系统工程讲义

第四分册

系统模型引论

第一部分　有限图基础

周曼姝

中国科学院农业现代化研究会
全国农业系统工程研究会学习班　编印
湖南省系统工程学会农业系统工程研究会

一九八一年九月

前　言

近几十年，科学技术日新月异，突飞猛进，正在孕育着一场新的产业革命。反映在高等教育的课程上，知识陈旧率加快，新学科不断涌现，应接不暇。这就迫使人们进行思考：学科发展是否有规律可循？从历史上看，学科的分与合，总是向其对立面转化，“合久必分，分久必合”。当前，学科除了继续向精、深、细方向分化外；学科的综合无疑是个重要动向。如果只有分没有合，一万年后，学科就要泛滥成灾。从客观上看，综合的需要也是许多工程系统越来越大，技术复杂程度越来越高，综合的学科知识越来越多的必然结果。

系统工程是关于当代大型复杂系统实践的科学总结。采用模型对被开发系统进行预测和预演，可以减少盲目性，防止浪费大量人力、物力。即使已建成的系统，用模型进行合理运筹，有希望取得较好的经济效果。使得系统模型成为系统工程方法论的一个重要基础。

这本讲义是对学科综合的一个初步尝试。办法是“从特殊到一般”，先从具体工程系统出发，在各个不同学科模型之间寻找横的联系，从个性中引出共性。最后，试图建立较一般的系统模型原理。讲义的侧重点放在大系统结构模型和网络。

为了自满自足，本书分二个部分。第一部分是有限图基础，其内容与国外近年发展的“离散数学”、“组合数学”、“有限数学”相近，但不完全相同。搜集在第一部分中的有关数学，主要针对第二部分系统模型的需要，可作预备知识看待。全书贯穿一个想法：假定所研究的对象，系统是有限的。按照辩证法，宇宙就时间、空间而言是无限的；人们对真理的认识也是无止境的。但我们研究的客观系统，重点放在人工系统，对于每一实践过程，人们总是希望在有限的时间内，投入有限的人力、物力，完成所要追求的有限目标。这就是说：构成系统的单元尽管数量很大，却是有限的。因此数学部分很自然地侧重于有限集合、有限代数系、有限图；且内容中心围绕“代数系同构”，因为编者认为：系统模型论的实质，在于建立模型与原型（指客观真实世界）间的“同构”。

最后，本书得到汪浩、沙钲、殷洪义、荣明宗、周昭南、韩文艺等同志的许多帮助，表示感谢！

编者1981．7月14日

第一部分："有限图基础"目录

符 号 表

数集符号

R^1：实数集合

C：复数集合

Q：有理数集合

N：非负整数集合

Z：整数集合

Z^+：正整数集合

Z^-：负整数集合

Z_e：偶数集合

Z_o：奇数集合

简写符号

FS：Fuzzy set

FSS：Fuzzy Subset

FR：Fuzzy Relation

th：Theorem

def：Definition

Ch：Chapter

指标集合

$I = \{1, 2, \cdots, n\}$

$J = \{1, 2, \cdots, m\}$

$P = \{1, 2, \cdots, p\}$

$Q = \{1, 2, \cdots, q\}$

其他

$P \triangleq Q$：P定义等于Q

□：代表定理证毕

如无特别声明，＋、－、·、÷分别代表算术运算加、减、乘、除

逻辑符号规定

1．逻辑非（NOT）记做“$\neg$”

2．逻辑与（AND）记做“$\wedge$”

3．逻辑或（OR）记做“$\vee$”

设P、Q代表逻辑变量，则有下列真值表（0－1）

P	$\neg P$	Q	$P\wedge Q$	$P\vee Q$
T	F	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	T	F	F	F

