西方数学文化理念传播译丛

丛书主编 汪 宇

Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint

高观点下的初等数学

（第一卷） 算术 代数 分析

〔德〕菲利克斯·克莱因 著

舒湘芹 陈义章 杨钦樑 译

齐民友 审

复旦大学出版社

www.fudanpress.com.cn

Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint

教师应该具备更高的数学观点。理由是，观点越高，事物越显得简单。

《高观点下的初等数学》一书，至今读来仍然感到十分亲切。这是因为，其内容主要是基础数学，其观点蕴含着真理，而当时德国数学教育中的不少问题，在今日之我国也仍然存在。克莱因声称本书是为中学教师和成熟的大学生写的，但按其内容，所有对数学有一定了解的人都可以从中获得教益和启发……现代数学已发生了极大变化，新成果、新概念、新观点、新学科层出不穷。我热切希望我国高水平的数学多面手会写出更结合我国实际的、现代化的《高观点下的初等数学》。这样一本书的出版将是我国数学教育史上的一件大事。

吴大任

读这本书，您会感到极有收获，而不得不心悦诚服。不得不承认克莱因是真正的大师！

齐民友

除了数学的工作之外，克莱因的数学史至今仍是19世纪数学史上的重要的标准著作，作为当时的领袖数学家，他的许多观点至今仍然对数学家、数学史家有所启迪。他的《高观点下的初等数学》反映了他对数学的许多观点，是一本译为多种文字的通俗读物，影响至今不衰。

胡作玄

菲利克斯·克莱因教授是德国有名的数学研究家，他也是一位循循善诱的教师。他以罕见的天才，集一切数学领域的知识于一身，并善于领悟这一切领域之间的相互关系。他认为使学生了解数学并不是孤立的各门学问，而是一个有机的整体，是他作为一个教师的明显职责。他对中学数学教学有浓厚的兴趣，不仅关心应该教些什么内容，而且关心怎样教才是最有效的方法……他一贯努力缩短中学和大学之间的差距，从传统的漠不关心中激起中学教师对高等数学的兴趣，把中学数学教学引向健康发展的方向；同时也努力扭转大学的态度及教学方向，使之承认中学的正常地位，使数学教育前后一贯……《高观点下的初等数学》是一本无比珍贵的著作，同样可作为大学教师和中学教师的参考书。无论就材料安排的巧妙或就讨论方式的引人入胜来说，目前都没有一本书可以同这本书相比。

洛杉矶加利福尼亚大学数学教授 E·R·赫德里克

伯克利加利福尼亚大学数学教授 C·A·诺布尔

西方数学文化理念传播译丛

丛书主编 汪 宇

Elementary Mathematics from an Advanced Standpoin

高观点下的初等数学

（第一卷） 算术 代数 分析

〔德〕菲利克斯·克莱因 著

舒湘芹 陈义章 杨钦樑 译

齐民友 审

復旦大學出版社

www.fudanpress.com.cn

内容提要

菲利克斯·克莱因是19世纪末20世纪初世界最有影响力的数学学派——哥廷根学派的创始人，他不仅是伟大的数学家，也是现代国际数学教育的奠基人、杰出的数学史家和数学教育家，在数学界享有崇高的声誉和巨大的影响。

本书是克莱因根据自己在哥廷根大学多年为德国中学数学教师及在校学生开设的讲座所撰写的基础数学普及读物。该书反映了他对数学的许多观点，向人们生动地展示了一流大师的遗风，出版后被译成多种文字，是一部数学教育的不朽杰作，影响至今不衰。全书共分3卷。第一卷：算术、代数、 分析；第二卷：几何；第三卷：精确数学与近似数学。

克莱因认为函数为数学的"灵魂"，应该成为中学数学的"基石"，应该把算术、代数和几何方面的内容，通过几何的形式用以函数为中心的观念综合起来；强调要用近代数学的观点来改造传统的中学数学内容，主张加强函数和微积分的教学，改革和充实代数的内容，倡导 "高观点下的初等数学"意识。在克莱因看来，一个数学教师的职责是："应使学生了解数学并不是孤立的各门学问，而是一个有机的整体"； 基础数学的教师应该站在更高的视角（高等数学）来审视、理解初等数学问题，只有观点高了，事物才能显得明了而简单；一个称职的教师应当掌握或了解数学的各种概念、方法及其发展与完善的过程以及数学教育演化的经过。他认为"有关的每一个分支，原则上应看做是数学整体的代表"，"有许多初等数学的现象只有在非初等的理论结构内才能深刻地理解"。

