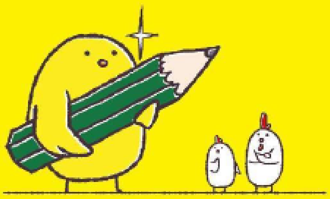
给力数学
GEILI MATHEMATICS



因材施教，循循善诱教解题：初中数学典型题解题方法与分析

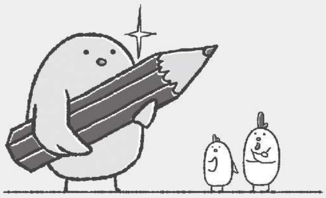
编著 / 彭　林　毛玉忠

九年级+中考

- 摸底自测，规范解答，还原**课堂实景**
- 因材施教，循循善诱，提供**完整解题方案**
- 思路拓展，牛刀小试，让您全方位掌握**方法和技巧**

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

给力数学
GEILI MATHEMATICS



因材施教，循循善诱教解题：初中数学典型题解题方法与分析

编著 / 彭　林　毛玉忠

九年级+中考

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

因材施教,循循善诱教解题:初中数学典型题解题方法与分析. 九年级+中考 / 彭林,毛玉忠编著. —上海:华东理工大学出版社,2015.6

(给力数学)

ISBN 978-7-5628-4253-8

Ⅰ.①因… Ⅱ.①彭… ②毛… Ⅲ.①中学数学课—初中—题解—升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 082692 号

给力数学

因材施教,循循善诱教解题:初中数学典型题解题方法与分析(九年级+中考)

编　　著/ 彭　林　毛玉忠
策划编辑/ 庄晓明
责任编辑/ 刘　婧
责任校对/ 张　波
封面设计/ 裘幼华
出版发行/ 华东理工大学出版社有限公司
地　址:上海市梅陇路 130 号,200237
电　话:(021)64250306(营销部)
(021)64252718(编辑室)
传　真:(021)64252707
网　址:press.ecust.edu.cn
印　　刷/ 常熟市华顺印刷有限公司
开　　本/ 787 mm×1092 mm　1/16
印　　张/ 18.5
字　　数/ 438 千字
版　　次/ 2015 年 6 月第 1 版
印　　次/ 2015 年 6 月第 1 次
书　　号/ ISBN 978-7-5628-4253-8
定　　价/ 39.80 元

联系我们:电 子 邮 箱 press@ecust.edu.cn
官 方 微 博 e.weibo.com/ecustpress
天猫旗舰店 http://hdlgdxcbs.tmall.com

華東理工大學出版社

和彭老师学数学(代序)

笔者从未想过能有为一本书作序的荣幸,更何况这本书的作者还是笔者的恩师.不过想到与读者朋友谈的是“和彭老师学数学”,便也释然了——毕竟曾在彭老师的课堂上求学6年,笔者还是勉强有自信和各位读者朋友分享一些感受的.

笔者自1994年起师从于彭林老师,直至2000年高中毕业.当年笔者所在的班级是数学特长班,数学课的广度和深度在一定程度上超出了课业要求.但是这些并没有成为我们的负担,相反,彭老师的授课方式——更确切地说是教学思维——让我们在求知的同时,掌握了数学思维的方法,受益匪浅.我们毕业后,无论在哪里进一步深造,都是同龄人里数学的佼佼者;无论是走上工作岗位,还是远渡重洋继续深造,也仍在享受着当年从彭老师课堂上收获的“财富”.

因此,笔者认为彭老师编写这套《因材施教,循循善诱教解题:初中数学典型题解题方法与分析》的初衷,是想把这些“财富”传播给更多的学生,在答疑解惑、传授解题技巧的同时,潜移默化地培养学生们的数学思维,养成对数学的兴趣.在此,笔者不妨也站在学生的角度赘述几句,与读者朋友分享一点经验与感悟.