表（0－1）$\neg$，$\wedge$，$\vee$的真值表

表中T：代表P取值为“真”TRUE

F：代表P取值为“假”FALSE

4．条件语句$P\Longrightarrow Q$读作：如有P，则得Q，或者P蕴涵Q。

$P\Longrightarrow Q$由下列真值表规定：

表（0－2）$P\Longrightarrow Q$的真值表

P	Q	$P\Longrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

5．双条件语句：$P\Longleftrightarrow Q$读作：P当且仅当Q

表（0－3）$P\Longleftrightarrow Q$的真值表

P	Q	$P\Longleftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

从4、5易见：

$(P\Longleftrightarrow Q)\Longleftrightarrow(P\Longrightarrow Q)\wedge(Q\Longrightarrow P)$

参见真值表（0－4）

P	Q	$P\Longrightarrow Q$	$Q\Longrightarrow P$	$(P\Longrightarrow Q)\wedge(Q\Longrightarrow P)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

表（0－4）　$(P\Longrightarrow Q)\wedge(Q\Longrightarrow P)$的真值表

6．量词：万有量词$\forall$：代表：全体，任意，每一个。

存在量词$\exists$：代表：总有，若干，至少有一个。

第一章　图论的集合论基础

§1　基本概念

首先介绍集合论的基本概念和记号，如重要概念：

“属于”和“包含”，然后介绍集合的全集，空集，幂集和集合的代数运算。

1—1 集合的基本概念

例如：

——8亿中国人民

——一双鞋子

——五朵鲜花

——包含在这本书中的全部概念

——一麻袋桔子

——一群鸡

以上例子均有集合相近的思想。

一般讲：一个集合是指具有某特定性质的事物的全体。

例如在数学中：

——实数集合

——直线集合

——三角形集合

但这种限制是不必要的。如用大写字母A代表集合，括号里的内容代表元素，则下列记法：

A＝{ 字母a，数5，张三，王老五 }

是允许的。但真正有用的集合，往往是具有某特定性质的事物。

集合的一个重要概念是：“属于”

属于某个集合的任意事物叫做该集合的成员（member）或元素。

一个集合公认为是有良好定义的，如果能够通过某些原则，找出集合的全体元素的话。

元素a属于集合A记做：$a \in A$

元素a不属于集合A记做：$a \notin A$

还有下列等价记法：

$a \notin A \Longleftrightarrow \neg(a \in A)$

以下三种不同记法均有良好定义的集合：

——列出集合的全体成员，如：

$A = \{ a、b、c \}$。

当列出元素不太方便时又有：

——用谓语来表征一个集合，例如：

$B=\{x \mid 1\leq x\leq 2\}=\{x \mid P(x)\}$

这里谓语$P(x)$用来定义集合的全体成员。

——用已出现的成员指明未出现的成员，如：

$E=\{1、3、5、\cdots\cdots\}$代表正奇数集合。

集合的成员无限时叫作无限集合；

集合的成员有限时，叫作有限集合，符号$|A|$代表集合的基数（*Cardinality*）或叫势。对有限集，基数等于集合的成员个数。例如$A=\{a, b, c\}$，则$|A|=3$。

还允许成员本身就是集合，例如：

$S=\{a, \{1、2\}, P、\{b\}\}$

但应严格分清$b\in\{b\}$，$\{b\}\in S$，$b\in S$就错了！

1—2 集合的包含与相等

定义1—2.1：设A、B为二任意集合，则说A是B的子集合，如果A的任一成员，必为B的成员。记做$A\subseteq B$，或说A被包含于B或B包含A。写成式子则有：

$\forall x\in A\Longrightarrow x\in B$

反之$\exists y\in B\Longrightarrow$不一定$y\in A$

十分重要的是：要区分"属于"与"包含"之间的差别。

例如：$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{1, 2\}$，$C=\{1, 3\}$，$D=\{3\}$