本书对我国从事数学学习和数学教育的广大读者具有较好的启示作用，用本书译者之一，我国数学家、数学教育家吴大任先生的话来说，"所有对数学有一定了解的人都可以从中获得教益和启发"，此书"至今读来仍然感到十分亲切。这是因为，其内容主要是基础数学，其观点蕴含着真理……"。

博洽内容　独特风格

——《高观点下的初等数学》导读

吴大任

（一）书和作者简介

德国数学家F·克莱因的名著《高观点下的初等数学[①]》(以下简称《初等数学》)已由舒湘芹等同志译就，将由湖北教育出版社出版[②]。中译本出版，必将受到我国中青年教师和广大数学工作者的欢迎，对我国各级学校的数学教育也将产生巨大作用。

F·克莱因(1849—1925)是有深远影响的数学家。他的贡献遍及几何、代数、函数论、理论物理以及数学史等，在这些领域，他都留下了经典性著作。他是权威性的德国数学百科全书的主要创始人之一，曾任最高水平的德国数学年刊的主编。致力于这两项事业长达四十春秋。他热诚地献身于数学教育及其改革，是促进数学教育国际委员会创始人之一，并始终积极参与其中的活动。他著述《初等数学》这样的书，真可谓出色当行，游刃有余，得心应手。这书内容十分博洽，而论述生动活泼，不拘一格，把严谨性和直观性巧妙结合，深入浅出，使读者有举重若轻、左右逢源之感。

《初等数学》是克莱因的助手们根据他在哥廷根大学讲课内容整理而成的，分上下两卷。上卷“算术　代数　分析”(第三版)于1924年出版；下卷“几何”于1925年出版；英译本于1939年出版。60多

① “初等数学”指当时德国中小学的数学，比我国中小学数学略高。

② 本书曾由湖北教育出版社于20世纪90年代初出版过——编辑

年过去，数学面貌已有很大变化，我国目前的数学教育和德国当年也有很大差异。我们阅读这书时，对此必须注意。尽管如此，我们读来，对其内容和观点，仍然感到十分亲切。这是因为，其内容主要是基础数学，其观点蕴含着真理。当时德国数学教育中的不少问题，在今日我国仍然存在。克莱因声称，书是为中学教师和成熟的大学生写的，但按其内容，所有对数学有一定了解的人都可以从中获得教益或启发。

数学科学的整体性和数学教育的连续性

要想用一两句话来概括《初等数学》这本丰富多彩的书的特色，是困难的。也许可以说：它所展示的数学科学，是一个不断发展着的有机整体；克莱因所设计的数学教育，是一个随着数学发展而不断更新的连续过程。正如书名《高观点下的初等数学》所示，书的着眼点是初等数学，观点却是高等数学。数学各个分支，特别是数学两个基本对象——形与数结合起来了。讲算术、代数、分析时，总是充分运用丰富的几何图像。而讲几何时，用的是代数工具，又不乏几何语言。它还以大量篇幅阐述数学的各种概念和方法的发展与完善过程以及数学教育演化的经过。这些进程还在继续。

以下试对《初等数学》的若干具体特色作些介绍。

（二）《初等数学》若干特色

高观点

在《初等数学》的前言中，克莱因指出大学和中学数学教育的“双脱节”现象：大学生感到，他正在学的东西和中学学过的无关，而当他们到中学任教时，大学所学的用不上，因而那些内容就只存在于美好的记忆中。本书的直接目的自然是要改变这种不合理现象，以便把数学的新进展中所产生的新观念渗入中学数学教育中，按我们现在的说法，就是使数学教育“现代化”。

克莱因所采用的书名表明，他认为教师应具备较高的数学观点。理由是，观点越高，事物越显得简单。例如在实数域里不好理解的某些东西，从复数域的观点看，就清楚了；在欧氏空间里某些不好解释的现象，从射影空间的观点看，就有满意的说明。下面分别举两个具体的例。