一名优秀的数学老师应该是什么样的?彭老师经常说的一句话是:“好的老师,不应该只是自己一个人在课堂上滔滔不绝,而是应该创造一种情境,营造一种氛围,让学生自由地发挥,而老师只需扮演好引导者的角色即可.”师生相处多年,彭老师践行了自己的理念.在他的课堂上,鲜有长篇大论的讲述,更多的是这样的模式:首先,回顾一下之前所学的内容,然后通过某些具体案例,让大家意识到先前所学不足以解决问题.接下来顺理成章地,便是大家一起讨论并找出新的解决方案.在这个过程中,他很少发表意见,仅在某些关键之处点拨一二,引导讨论的方向.最后,当答案水落石出时,彭老师才会加以总结,并就之前的过程做出分析与点评.这样一堂课下来,知识不是他“教”或“灌”给我们的,而是我们自己“想”出来、“学”进去的.这种模式与传统的教学方法相比,孰优孰劣,相信读者朋友已有答案.

他曾经一天布置20张数学作业纸的作业,让我们“咬牙切齿”、叫苦不迭的同时,却也牢固

地掌握了基础知识;他也曾在高三冲刺阶段一节课只分析一道题,虽只有一道题,却讨论出五六种不同的解法,让我们的思路更加开阔.这样的教学理念,也许不是每个人都认同的,但是不能否认的是,即使在高三阶段,我们数学作业的量通常是所有科目里最少的.与之相对应的是,我们六年来获得的数不胜数的各种国家级、市级数学竞赛一、二、三等奖,以及2000年高考时,仅一个小班就有十几名学生考上北京大学、清华大学等名校的骄人成绩.

这套书的每一小节精心设置了"摸底自测题""因材施教:循循善诱教你解题""解题思路拓展""解题能力突破""彭老师叮嘱""牛刀小试"等栏目,这些栏目在一定程度上再现了彭老师的数学课堂.

值得一提的是,读者朋友可以在这套书中看到一些超出教材的内容.这样补充一些课本之外的知识,以期让学生开拓思路,学会触类旁通,是大有裨益的.因为在数学学习中,很容易出现"一叶障目,不识泰山",或是"不识庐山真面目,只缘身在此山中"的情况.此时,适量地接触一些课本外的知识,对于理解课本内容、完善知识体系而言,是一种有益的尝试.甚至,提前介绍一些较深的知识,不要求学生熟练掌握,哪怕只是让学生略有涉猎,也足以提供一种全新的视角与思路,让读者朋友"换种眼光看数学,换个角度学数学".因此,书中那些新颖的公式定理、有趣的解题技巧、传奇的历史典故、感人的数学人生,都是彭老师多年教学凝练的心血与精华,望读者朋友珍视!

六年师生之谊,情长纸短,一言难尽.笔者希望通过此文的介绍,能让同学们领略彭老师的教学风采之一二,进而迫不及待地学习书中知识.愿《因材施教,循循善诱教解题:初中数学典型题解题方法与分析》这套书作为彭老师课堂的延伸,帮助同学们学好数学、爱上数学!

耿 亮①

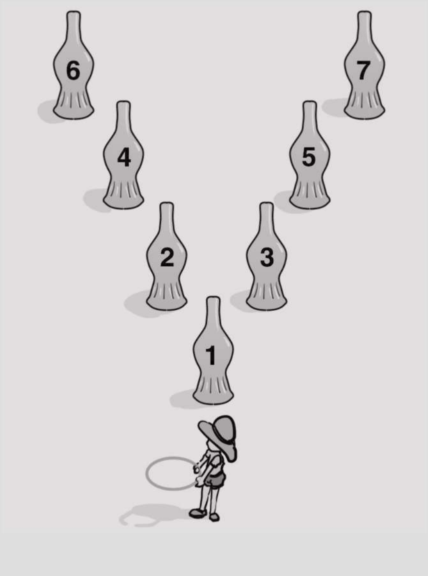
① 耿亮:博士,先后就读于北京大学生命科学学院、中国科学院动物研究所,现在中关村某生物科技公司任技术总监。

目录

第一章　一元二次方程

第二章　二次函数

第一章　一元二次方程



一

一元二次方程的解

摸底自测题

1. 若 $x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，则 $a+b+c=$____.

2. 已知 $x=1$ 是方程 $x^2-ax+1=0$ 的根，化简：$\sqrt{a^2-2a+1}-\sqrt{9-6a+a^2}$.