则$B\subseteq A$，$C\subseteq A$，$D\subseteq A$

$1\in\{1, 2, 3\}$，$1\nsubseteq\{1, 2, 3\}$，但$\{1\}\subseteq\{1, 2, 3\}$

因此，元素只能属于集合，子集合可以被包含于集合。又如：

$A=\{\{1\}, 2, 3\}$，则$\{1\}\in A$，$\{\{1\}, 2\}\subseteq A$，$2\in A$，

$\{2, 3\}\subseteq A$

定义1—2.2 二个集合A和B称为相等，如果满足：

$A=B\Longleftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$

对于集合的相等还有下列性质：

$\{1, 2, 2, 4\}=\{1, 2, 4\}$，重复的元素没有意义。

$\{1, 2, 4\}=\{4, 2, 1\}$，排列先后没有意义。

同一集合的不同表达形式当然相等，如

$A=\{x \mid x(x-1)=0\}$；$B=\{0, 1\}$，则$A=B$

以下的例子不能算相等：设：

$P=\{\{1, 2\}, 4\}$，$Q=\{1, 2, 4\}$ 则$P\neq Q$

$\{\{1\}\}\neq\{1\}$，因$\{1\}\in\{\{1\}\}$

从集合相等的定义显然有：

$A=A$

$A=B\Longleftrightarrow B=A$

定义1—2.3：一个集合A称为B的真子集，並记做$A\subset B$，如满足：

$A\subset B\Longleftrightarrow A\subseteq B\wedge A\neq B$

从定义，立即有：

$\forall x\in A\Longrightarrow x\in B$

反之，$\exists y\in B\Longrightarrow y\notin A$

1—3 若干特殊集合

定义1—3.1：一集合叫做全集（*Universal* Set），如果它是论域中的全体元素组成的话，全集的记号为U，U满足：

$U=\{x|P(x)\vee\neg P(x)\}$

从定义可知：设A为论域中的任意集合，则有：

$\forall x\in A\Longrightarrow x\in U$

$\forall y\notin A\Longrightarrow y\in U$

定义1—3.2：一个集合，並不含有任何元素叫作空集，记做ϕ，用式子表达如下：

$\phi=\{x|P(x)\wedge\neg P(x)\}$

定义1—3.3幂集：设A为任意有限集合，则包含A和ϕ在内的A的全部子集族叫幂集，记做$\rho(A)$，下面举基数为1、2、3的集合的幂集。

$S_1=\{a\}$，$\rho(S_1)=\{\phi,\{a\}\}=\{\phi,S_1\}$

$S_2=\{a,b\}$，$\rho(S_2)=\{\phi,\{a\},\{b\},S_2\}$

$S_3=\{a,b,c\}$，$\rho(S_3)=\{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},S_3\}$

