徑以及以頂點為原

點的雙曲線方程　§50．雙曲線的漸近線　§51．漸近線的性質　§52．以漸近線爲坐標軸的等邊雙曲線　§53．雙曲線型的圖形及它們的應用　§54．習題

第十章　拋物線 ……………………………………………136

§55．拋物線的方程　§56．拋物線形狀的研究　§57．拋物線的畫法　§58．與拋物線有關的主要點和線　§59．拋物線的直徑　§60．拋物線方程的另一形式和拋物線型的曲線　§61．習題

第十一章　空間坐標 ……………………………………………145

§62．點的直角坐標　§63．基本問題　§64．習題

第十二章　矢量概念 ……………………………………………152

§65．基本關係　矢量的和與差　§66．矢量與數值的乘積　§67．矢量的標量積　§68．以矢量在坐標面上的投影表示矢量的標量積　§69．習題

第十三章　空間的平面與直線 ……………………………………161

§70．平面的方程　§71．空間直線的方程　§72．關於空間之平面和直線的基本問題　§73．例題　§74．習題

第十四章　空間曲面與曲線 ……………………………………188

§75．空間曲面與曲線的一般型　§76．幾個二次曲面的例　§77．柱面的幾個類型　§78．螺旋曲線　§79．習題

第十五章　極限理論初步 ……………………………………201

§80．變量的極限　§81．關於變量極限的基本定理　§82．變量極限存在的判定法　§83．當 $x\to 0$ 時 $\frac{\sin x}{x}$ 的極限和 e 的求法　§84．無窮小量　§85．等價無窮小量　§86．自變量的增量和函數的增量　§87．連續函數　§88．連續函數的性質　§89．代數方程的近似求根法　§90．習題

第十六章　函數的導函數和微分 ……………………………229

§91．微分學的基本問題及導函數的定義　§92．基本公式的推求　§93．函數的微分　§94．習題

第十七章　微分法的擴展 ……………………………………256

§95．高階導函數　§96．單變量函數的高階微分　§97．隱函數的微分法　§98．由參數所確定的函數　§99．由參數式所確定函數的微分　§100．習題

第十八章　函數性質和導函數性質的關係 ……………………270

§101．羅爾定理　§102．拉格朗奇公式(定理)　§103．函數的遞增與遞減　§104．一個自變量函數的極大值和極小值　§105．柯西公式　§106．決定兩個無窮小或兩個無窮大比值的極限的一般方法　§107．習題

目錄

第十九章　曲線的切線 ……………………………………303

§ 108. 導函數的幾何意義　§ 109. 曲線的切線和法線方程　§ 110. 拋物線的切線　§ 111. 橢圓的切線　§ 112. 弧的微分　§ 113. 習題

第二十章　微分法對於研究曲線性質的應用 ……………………316

§ 114. 曲線的凹向及拐點　§ 115. 曲線的曲率和曲率半徑　§ 116. 曲線的曲率中心　§ 117. 曲線的漸近線　§ 118. 由曲線方程研究其形狀　§ 119. 習題

第二十一章　原函數或不定積分 ……………………………339

§ 120. 不定積分的基本概念　§ 121. 函數積分的一般方法　§ 122. 幾個函數類型的積分　§ 123. 習題

第二十二章　定積分 ………………………………………368

§ 124. 可化為計算積分和的極限的一些問題　§ 125. 定積分的概念　§ 126. 定積分和不定積分之間的關係　§ 127. 定積分的性質　§ 128 習題

第二十三章　定積分在幾何和其他問題上的應用 ……………384

§ 129. 面積的計算　§ 130. 旋轉體體積的計算　§ 131. 弧長的計算　§ 132. 定積分在工程問題上的應用　§ 133. 廣義積分的概念　§ 134. 定積分的近似求值法　§ 135. 習題

第二十四章　無窮級數 ……………………………………422

§ 136. 一般基礎　§ 137. 級數收斂的判定法　§ 138. 交項級數收斂性的判定法　§ 139. 級數的絕對收斂和非絕對收斂　§ 140. 習題

第二十五章　戴勞、馬克勞林公式及其應用 ……………………437

§ 141. 有理整函數的戴勞公式　§ 142. 任意函數的戴勞公式　§ 143. e^x 之展為級數　§ 144. $\sin x$ 之展為級數　§ 145. $\cos x$ 之展為級數　§ 146. 歐拉公式　§ 147. $\ln(1+x)$ 之展為級數　§ 148. $(1+x)^m$ 之展為級數　§ 149. 冪級數　§ 150. 雙曲線函數　§ 151. 習題