因材施教：循循善诱教你解题

1. 将 $x=1$ 代入方程中，得

$$a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=0,$$

即 $a+b+c=0$.

评注：解答本题的关键是正确理解方程的解的概念，只要是方程的解就可以代入方程，使方程成立.

2. 将 $x=1$ 代入方程，得

$1^2-a\cdot 1+1=0$,

所以 $a=2$,

所以 $\sqrt{a^2-2a+1}-\sqrt{9-6a+a^2}=\sqrt{1}-\sqrt{1}=0$.

解题思路拓展

给定一个关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，称实数 x_1 是方程①的一个解（或根），是指将①中的未知数 x 换为数 x_1 时，左、右两边相等，即有 $ax_1^2+bx_1+c=0$.

应用方程根的意义（定义），常常是解决涉及一元二次方程根的问题的基本入手点.

解题能力突破

例 1 若 $b=a+c$，求证一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 必有一个根是 -1.

规范解答

由 $b=a+c$，则 $a-b+c=0$

将 $x=-1$ 代入 ax^2+bx+c 得

$a(-1)^2+b(-1)+c=a-b+c=0$

所以 -1 是 $ax^2+bx+c=0$ 的根.

例 2 已知两个二次方程 $x^2+ax+b=0$，$x^2+cx+d=0$ 有一个公共根 1.

求证：二次方程 $x^2+\dfrac{a+c}{2}x+\dfrac{b+d}{2}=0$ 也有一个根为 1.

规范解答

由于 1 是已知两方程的根，所以

$1^2+a\cdot 1+b=0$ ①

$1^2+c\cdot 1+d=0$ ②

①+②后两端除以 2 得

$1+\dfrac{a+c}{2}+\dfrac{b+d}{2}=0$

即 $1^2+\dfrac{a+c}{2}\cdot 1+\dfrac{b+d}{2}=0$.

所以 1 是方程 $x^2+\dfrac{a+c}{2}x+\dfrac{b+d}{2}=0$ 的根.

彭老师叮嘱

灵活运用定义，是解决数学问题的一种基本方法.

牛刀小试

1. 求证：方程 $(a-b)x^2-(b-c)x+c-a=0$ 有一个根是 -1.

2. 已知 a 是方程 $x^2-2008x+1=0$ 的一个根，求 $a^2-2007a+\dfrac{2008}{a^2+1}$ 的值.

二 用直接开平方法与因式分解法解一元二次方程

摸底自测题

解下列方程：

(1) $(x-2)^2-9(x+1)^2=0$；

(2) $(5x+2)(x-1)=(2x+11)(x-1)$.

因材施教：循循善诱教你解题

方程(1)可以变形为 $9(x+1)^2=(x-2)^2$，左右两边都是完全平方的形式，因此，可以用直接开平方法解此方程.由方程(1)，得 $9(x+1)^2=(x-2)^2$，于是有 $3(x+1)=x-2$，或 $3(x+1)=-(x-2)$，故 $x_1=-\frac{5}{2}$，$x_2=-\frac{1}{4}$.

将方程(2)右边的 $(2x+11)(x-1)$ 移到左边后，可以与 $(5x+2)(x-1)$ 结合提取公因式 $x-1$，因此可以利用因式分解法解此方程.方程(2)可变形为 $(x-1)(3x-9)=0$，即 $3(x-1)\times(x-3)=0$.从而 $x_1=1$，$x_2=3$.

解题思路拓展

解一元一次方程时，曾用过去分母、去括号、移项、合并同类项、同除以一次项系数等步骤，这些步骤的目的是什么？

一言以蔽之，其目的无非是“排除‘障碍’，把 x‘解放’出来”.有分母，是个“障碍”，要排除它，于是有了“去分母”的动作；有括号，是“障碍”，要排除它，于是有了“去括号”的动作；其他步骤，同理.

现在，我们遇到了一元二次方程.首要的问题也是通过变形把 x“解放”出来.怎么变形？除了分母、括号、系数等“障碍”以外，还有一个“障碍”是次数，那么怎样把二次降成一次呢？开平方和分解因式是两种最基本的方法.