显然有

$|\rho(S_n)|=2^n$

1—4 集合的代数运算

定义1—4.1任意集合A、B的交集记做$A\cap B$

$A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$

从定义，立即有：

$A\cap B=B\cap A$，$A\cap A=A$，$A\cap\phi=\phi$

推广为n个集A_1、A_2、……、A_n的交集，记做：

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cdots\cap A_n$$

定义1—4.2任意二个集合A、B是不相交的，如满足：$A\cap B=\phi$

从定义可知，A与B不相交，也就是A和B没有公共元素，即A和B的元素均互异。

定义1—4.3任意二个集合A和B的並集，记做$A\cup B$並满足：

$A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$

定义1—4.4设A、B为任意集合，则B相对A的相对余集

定义为$A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$

例如：$A=\{a、b、c\}$，$B=\{c,d,e\}$

则：$A-B=\{a,b\}$，即A中把A、B的公共元素除去。

定义1—4.5设U为全集，A为任意集合，则A相对U的相对余集叫绝对余集，记做$\sim A=U-A$，$\sim A$满足：

$\sim A = U - A = \{ x | x \in U \wedge x \notin A \}$

例：设论域是整数集合Z，即$U = Z$

令$N = \{0\} \cup Z^+$

则$\sim N = U - N = Z^-$，从定义显然有：

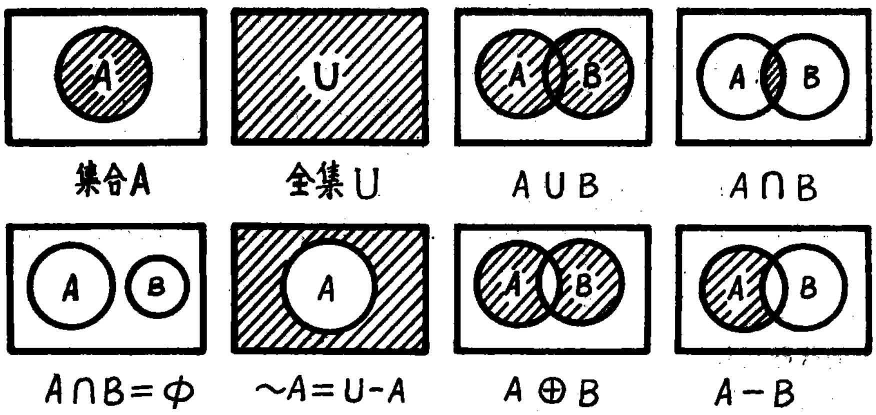
$\sim(\sim A) = A$，$\sim \phi = U$，$\sim U = \phi$，$A \cup \sim A = U$，$A \cap \sim A = \phi$

定义1—4.6：设A、B为任意集合，则A与B的环加记做$A \oplus B$。满足：

$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

用Venn图说明上述概念，比较直观，並示于图（1—1）。

图（1—1）Venn图



下面列出集合论中常用的许多等式，同时列出逻辑代数对应的等式，可见这二者互相对应。

表（1—1）集合代数与逻辑代数等式：

集合代数	逻辑代数	公式编号
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	幂等律（Idempotent） $P \vee P \Leftrightarrow P$ $P \wedge P \Leftrightarrow P$	（1—1）
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	结合律 $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	（1—2）
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	交换律 $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	（1—3）
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	分配律 $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	（1—4）

续表（1—1）集合代数与逻辑代数等式：

$A\cap\phi=\phi$ $A\cup\phi=A$	$\left.\begin{matrix}P\wedge F\Leftrightarrow F\\P\vee F\Leftrightarrow P\end{matrix}\right\}$	（1—5）
$A\cap U=A$ $A\cup U=U$	$\left.\begin{matrix}P\wedge T\Leftrightarrow P\\P\vee T\Leftrightarrow T\end{matrix}\right\}$	（1—6）
$A\cup\sim A=U$ $A\cap\sim A=\phi$	$\left.\begin{matrix}P\vee\neg P\Leftrightarrow T\\P\wedge\neg P\Leftrightarrow F\end{matrix}\right\}$	（1—7）
$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	吸收律 $\left.\begin{matrix}P\vee(P\wedge Q)\Leftrightarrow P\\P\wedge(P\vee Q)\Leftrightarrow P\end{matrix}\right\}$	（1—8）
$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$ $\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$	De Morgan's Laws $\left.\begin{matrix}\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q\\\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q\end{matrix}\right\}$	（1—9）
$\sim\phi=U$ $\sim U=\phi$	$\left.\begin{matrix}\neg F\Leftrightarrow T\\\neg T\Leftrightarrow F\end{matrix}\right\}$	（1—10）
$\sim(\sim A)=A$	$\neg\neg P\Leftrightarrow P$	（1—11）

§2　二元关系

2—1　　有序元素的集合

定义2—1.1对任意正整数n，一个有序的n—元素组是由n个分量 $a_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ 的有序排列，记做（a_1，a_2，……，a_n）。二个有序n—元素组的相等：

$(a_1、a_2\cdots\cdots,a_n)=(b_1、b_2\cdots\cdots、b_n)\Leftrightarrow a_i=b_i\ (i=1、2\cdots\cdots、n)$

当n＝2，（a_1，a_2）叫作序偶

n＝3，（a_1，a_2，a_3）叫作序－3

n＝n，（a_1，a_2……，a_n）叫作序－n

集合的关系是建立在序n一元素组基础上的，最重要的是序偶。从定义，序偶是一对有序排列的元素组，序偶与二元素的集合不同，集合中元素的先后次序排列是无关的，而序偶则先后次序排列很重要！