克莱因指出，在中学，关于对数的传统讲法是有明显漏洞的。他建议把对数函数作为等角双曲线下的面积来引进，既简单又明确。他又指出，在复数域里，对数是多值函数，作为实函数的对数只是其中无数多个值之一。所以，在复数域里，对数函数的本质才看得清楚。我们的教师，无论是否愿意（或可能）采纳克莱因所建议的引进对数方式，有一点是肯定的：如果他了解作为复数的对数函数，当他讲实数时，就会心中有效，有可能弥补漏洞，至少当学生提出疑问时，他能正确回答，应付裕如。

通过变换群来阐明不同几何的本质及其相互关系，本是克莱因伟大创见之一。《初等数学》曾用了很大篇幅来论述欧氏几何、仿射几何和射影几何的关系。我认为，中学几何是欧氏几何，但也涉及图形的仿射性质（如三角形的重心）和射影性质（如三点共线）。如果教师能区别各种性质，在教学中自然是有利的。克莱因举了一个例来说明局限在欧氏空间就不好理解的现象：两个二阶曲面一般相交于一条四阶曲线，但两个球面（二阶曲面）一般只相交于一个（实的或虚的）圆（二阶曲线）。原来，从射影空间观点看，可以认为，两个球面还相交于“无穷远虚圆”，而两个圆在一起，恰好构成一条（退化的）四阶曲线。

教师应是多面手

克莱因对教师的要求是很高的。《初等数学》涉及的面很广。除正文4大部分外，还有两个附录：“关于 e 和 π 的超越性证明”①和“集

① e是自然数的底，π是圆周率。

合论”。每一大部分的写法和通常写法都很不相同，且其内容有不少超出通常写法的习惯范围。例如在“算术”部分写了四元数；在“几何”部分写了高维(以至无穷维)空间，并且随时讲到历史和应用。显然，克莱因认为，教师对这些都应当掌握或了解。他认为，大学生学到的具体东西不少，而许多重要的，以及在中学任教中用得着的东西却往往被忽视了。《初等数学》就着眼于弥补这些缺憾，揭示数学各部分之间的联系，指出它们的共性，它们产生与成长的内因、外因和过程以及它们的应用等等。克莱因认为，教师掌握的知识要比他所教的多得多，才能引导学生绕过悬岩，渡过险滩。他喜欢用“融合”这个词。《初等数学》也确实体现了初等数学同高等数学的融合，数学各部分的融合，几何观念和算术观念[①]的融合，感性与理性的融合(甚至一维、二维、三维空间的融合)等等。可以认为，全书是以上各种融合的融合。强调这一切，是为了使大学生和教师对数学有较全面的观点，有较高的修养。

数学发展的历史

克莱因反复强调的一个教育原则是按照学生的认知规律(包括年龄及成熟程度)进行教学。具体地说，要由简单到复杂，由低到高，由感性到理性等。他讲数学历史，是因为，他认为学生对数学的认识，在某个意义上，是人类对数学认知的历史过程相应的。当然，这绝不是说，学生的认知要重复历史上人类的认知。

在讲述数学的历史时，克莱因强调对事物认识深化的必然性(这不排除偶然性)。某些新概念的出现，是由于客观条件已经成熟而非产生不可。例如他指出，负数和复数的出现，是不以数学家的意志为转移的。非欧几何产生后，许多数学家是被迫承认它的。微积分由粗糙到严格，有着艰辛的历程。函数概念和几何对象范畴等的演化，都有过漫长的过程。我以为，了解一些历史是很有意义的；我们的课

① 在这里以及许多其它地方，“算术”是广义的，用来表示纯几何的对立面，包括代数和分析。

程往往分别构成首尾完整的逻辑体系。学生在学习中很难充分领会到数学是如何逐步成长起来，它又将如何继续发展。

公理体系

《初等数学》多处谈到公理体系，特别是关于数的公理和几何公理。克莱因认为，公理不能脱离直觉，不能排除人对客观事物的认识。因而反对那样一种观点：认为公理可以随心所欲地选取，只要它们彼此相容，即不产生矛盾就可以了。他还认为，不能按照公理体系进行教学。因为这首先不符合学生的认识规律。逻辑不是数学教学中的唯一指导思想。此外，他还有一个更深刻的理由。他把数学比作一棵树，公理比作树的根，当树逐渐长大时，躯干和枝叶向上长，同时根也向下长。因此既没有最后的终点，也没有最初的始点，即没有进行教学的绝对基础。至于教师，之所以要了解公理对数学的作用和意义，则是和他对教师的要求一致的；公理体系在数学作为一个演绎的逻辑结构中，毕竟占有极其重要的地位，不了解它就不能了解数学的本质和全貌。而在教学中，教师固然要考虑大多数学生的兴趣和接受能力，同时他又应能满足一些才华出众的学生的求知欲望，适当地回答他们可能提出的问题。

尺规作图和费尔马大定理

这两个问题在《初等数学》中并不占重要位置，但克莱因对它们的几句精辟议论，却可以用来作为对我们许多青少年学生和业余数学爱好者的忠告。《初等数学》较详细地讨论了用圆规和直尺作图问题。在谈到三等分角问题①时，克莱因指出：许多人拿出自己的“解法”，希望别人指出错误所在，但他们的知识基本上限于初等几何，又不肯去了解利用算术方法早已作出的不可能性证明。为了使读者对

① 即只用直尺和圆规把一个任意给定的角分为三等分的问题，这所谓“几何三大问题”之一，另外两个问题是“化圆为方”和“倍立方”。它们是古老的课题，但早已证明都是不可能的。化圆为方问题同圆周率的超越性有关，其他两问题之不可能是用算术方法来证明的。

这种算术证明有所了解，以便当他们接到送来的“解法”时，能站稳脚跟，他给出了用直尺和圆规不可能作正七边形的证明。

费尔马大定理最近几年才有了重大突破，但尚未最后解决。《初等数学》对这个“定理”的涵义有个十分有趣的图解，对它的历史直到克莱因时代的研究状况有简明的介绍。克莱因指出，自从 1907 年人们获悉解答这问题（即证明或否定费尔马大定理）的人会得到高额奖金后，就出现了大量的“证明”。这些人属于各行各业，但他们有一个共同点：完全不了解探索这个问题所遇到的严重数学困难，也不想去了解困难所在，只妄想靠突发的灵感就一下子加以解决。他们的结果当然是毫无意义的。

（三）对我们的启发

以上对《初等数学》的管窥蠡测，不求全面，但求无大错，可告无罪于该书作者和本文读者。下面结合我国现状，谈几点个人浅见，统请高明指教。

中学数学教师的提高方向

许多统计数字表明，我国中小学教师中有很大百分比没有达到教育领导部门所规定的最低业务标准。这里不谈这些现象存在的根本原因（如教育投资长期太少，教师待遇过低），只谈教师提高的方向。我以为，拓广教师的知识领域，提高他们的教学修养，是当务之急。为此，一个非常重要的策略是，必须把教师从“题海”中解脱出来。不少教师抱怨，经常要花大量时间和精力去收集习题，把解题方法分类，编写习题解答等等，根本顾不上进修。而不那样做，四面八方又不谅解。教师的这种苦衷，了解的人恐怕不多。事实上，“题海战术”对广大学生也是利少弊多。用各种方式帮助现有中小学教师提高，高等学校有责任，也有余力。在中小学教师大半已达到规定标准后，这个标准还应有所提高。

初等数学教育现代化问题

若干年前，许多国家进行过数学教育现代化的研究和试验。现在谈论它的人似乎少些了。我以为，问题不在于要不要现代化，而在于如何现代化。有一条原则是必须坚持的，即要按学生的认识规律进行教学。用现代数学知识武装中学教师，是初等数学教育现代化的前提。

大学数学系的任务

师范院校要面向中学的原则已经定下来了，“向综合大学看齐”的倾向也已经改过来。其实，我以为，师范院校只要注意保持“师范”特色，综合大学数学系的课，师范院校也可以开设。我说的是“可以”，不是“全部必须”。因为中学教师掌握这些课的内容有好处。至于综合大学数学系毕业生也可以(甚至必须)有一定比例到中学任教。那种认为综合大学毕业生到中学教书是“大材小用”的说法，是站不住脚的。为什么大学生和研究生报名当旅馆服务员就不算“大材小用”？在许多国家，师范院校以外的大学毕业生还要通过教育课程的考试才能取得中学教师的资格呢。可见问题的根本在于教师的待遇。

大学数学教育的改革

大学数学教育也大有改革余地。例如必修课分量偏重，“上层建筑”要求偏高，基础不全不牢等等，都不利于人才的健康成长；在大量招收研究生后更是如此。在这里，我只着重谈谈几何形象问题。许多数学大师都强调形与数的统一。希尔伯特说过：“算术记号是写下来的图形，几何图形是画下来的公式”。克莱因认为：几何基础可能要以算术为起点，却不能脱离几何直观，而且他讲算术问题时，总要结合几何图像。他们的观点是完全一致的。问题是，在我们的高等数学教育中，几何形象被严重忽视了。作为基础课的解析几何已不能保持最低限度的分量。许多代数和分析课强调自我演绎体系，从逻辑和审美观点看很好，缺点是形与数固有的内在联系割断了。纯几何的演绎体系似乎已逐渐成为历史，为几何、算术、代数所取代，但

也不能因此而抛弃几何直觉。另一个问题是,我们很少对学生介绍数学发展的历史。在这两方面,我认为综合大学有不少地方可以向师范院校学习。我们并不需要在综合大学数学专业恢复 50 年代作为必修课的几何基础和数学史,但可以通过改革教学内容和方法来达到加强几何形象的目的。当然,这涉及教师的培养与提高问题。

善于数学的"热门课题"

在我国青少年学生和业余数学爱好者中,"几何三大问题"(主要是三等分角问题)和费尔马大定理(以及哥德巴赫问题)都是(或曾经是)"热门课题",但他们"研究"的质量似乎比克莱因时代的德国还低。其实前者已证明为不可能,后者即使在数学界也只是"热门话题"而不是"热门课题"。它们在我国某些人中之所以成为"热门",部分原因是他们片面理解"解放思想",更重要的是我们宣传教育不够,我们希望教师们能做这些人的工作。对于执着要搞这两类问题的人,在肯定其精神可嘉之余,要教育他们尊重科学,实事求是,适当地向他们"泼冷水";鼓励学生打好基础,鼓励业余数学爱好者把精力和时间用于更能发挥自己专长的地方。

一点希望

希望我国有众多人像克莱因那样关心数学教师的培养与提高,关心数学教育改革,并为此做些实事。《初等数学》中译版的现实意义就在于,它将促进这两方面工作的进程。但是德文本出版已过了 64 年,英译本出版也过了 50 年。现代数学已发生了极大变化,新成果、新概念、新观点、新学科层出不穷。但是数学的本质与真理是永恒的,像克莱因那样探索数学教育的规律,当是一以贯之的。我们热切希望我国高水平的数学多面手会写出更结合我国实际的、现代化的《高观点下的初等数学》。这样一本书出版,将是我国数学教育史上一件大事。

1989 年 6 月于南开大学

纪念克莱因

——介绍《高观点下的初等数学》

齐民友

我们不妨用这部名著最后一卷(第三卷)的最后一句话来开始我们的介绍。

“保持一流大师的遗风:回到固有的生动活泼的思考,回到自然!”

这段话栩栩如生地刻画了本书作者克莱因的风范。他是近几个世纪的当之无愧的数学大师。在解释这一段话之前,我们先来介绍一下他的生平和对于数学事业的贡献。

克莱因(1849—1925年)生于德国莱因河畔的杜塞尔多夫。中学毕业后进入波恩大学,师从普吕克(J. Plücker)。当时,普吕克的科学兴趣集中在几何学,所以克莱因也以几何学开始了自己的数学生涯。克莱因得到博士学位时,恰好普吕克去世。他也就离开了波恩。在好几所大学工作以后,他受到著名几何学家克莱布什(R. F. A. Clebsch)的青睐,得到了埃尔朗根大学的教职。1872年发表了著名的就职演说,题为“Vergleichende betrachtungen über neuere geometrische forsuchungen”(“近代几何研究的比较评论”,英文本 Felix Klein, *A comparative review of recent researches in geometry*),也就是著名的爱尔朗根纲领。遗憾的是,英文本不太容易找到,所以尽管它影响深远,读过它的人却很少(作者遗憾地承认,自己也没有读过。过去可以说是因为很难找到,但是现在可以在网上找到全文:Math. ucr. edu/baez/Erlangen/Erlangen_tex. pdf)。当时克莱因还只有23岁。尽管他在几何学上如此贡献卓著(另一项贡献是给出了双曲几何的克莱因模型,

并且证明了,这种几何学的相容性等价于欧氏几何的相容性),他自己却认为自己在数学上最大的贡献是在复分析。他认为自己最大的成功在于发展了黎曼(B. Riemann)关于解析函数理论的几何物理的途径,把它与群论、不变式理论、高维几何学、微分方程等融合在一起。1880 年起他来到莱比锡大学,而且树立了一个目标,就是按照黎曼的思想建立一个学派。可是天忌英才,从 1882 年起,他就因重病而不能继续从事这项伟业。1886 年,他离开了莱比锡去哥廷根,可以说,他的研究生涯至此结束。

有人说,克莱因有两个灵魂:一方面他渴望宁静的研究生活;另一方面他又是热情的教育家、组织者。从他 1886 年到哥廷根以后,他就致力于把哥廷根建成为当时一流的数学中心。希尔伯特(D. Hilbert)就是克莱因延聘到哥廷根的。著名的刊物 *Mathematische Annalen*(《数学年刊》)也在他的主持下,成了当时最有权威的数学刊物之一。而十分重要的是他对于中学数学教育改革的贡献。他在哥廷根一直为中学教师讲课,讲稿最终整理成《高观点下的初等数学》这部名著(以下简称《初等数学》)。从 1901 年手稿面世直到 1928 年第三卷由赛法特整理成书,历时 27 年。其时克莱因已经去世 3 年了。

已故的吴大任教授,为中文译本写的序言对这本书作了非常精到的评述。现在在数学界,凡说到初等数学,不少人心中总会有一种"小儿科"的感觉,吴先生指出《初等数学》就是基础数学。而且这里讲的不是什么搞博士点、搞重点学科那种意义上的基础数学,而是整个数学的基础。本书原名的 Elementarmathematik 是否也可以如是理解呢?如果是这样,那么本书的读者,就不只是中学老师,而用吴先生的话来说:"所有对数学有一定了解的人都可以从中获得教益和启发。"也正因为如此,"《初等数学》一书,至今读来仍然感到十分亲切。这是因为,其内容主要是基础数学,其观点蕴含着真理……"为什么要从高观点来看呢?吴先生说:"理由是,观点越高,事物越显得简单。例如在实数域里不好理解的某些东西,从复数域的观点来看,就清楚了;在

欧氏空间里某些不好解释的现象，从射影空间的观点来看，就有满意的说明。"他接着说："克莱因认为，数学专业大学生学到的专业知识不少，而许多重要的……却往往被忽视了。《初等数学》正是着眼于弥补这些缺憾，揭示数学各部分之间的联系，指出它们的共性，它们产生与成长的内因、外因和过程以及它们的应用等等。"吴先生接着强调，《初等数学》特别着重"融合"，即"初等数学同高等数学的融合、数学各部分的融合、几何观念同算术观念的融合、感性与理性的融合等等。可以认为全书是以上各种融合的融合。"这里，还对作者原意给予补充：数学与物理学以及各种自然科学的融合，数学的逻辑结构与历史发展的融合。

现在对于克莱因关于中学数学教育改革的具体主张作一些介绍。这些主张中的要点就是把微积分初步放在中学，而且强调函数的概念。请注意，这是 100 年前提出的，而我们不少人却认为是新一轮课改的成果(或隐患)。放眼世界，在大多数发达国家，这已经成了不需要讨论的事情(可能美国例外)。有许多国家写出了很好的教材。我愿特别呼吁：请注意日本的中学教材。我曾比较仔细地读了日本数学家藤田宏主编的高中(日本人称为"高校")数学教材。据说日本的义务教育是 12 年，即相当于我国的高中。又据说，日本高中毕业生有 40%学理科教材。也就是说，基本上掌握了一元函数的微积分。如果我国每年进入高校的新生有 20%(按今年大学招生数估计，即 120 万人)达到这样的教材所反映的数学水平，那么，我国许多高校理工科的数学教学，将面临新的挑战。美国数学会曾翻译了小平邦彦主编的高中教材，受到不少好评。例如 *Zentralblatt MATH* 在其评论中就说，应该感谢美国数学会，组织翻译了一本比现在欧美国家使用得更好的数学教材。是否有哪一家出版社愿意考虑这件事？回到本题，为什么要在中学教微积分初步？克莱因说，如果没有这样的准备，就不可能理解当前正在研究的自然现象。这与另一批美国学者的看法是一样的。美国德州仪器公司(TI)一位高官组织了一些数学家研究美国的数学