解题能力突破

例 1 利用直接开平方法解下列一元二次方程：

(1) $(x+a)^2-\left(2x+\dfrac{a}{2}\right)^2=0(a>0)$；

(2) $1+2x+x^2=n^2\left(1+\dfrac{2x}{n^2}+\dfrac{x^2}{n^4}\right)$.

解题策略

方程(1)可以变形为$\left(2x+\dfrac{a}{2}\right)^2=(x+a)^2$,因此,也可以用直接开平方法来解此方程.

方程(2)也可以变形成$\left[n\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)\right]^2=(1+x)^2$的形式,于是也可以使用直接开平方法来解此方程.由于这个方程中含有字母系数 n,故需对字母 n 进行讨论.

规范解答

(1) 由方程(1),得$\left(2x+\dfrac{a}{2}\right)^2=(x+a)^2$,于是有 $2x+\dfrac{a}{2}=x+a$,或 $2x+\dfrac{a}{2}=-(x+a)$.故 $x=\pm\dfrac{a}{2}$.

(2) 由方程(2),得$\left[n\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)\right]^2=(1+x)^2$,于是有 $n\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)=1+x$ 或 $n\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)=-(1+x)$.

一方面,由于$\left(\dfrac{1}{n}-1\right)x=1-n$,故当 $n\neq1$ 时,$x=n$;当 $n=1$ 时,该方程的根为任意实数.

另一方面,由于$\left(\dfrac{1}{n}+1\right)x=-(n+1)$,因此,当 $n\neq-1$ 时,$x=-n$;当 $n=-1$ 时,该方程的根为任意实数.

综上所述,当 $n\neq1$ 时,$x=n$;当 $n\neq-1$ 时,$x=-n$;当 $n^2=1$ 时,x 为任意实数.

例 2 利用因式分解法解下列一元二次方程：

(1) $x^2-5|x|+4=0$；

(2) $(\sqrt{2}+1)x^2-(3+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$；

(3) $x^2-(p^2+q^2)x+pq(p^2-q^2)=0$；

(4) $m^2(x^2-x+1)-m(x^2-1)=(m^2-1)x$.

解题策略

方程(1)左边的 x^2 可以看成$|x|^2$,从而可以将原方程的左边分解成$(|x|-4)(|x|-1)$,

于是可以使用因式分解法解此方程.

方程(2)左边的二次项$(\sqrt{2}+1)x^2$的系数$\sqrt{2}+1$可以分解成$(\sqrt{2}+1)\times 1$，常数项$\sqrt{2}$可以分解成$(-1)\times(-\sqrt{2})$，借助十字相乘法也可以进行因式分解，从而达到求解的目的.

将方程(3)左边的$pq(p^2-q^2)$项分解成$-q(p+q)$与$-p(p-q)$的乘积后，也可以借助十字相乘法达到因式分解的目的.

对方程(4)直接进行分解比较困难，但是将其整理后，可得到关于x的二次方程$m(m-1)\times x^2-(2m^2-1)x+m(m+1)=0$，可以将二次项的系数分解成$m$与$m-1$的乘积，将$m(m+1)$项分解成$-(m+1)$与$-m$的乘积，再借助十字相乘法进行因式分解，并可以在此基础上求解.

规范解答

(1) 方程(1)可以变形为$(|x|-4)(|x|-1)=0$，从而有$|x|-4=0$，或$|x|-1=0$，即$|x|=4$，或$|x|=1$.故$x_{1,2}=\pm 4$；$x_{3,4}=\pm 1$.

(2) 方程(2)可以变形为$[(\sqrt{2}+1)x-1](x-\sqrt{2})=0$，从而可得$x_1=\sqrt{2}-1$，$x_2=\sqrt{2}$.

(3) 方程(3)可以变形为$[x-q(p+q)][x-p(p-q)]=0$，从而可得$x_1=pq+q^2$，$x_2=p^2-pq$.