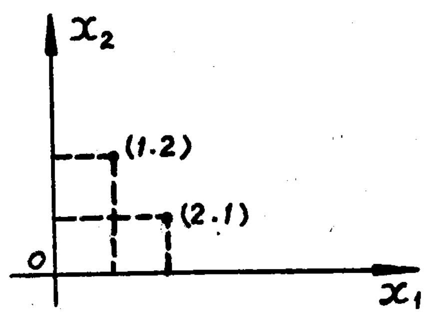
例—1｛a、b｝＝｛b、a｝；（a、b）≠（b、a）

｛a、a｝＝｛a｝；（a、a）≠（a）

例—2在二维笛卡尔坐标平面上的点，可以用序偶代表：

显然（1，2）≠（2，1）因为这是平面上不同的点。

参见图（1—2）。



图（1—2）

卡的逊（Cartesian）积（或叫序积）：

定义2—1.2设A_1，A_2，……，An为n个任意集合，则集合A_1到An的序积记做：

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots\cdots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \cdots a_i \cdots, a_n) \mid a_i \in A_i \ (i=1, 2, \cdots\cdots, n) \}$$

从定义，有以下几种情况：

——如果论域为A_1，A_2，……A_n，则

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i = U = \{ (a_1, a_2 \cdots a_i \cdots a_n) \mid a_i \in A_i \ (i=1, 2, \cdots\cdots, n) \}$$

就是第1节介绍的全集U，这里全集的元素是序n-元组。

——当$A_1 = A_2 = \cdots\cdots = An$时

则 $\mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i = A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots\cdots\cdots\cdots \times A}_{n} = U$

就说：全集U是A上的n一序积

——显然，当n＝2，3时，对应的序积分别为：

序偶全集$A_1 \times A_2 = U$

序—3全集$A_1 \times A_2 \times A_3 = U$

例—3：$A = \{1, 2\}$，$B = \{m, n\}$，$C = \{O\}$，$D = \phi$，则有：

——$A \times B = \{(1, m), (1, n), (2, m), (2, n)\}$

$B \times A = \{(m, 1), (m, 2), (n, 1), (n, 2)\}$，因此

$A \times B \neq B \times A$，即序积不满足交换律

——$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

——$A \times B \times C = \{(1, m, O), (1, n, O), (2, m, O), (2, n, O)\}$

——$A \times D = D \times A = \phi$

——A，$B \subset R^1$：R^1为实数集合

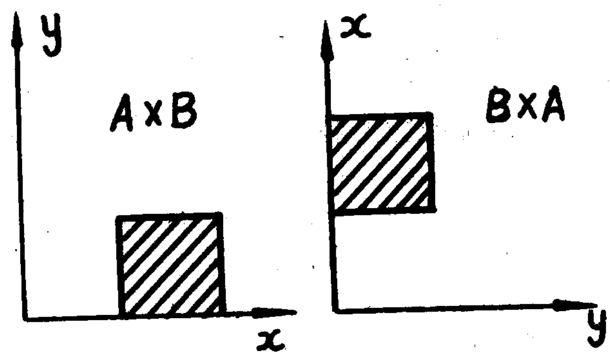
令$A = \{ x \mid x \in R^1 \wedge 1 \leqslant x \leqslant 2 \}$

$B = \{ y \mid y \in R^1 \wedge 0 \leqslant y \leqslant 1 \}$

则得：

$A \times B = \{ (x, y) \mid x, y \in R^1 \wedge 1 \leqslant x \leqslant 2 \wedge 0 \leqslant y \leqslant 1 \}$

$B \times A = \{ (y, x) \mid x, y \in R^1 \wedge 1 \leqslant x \leqslant 2 \wedge 0 \leqslant y \leqslant 1 \}$



图（1—3）

显然$A \times B \neq B \times A$，参见图（1—3）

从例中可以形象地理解序积就是有序元素组的全集U。

因为$U=\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} A_i$ 历遍了论域中集合的所有元素，因此任意序—n元组的集合：

$S=\{\langle a_1,a_2,\cdots a_i,\cdots,a_n\rangle | a_i\in A_i(i=1, 2, \cdots\cdots n)\}\Longrightarrow S\subseteq U$