第二十六章　多變量函數的微分 ……………………………459

§ 152. 多變量函數的一階偏導函數及全微分　§ 153. 多變量函數的高階偏導函數及全微分　§ 154. 複合多變量函數的導函數與微分　§ 155. 隱函數的一般公式　§ 156. 由全微分求原函數　§ 157. 習題

第二十七章　近似計算初步 ……………………………………475

§ 158. 絕對誤差與相對誤差　§ 159. 近似計算的例　§ 160. 第一類問題　§ 161. 第二類問題　§ 162. 習題

第二十八章　微分方程解法概論 ……………………………493

§ 163. 微分方程及其解之概念　§ 164. 一階微分方程　§ 165. 一階微分方程及其通積分之幾何意義　§ 166. 一階微分方程之不同形式　§ 167. 全微分方程　§ 168. 可分離變量的微分方程　§ 169. 線性方程　§ 170. 齊次微分方程　§ 171. 二階微分方程的幾種類型　§ 172. 二階線性微分方程　§ 173. 求無任意函數項的常係數線性微分方程的解　§ 174. 有任意函數項的線性微分方程的解法　§ 175. 參數變值法　§ 176. 習題

第二十九章　二重積分 ……………………………………………547

§ 177. 展佈在矩形上的二重積分　§ 178. 展佈在閉曲線所圍成的平面區域上的二重積分　§ 179. 體積的計算　§ 180. 平面圖形的力矩、重心和轉動慣量　§ 181. 習題

第三十章　線積分 …………………………………………………563

§ 182. 線積分爲和的極限　§ 183. 線積分的計算　§ 184. 線積分的性質　§ 185. 習題

第三十一章　內插法和它的應用 ……………………………574

§ 186. 內插法概論　§ 187. 拉格朗奇的內插公式　§ 188. 線性內插法　§ 189. 差分的概念　§ 190. 關於差分的簡單定理　§ 191. 應用差分作函數值的表　§ 192. 牛頓內插公式　§ 193. 牛頓公式應用於內插法　§ 194. 經驗公式　§ 195. 習題

高等數學簡明教程

引　論

對於每一個工作者,無論他是熟練的專家,或是普通的工人,在他所需要的各部門的知識中,就應用範圍的廣泛程度來說,『數學』佔有最重要的地位。宇宙間任何現象,要是從量的方面去研究,或者甚至從質的方面去研究,都不可避免地要牽涉到數學計算的,雖然有時也許只是最簡單的算術計算。

如果我們所研究的現象,其量的關係愈簡單,則爲它服務的數學顯然也愈簡單。

算術、初等幾何、代數和三角可以解決許多問題,這些問題都是牽涉到諸量之間的數值關係的。但是單靠這些初等數學,對於更複雜的關係,就無法再加以研究了。

高等數學的任務,就是在需要更完備的方法,而在初等數學不能爲力時,去深入研究量的關係。

正如在生產中一樣,工人爲了製造完整的成品,他們需要更完善的方法和更有效的工具。在任一種科學中,特別是在數學中,爲了深入的探討,我們也需要更完善的方法和更有效的工具。這種方法就是以解析幾何和微積分爲主要工具的高等數學。

一般說來,數學分析的來源,就是我們周圍的生活環境中具有一定數值關係的各種各樣現象。但是,產生高等數學的直接來源,可以說有兩個:第一個是關於變量的概念,第二個是關於變量極限的概念。沒有

第一個就沒有第二個,沒有第二個也就沒有高等數學。

關於變量的概念,當然並非只是在高等數學中所不可缺少,在代數、幾何、三角中也同樣已經知道有它。但是在初等數學的課目中,變量僅僅在個別場合下加以討論,而在高等數學中,變量是研究的基本對象,也是本科目的主要內容。

高等數學是在十七世紀中,由於數學分析的新方法發現而開端的。這些方法都是由為了要解決實際問題這個不斷增長的需要所引起的,而這些實際問題又是由當時的生活環境,即生產上一切可能形式的進步,對人類所提出的。