(4) 方程(4)经整理可以变形为$m(m-1)x^2-(2m^2-1)x+m(m+1)=0$，进而可以分解成$[mx-(m+1)][(m-1)x-m]=0$.因此有$mx=(m+1)$，或$(m-1)x=m$.故当$m\neq 0$且$m\neq 1$时，$x_1=\frac{m+1}{m}$，$x_2=\frac{m}{m-1}$；当$m=0$时，$x=0$；当$m=1$时，$x=2$.

彭老师叮嘱

求解一元二次方程，应注意观察方程的特点.

牛刀小试

解下列方程：

(1) $(3x-4)^2=(4x-3)^2$；

(2) $(1-x)^2=1-x^2$；

(3) $x^2-4ax=b^2-4a^2$；

(4) $x^2-b^2=a(3x-2a+b)$.

三

用配方法解一元二次方程

摸底自测题

解方程：$4x^2+5=12x$.

因材施教：循循善诱教你解题

移项，得 $4x^2-12x=-5$.

把方程各项都除以 4，得 $x^2-3x=-\frac{5}{4}$.

配方，得 $x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{5}{4}+\left(\frac{3}{2}\right)^2$，

即 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=1$.

所以 $x-\frac{3}{2}=\pm 1$，

即 $x_1=\frac{5}{2}$，$x_2=\frac{1}{2}$.

评注：对于任何一个一元二次方程，为了便于配方，我们都先将二次项系数化为 1，而后求解.

配方法解一元二次方程的一般步骤如下：

(1) 化二次项系数为 1；

(2) 移项，使方程左边为二次项和一次项，右边为常数项；

(3) 方程两边各加上一次项系数一半的平方；

(4) 变形成 $(x+m)^2=n$ 的形式；

(5) 如果 $n\geqslant 0$，方程的根是 $x=-m\pm\sqrt{n}$；如果 $n<0$，方程就没有实数根.

解题思路拓展

如何熟练地对二次三项式进行配方呢？

关键在于熟练地运用 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$,即看到 a^2+b^2 想到凑 $2ab$,或者看到 a^2+2ab 想到凑 b^2.

解题能力突破

例 1 分解因式 $(a^2-1)(b^2-1)+4ab$.

解题策略

先展开试试,即 $(a^2-1)(b^2-1)=a^2b^2-a^2-b^2+1$,得原式是 $a^2b^2-(a^2+b^2)+1+4ab$.

试着:看 a^2b^2+1 凑 $2ab$,看 a^2+b^2 也凑 $2ab$,是否可以分解了.

规范解答

$$
\begin{aligned}
&(a^2-1)(b^2-1)+4ab\\
=&a^2b^2-(a^2+b^2)+1+4ab\\
=&a^2b^2+2ab+1-[a^2+b^2-2ab]\\
=&(ab+1)^2-(a-b)^2\\
=&(ab+1+a-b)(ab+1-a+b)
\end{aligned}
$$

解后反思

尝试看 a^2b^2+4ab 想到凑 4,你能顺利地分解因式吗?你得到怎样的体会?

例 2 已知 a、b 都是大于 1 的正整数,证明:a^4+4b^4 是合数.

规范解答

由 a^4+4b^4 想到 $4a^2b^2$,则有

$$
\begin{aligned}
&a^4+4b^4\\
=&a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2\\
=&(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2\\
=&(a^2+2b^2-2ab)(a^2+2b^2+2ab)\\
=&[(a-b)^2+b^2][(a+b)^2+b^2]
\end{aligned}
$$

由于 $a>1$,$b>1$,所以 $(a-b)^2+b^2>1$,$(a+b)^2+b^2>1$.

因而 a^4+4b^4 是合数.

彭老师叮嘱

例 2 虽然做完了，但不要轻易放在一边，留足时间，再回首，品其韵味.

其一，问自己，什么样的整数 a 与 b，使得 a^4+4b^4 是质数(除 1 及自身外无其他约数)?

其二，问自己，a^4+4b^4 可以写成四个数的平方和吗？如果能，这四个数可以不同吗？

牛刀小试

1. 已知 $x^2+y^2+4x-6y+13=0$，其中 x、y 均是实数，求 $x+2y$ 的值.

2. 已知 a、b、c 为三角形的三边长，且满足 $a^2+b^2+c^2+338=10a+24b+26c$，试判断这个三角形的形状.