2—2关系与二元关系

直观地讲，关系的例子是非常普遍的，例如

社会关系中：有同志关系，上下级关系，亲戚关系。

家庭关系中有：父子、母子、夫妻、兄弟、姊妹关系等等。

数学上有：数与数间的：大于、等于、小于关系；

三角形的相似关系；

空间直线的平行关系等等。

物理学中的：电流、电压；水流、水压；热流、温度关系等等，不胜枚举，集合论的关系就是这些具体关系的一般性抽象。

定义2—2.1设A_1、A_2……A_n为n个任意集合，则序积$\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} A_i$的一个子集合R叫作n—元关系，记做 $R\subseteq\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} A_i$

如果$\exists A_i$（$i=1, 2, \cdots\cdots, n$）$=\phi$，则$R=\phi$叫空关系集

如果$\forall A_i(i=1, 2, \cdots\cdots, n)\neq\phi$，则 $R=\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} A_i$叫全关系集

如果$A_i=A$（$i=1, 2, \cdots\cdots, n$），则$R\subseteq\underbrace{A\times A\cdots\cdots\cdots\times A}_{n}$叫作A上的n—元关系集，特别，当$n=1, 2, 3$，则

对应的关系，分别叫作一元关系，二元关系，三元关系。

应用中，最重要的是二元关系，因此约定，在没有特别的声明时，“关系”就是指的二元关系。

二元关系R指：

$R\subseteq A_1\times A_2$，序偶集合$A_1\times A_2=U$，就是全关系集。还可以将二元关系，单独定义如下：

定义2—2.2设A、B为任意集合，则二元关系R是序积A×B的子集合，记做 $R\subseteq A\times B$，並有以下记法：

$\exists x\subset A\wedge\exists y\in B$，$\langle x, y\rangle\in R\Longleftrightarrow xRy$

读作：x与y有关系

反之$\langle x, y\rangle\notin R\Longleftrightarrow x\,\bar{R}\,y=\neg(xRy)$

读作：x和y没有关系。

例—1：设A，$B\subset R^1$，则实数间的“大于>”就是关系R

因此$>=\{\langle x, y\rangle | \exists x, y\in R^1\wedge x>y\}$

设$A=\{1, 2, 3\}\subset Z^+$，　则：

$>(R)=\{\langle 3, 2\rangle\langle 3, 1\rangle\langle 2, 1\rangle\}\subset A\times A=U$

例一2：设$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\subset Z^+$，A上的平方关系记做Q

则$Q=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 9\rangle\}\subset A\times A=U$，

若$A=R^1$，则平方关系写成：

$Q=\{\langle x, x^2\rangle|x\in R^1\}\subset R^1\times R^1=U$。

定义2—2.3设R为任意从集合X到Y的关系，则任意序偶中头一个元素的集合记做D(R)，D(R)叫作关系R的定义域，並满足：

$D(R)=\{x|\forall(x, y)\in R\}$

同理$\forall(x, y)\in R$，其中第二元素的集合，记做CD(R)，CD(R)叫做关系R的反域或值域，並满足：

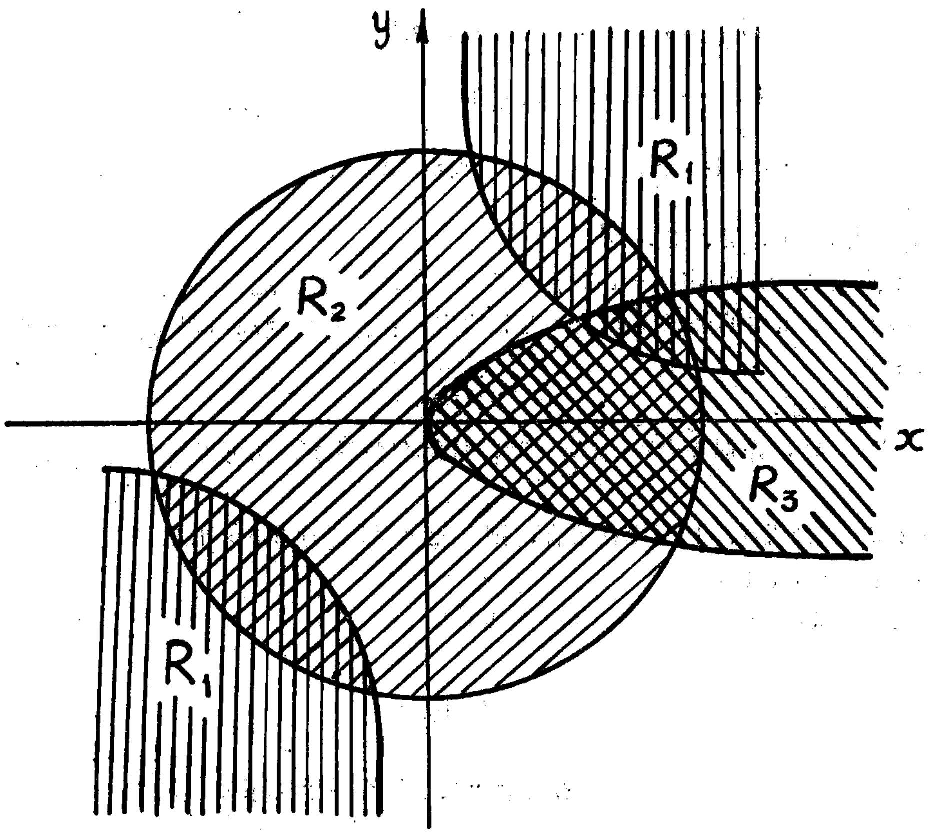
$CD(R)=\{y|\forall(x, y)\in R\}$

例一3，上例一2中，$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$Q=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 9\rangle\}$

则$D(Q)=\{1, 2, 3\}$，　显然有：$D(Q)\subseteq A$

$CD(Q)=\{1, 4, 9\}$，　$CD(Q)\subseteq A$



图(1—4)

例 4　设R^1为实数集合，则$R^2=R^1\times R^1$为序积，则R^2的全体元素形成二维笛卡尔平面的全体点集，它的某些子集可以定义许多二元关系如下：

$R_1=\{(x, y)\mid(x, y)\in R^1\times R^1\wedge x\cdot y\geqslant 1\}\quad\subset R^1\times R^1=R^2$

$R_2=\{(x, y)\mid(x, y)\in R^1\times R^1\wedge x^2+y^2\leqslant 9\}\quad\subset R^1\times R^1=R^2$

$R_3=\{(x, y)\mid(x, y)\in R^1\times R^1\wedge y^2<x\}\quad\subset R^1\times R^1=R^2$

画成图形如图（1—4）。

R_1：代表双曲线上和线外的点

R_2：代表半径为3的园上和园内的点

R_4代表抛物线内的点

2—3　关系图与关系矩阵

二元关系与数学的分支图论有密切的关系。可以说：二元关系是图论的集合论基础；而图论是二元关系集的图形表示。下面将从集合论角度引出图的定义，用图的形象表示来说明集合论中的二元关系。

有向图与无向图

先从例子说起。设有限点集$V=\{v^1、v^2、v^3、v^4\}$，而且在这些点之间存在一个连接关系。

$R\subseteq V\times V=U$　　并令

$R=\{\langle v^1, v^2\rangle, \langle v^2, v^2\rangle, \langle v^2, v^3\rangle, \langle v^2, v^4\rangle, \langle v^1, v^3\rangle\}$

序偶$(x, y)\in R\Longleftrightarrow xRy$代表二点之间用一条线加以连接，并用箭头代表头一个元素指向第二个元素，如图（1—5）。

图（1—5）有向枝

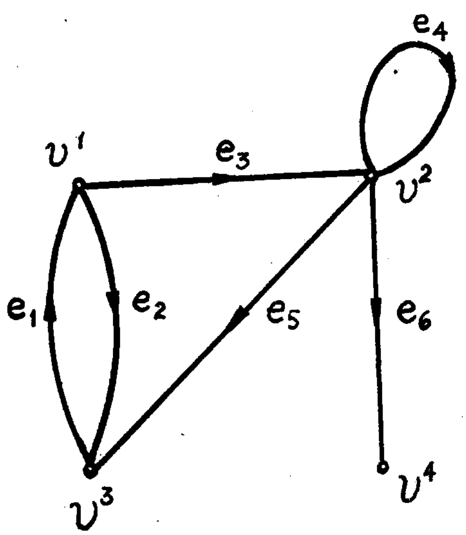
这样就构成了一个有向图，记作：

$G=(V, E)$，这里$E=R\subseteq V\times V$，E叫作线（或枝）的集合，图G示于图（1—6）。

图中$e_4=\langle v^2、v^2\rangle$叫自迴路。

$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

$=\{\langle v^3, v^1\rangle, \langle v^1, v^3\rangle, \langle v^1, v^2\rangle, \langle v^2, v^2\rangle, \langle v^2, v^3\rangle, \langle v^2, v^4\rangle\}=R$



图（1—6）有向图

$G=(V、E)$

图中，e_1，e_2分别用不同枝代表，也就是$\langle v^3, v^1\rangle\neq\langle v^1, v^3\rangle$，这类图叫做有向图，并简称为d—图。但当

$(v^i, v^j)=\langle v^i, v^j\rangle$　　即：

$(v^3, v^1)=(v^1, v^3)$，$(v^1, v^2)=(v^2, v^1)$……。

换言之，二元关系中的元素，与排列先后次序无关，则按集合论的性质，便有：

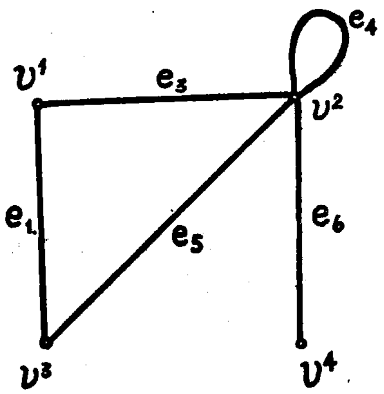
$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

$=\{e_1, e_1, e_3, e_4, e_5, e_8\}$

$=\{e_1, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

这时候G=（V、E）就变成无向图，並示于图（1—7）。

因此从集合论观点，无向图仅仅是有向图的一种特例，即二元关系集合中的元素，与次序无关而已。故得：



图（1—7）无向图G=（V,E）

定义2—3.1　一任意图G是点的集合V与枝的集合E的结合。记做G=（V、E），

其中$V=\{v_1, v_2, \cdots\cdots v_p\}$为点集，V的元素叫点，也可叫作节点，顶点，或0—单形；$E=\{e_1, e_2\cdots\cdots e_q\}\subseteq V\times V$；$e_i$为集合E的元素叫枝，也可叫作线、边，或1—单形。

当任意$\langle v_i, v_j\rangle\in E$，$\langle v_i, v_j\rangle\neq\langle v_j\ v_i\rangle$，对应G=（V，E）为有向图。

当任意$(v_i, v_j)\in E$，$\langle v_i, v_j\rangle=\langle v_j, v_i\rangle$，则对应的G=（V,E)为无向图

从定义当V为有限点集时，G为有限图；

当V为无限点集时，G为无限图。

工程应用中，主要是研究有限图。对有限图，显然有

$|V|=p$代表节点个数，$|E|=q$代表枝的个数。

总起来讲，一个图G无非是由有限点集，和点与点间的二元关系（叫作邻接关系），结合起来构成的一种几何结构。也就是说：

图G=（有限点集，点集元素之间的二元关系）

关系矩阵R：

一个图必对应于一个关系矩阵R，例如图（1—6）对应于下列关系矩阵：

$$R=\begin{array}{c} \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ v^4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v^1 & v^2 & v^3 & v^4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

关系阵做法如下：

$$R=[r_{ij}];\quad r_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{当}\ v_i\ \text{邻接于}\ v_j \\ 0 & \text{当}\ v_i\ \text{不邻接于}\ v_j \end{cases}$$

因为矩阵R是反映二元关系中的特殊关系，即节点间有无邻接关系，故R又可以叫作邻接矩阵。显然关系矩阵是以0、1为元素的方阵。下面举例说明各种图的类别及其对应的关系矩阵。

完全图K_p