教育，他们发现，尽管美国数学界和数学教育界看法有分歧，但在一点上却有共识：21 世纪的劳动者应该懂得微积分初步。可是克莱因提出这个观点早在 100 年前！

关于在中学教微积分初步，最大的疑虑来自对中国现在的中学教学水平的估计。确实，根据我近年的了解，相当大的一批中学，如果能够把一本比较平实的教材，例如几年前用的老教材教清楚，就很不错了（还要花很大的力量）。不平衡仍然是基本的国情。但是如果只考虑这一部分学校，显然也是不行的。如何对待这种不平衡性，当然是另外一个问题了。

同样，从我接触到的许多中学来看，教师的数学水平经过一定的努力，是能够满足现行"课标"的要求的。而正是对于这样一大批中学（和大学）数学教师，克莱因在《初等数学》一书中提出的意见更是值得深思。《初等数学》第一卷第四章后有一个附录："关于数学的现代发展及一般结构"，克莱因对自 17 世纪以来围绕微积分的数学发展的轨迹作了十分精彩的论述。概括地说，克莱因指出，这里有 3 种不同的进程，互相交替，又互相补充。片面地只强调其一，而忽略其他，是有害的。所谓进程 A，在教学上的表现，就是：

（1）先是方程和有理式的形式运算，用根式解方程；

（2）系统地研究幂运算及其逆，出现了对数；

（3）现在进入几何领域，有了三角函数，然后三角成了一门独立的学科（或章节）；

（4）进入"代数分析"，也就是以幂级数为中心，讲二项式定理、指数与对数函数的展开式，$\sin x$，$\cos x$ 的展开式。这时突然出现了欧拉(Euler)公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$。学生难免奇怪，何以来自全然不同领域的函数会有如此奇怪的关系！

（5）这时进入了复域，就是以幂级数为中心的魏尔斯特拉斯(Weierstrass)理论。

很容易看到，我国的数学教学（从高中到大学的分析数学各课程）

就是按照进程 A 来组织的:(1)到(3)是高中教材,(4)和(5)是大学教材。如果说有区别的话,就是在(3)与(4)之间,插进了一块或大或小的极限理论。特别是大学数学系本科,是完全以 $\varepsilon-\delta$ 为基础的魏尔斯特拉斯理论,使学生吓得要命,所以人们戏称为"大头微积分"。不但是头重脚轻,甚至是头足倒立。因为它不由分说地把历史发展的"终结"(魏尔斯特拉斯是在 1861 年在柏林讲课时才使用了这种讲法)放在历史的"起点"(牛顿(J. Newton)和其他人在 1650 年以前就在用幂级数了,这就是(4)的内容),提前了大约 200 年! 那么进程 A 有什么指导思想呢? 克莱因指出,"进程 A 是建立在把一门学科进行分解的概念上的,即把一个整体分成一系列互相独立的部分,使各部分独立发展。尽量少借助于其他部分的知识,尽可能避免引入相邻领域的概念。进程 A 的理想是把各个局部领域的知识结晶为一个逻辑封闭系统。"

那么,在数学的发展中还有没有别的进程呢? 克莱因指出,还有进程 B。克莱因指出它的中心思想是解析几何的思想,就是我们常说的"数形结合"。具体来说就是:

(1) 先从最简单的函数:多项式,有理函数的图像开始,得出一个概念:函数的零点(即方程的根)就是图像与 x 轴的交点。

(2) 有了图像就自然地出现了斜率、面积的问题,于是微积分出现了。

(3) 许多(甚至是绝大多数)函数的积分不能用已知函数来表现。例如由双曲线 $xy=1$ 下面的面积,得出了对数函数的定义

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}x}{x}=\log x,$$

(请注意,这不是克莱因别出心裁想出来的讲法,历史就是这样的,牛顿很明确地这样做,纳皮尔(Napier)也是用积分或微分方程来定义对数的)。类似于此,研究圆扇形的面积给出了反三角函数:$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x$。克莱因指出像这样走下去,就会得到椭圆函数