這些新的數學研究方法,都是很有力的,它們使大部分在那時不能解決的主要問題簡易的得到解決,它們的創始者是:笛卡兒(1696—1750),他創造了解析幾何的方法;牛頓(1642—1727)和萊伯尼慈(1646—1716),他們創造了微積分法。

從那時起,數學分析在使新的概念深刻化方面和在擴大新方法的應用範圍與獲得新的結果方面,都是非常迅速的發展。在這些工作中,俄國學者佔着顯著的地位,而且往往是居第一位。

在新的數學方法興起後不久,俄國由它的高等科學機構——彼得堡科學院成立的時候起(1725)就參加了發展這些方法的工作。從那時起,這個科學院就是而且現在還是世界上科學界一切成就的中心,當然也包括數學在內。

我們需要提出來的第一個人就是歐拉(1707—1783)。當他還是一個十九歲的青年的時候,他就到了彼得堡而且積極地參加科學院的科學工作。從那時起,他就完全將他自己的名字和科學院緊密地連在一起,並且把俄國當做了他的第二故鄉。這個偉大人物的名字,即使在最簡短的高等數學教程中,也不能不提起他來。在數學的領域內,他的領

導地位，是全世界所公認的。

數學思想的第二個巨匠就是喀山大學教授羅伯切夫斯基（1793—1856）。他敢於打破二千年的傳統，就是打破了以歐幾里得關於平行線的假設爲基礎的幾何的傳統，而創造了在邏輯上無可非難的新的幾何學。他是以經過一已知點對一已知直線可以引兩條平行線的假定來作根據。他的觀念得到了外國學者的響應，並促使他們向着這個新的方向繼續研究。

在那時的俄國數學家中，還要提起的，是彼得堡科學院院士奧斯特洛格拉得斯基（1801—1862）。除了他的許多重要工作外他的名字是與開始學高等數學時就知道的積分方法與積分中的著名公式分不開的。這些冠有他的名字的公式，不但在數學中而且在實用科學中都有廣泛的應用。

在俄國，作爲世界上第一個出色的並以她自己的科學著作而成名的女數學家是柯娃萊夫斯卡婭（1850—1891）。她的科學功績爲彼得堡科學院所承認；而且因爲她關於剛體轉動作了卓越的著作，科學院把她選爲通訊院士。

在世界科學史中留下不可磨滅的記憶的是科學院院士契伯舍夫（1821—1894）。他也是數學思想中的偉大代表者之一，他的巨大成就是與實際生活的需要相結合的。我們最好用他自己的話來說明他的偉大成就所規定的方向：『理論與實踐的靠攏，會得出最好的結果；而且不僅實踐因此而進步，即科學本身在實踐的影響下也向前發展了：實踐爲科學開闢了新的科目，給科學提出了完全新鮮的問題，因而也引起了要探求全新的科學方法的努力。』

契伯舍夫奠定了以他爲中心的俄國數學家的整個學派。這學派的數學家們繼續了他的工作，他們也是俄國數學科學的榮譽：高爾金、馬

耳柯夫、李亞邦諾夫、克雷洛夫等等。

在偉大的十月社會主義革命以後，數學的研究更有了廣大的規模。破天荒地創立了規模宏大的數學科學研究院。蘇聯的數學在世界的科學中佔着領導地位。優秀的蘇聯數學家們，他們勝利的發展着數學中的新方向，並且將這些新方向應用到社會主義建設的實踐中去。

第一章　行列式理論初步

§1. 二階行列式

設一已知二元一次方程組:

$$a_1x+b_1y=c_1,$$
$$a_2x+b_2y=c_2。\tag{1}$$

用已知初等代數的規則解之,便得到下面關於未知數的式子:

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}。\tag{2}$$

考察所得的公式,很容易看出上式分子和分母的形式是一樣的。分母可用下面的方法得到。

取乘積

$$a_1b_2。$$

交換上面乘積中文字的下標,再變更所得出的乘積的符號,便得

$$-a_2b_1。$$

將這兩個結果加起來,我們就得到(2)式中的分母。(2)式中的分子也是從同樣的方法由乘積

$$cb\quad 和\quad ac$$

所組成的。

一般的,由四個數

$$A_1,\quad B_1$$
$$A_2,\quad B_2,\tag{3}$$

組成的式子 $A_1B_2-A_2B_1$,叫做這些數所組成的行列式,記作下面的形式: