



高等职业教育“十二五”规划教材

经济数学

JINGJI SHUXUE

上册

周光亚/主编



天津大学出版社

TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等职业教育“十二五”规划教材

经济数学

上册

主 编 周光亚



内 容 简 介

本书分上、下两册. 上册包括函数、极限与连续, 导数与微分, 导数的应用, 定积分与不定积分及其应用, 常微分方程初步.

本书针对经济类专业要求, 将数学软件全面融入数学教学体系, 强化数学认识和数学应用, 笔算与机算相结合. 书中配有思考题, 每节后有练习题和习题, 每章后有自测题, 便于教学. 本书图文并茂, 通俗易懂, 便于自学, 可作为高职高专经济类专业的数学课程教学用书, 也可作为相关人员学习数学的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

经济数学. 上册/周光亚主编. —天津: 天津大学出版社, 2012. 8

高等职业教育“十二五”规划教材

ISBN 978 - 7 - 5618 - 4397 - 0

I. ①经… II. ①周… III. ①经济数学—高等职业教育—教材 IV. ①F224

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 187865 号

出版发行 天津大学出版社

出 版 人 杨欢

地 址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编: 300072)

电 话 发行部: 022 - 27403647

网 址 publish. tju. edu. cn

印 刷 天津泰宇印务有限公司

经 销 全国各地新华书店

开 本 185mm × 260mm

印 张 9.25

字 数 231 千

版 次 2012 年 9 月第 1 版

印 次 2012 年 9 月第 1 次

印 数 1 - 3 000

定 价 25.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 烦请向我社发行部门联系调换

版权所有 侵权必究

前言

本书是根据教育部制订的高职高专教育高等数学课程教学基本要求,结合编者多年高职高专数学课程教学实践和改革的经验,同时借鉴国内外相关先进经验和优秀成果编写的高职高专经济类专业适用的数学教材.

一、本书的主要特点

1. 新颖的数学知识体系. 本书按照“以应用为目的”,“以必须够用为度”,“两个强化,一个结合”(强化数学认识,强化数学应用,笔算与机算相结合)的原则精心设计数学知识体系,主要创新点如下.

(1) 由于高中数学已经讲过一元函数微分法,因此本书重新整合了一元和多元函数及其微分法知识体系,让大一新生不但有机会力所能及地学习应用中需要的多元函数微分法知识,而且有利于提高学习兴趣和效率.

(2) 本书在曲线斜率、切线、导数和微分的意义,结合函数单调性和曲线凹凸性讨论函数变化规律、最优化问题等方面都有独特的观点或视角.

(3) 对于应用中重要的规划问题,不讲冗繁的求解理论(如单纯形法),而是着重讨论建模过程,然后用数学软件方法求解,增强了应用性,同时降低了学习难度.

(4) 线性代数采用全新的知识体系:首先结合机算完成线性方程组的相容性及求解方法的讨论,再以此为基础讨论其他线性代数问题,如线性相关性、向量方程与矩阵方程、线性变换、投入产出模型等;要求灵活运用线性方程组、向量方程、矩阵方程3种形式建立数学模型,并能互相转化求解;行列式被作为基于矩阵的一种运算规则,淡化它的计算技巧和传统应用,增加它的几何应用.

(5) 结合经济应用,力求使概率论知识与中学数学有机衔接,并用机算方法突破传统的查表计算方法.

(6) 在区间估计、假设检验、回归分析等数理统计方法中更多地引入机算,并将计算程序化,使其更加贴近现代社会的实际应用.

2. 独特的计算机辅助教学. 本书将数学软件作为教学辅助工具全面融入数学教学体系,并由此带来教学观念、教学内容和要求、教学方法的转变. 书中利用数学软件描绘函数图形帮助进行数学认识和分析问题,并形成一种有效的数学分析方法;计算被理解为笔算与机算相结合,从应用出发,侧重掌握基本计算规则和方法,减少传统计算内容,如洛必达法则、分部积分法等,降低笔算要求,增加机算要求;讨论更多实际和有用(可能笔算难以讨论)的问题;开展数学

实验,教、学、做相结合,尝试探究性学习方式,培养学生的创造能力.本书采用数学软件 *Mathcad*,它更加易学易用,便于交流.

3. 通俗性、专业针对性与科学性的有机结合.本书深入浅出,通俗易懂,符合高职高专学生认知水平和能力;具有较强的经济类专业针对性,将数学知识和方法与经济应用案例有机结合,并有相对深入的经济数学问题的专题讨论,旨在培养学生应用数学的意识和初步能力;同时尊重数学的科学性和系统性,注重数学课程在提高学生的科学文化素养、培养学生严谨的治学态度和认真踏实的工作作风方面的作用.

4. 教材立体化的新尝试.我们正在开发与本书配套的课程教学资源(包括《课程教学质量标准》、《课程教学大纲》、《课程授课计划》、《课程教学方案》、《课程学习指南》、《课程学习记录》、ppt 电子教案、自主阅读材料、数学实验方案、习题集、自测系统和考试系统等),将在以后陆续出版或提供交流.

二、给学生的建议

1. 乐于学习数学.相信数学学习对于你是极其重要、终身受用的,即使你可能感到所学的数学知识在你的专业课程或工作岗位中出现不多.数学学习将很好地培养你的科学思维能力和习惯、提高你的科学文化素养,这些对于你的可持续发展是必不可少的,并且数学的应用本来是极其广泛的,只是你需要学会怎样去应用.

2. 课堂上保持与教师同步.无论你的实际程度是超前还是暂时落后,都应优先做好本堂课应做的一切,充分利用课堂这一最为宝贵的资源.

3. 充分认识自学的重要性.自学习惯和能力是在大学学习期间需要重点培养的.自学是大学学习的重要环节.在听课和完成作业之外,还应有大量时间读书和查阅资料.我们在书中所编写的内容可能超过你的老师对你的要求.你应当保证这些要求但也不要拘泥于这些要求;另一方面,多与老师和同学交流、讨论问题.

4. 多动手.你最好在听课或读书的同时,亲自在练习本或草稿纸上动手演算,这可能会收到事半功倍的效果.手脑并用是数学学习特别需要的学习方法.有条件时,最好多做一些上机实验题(通常在这些题的序号后标有“(M)”字样).

5. 认真对待作业.尽量充分地做好准备以后再做习题,力求在做每一道题后都有新的收获.习题解答应做到过程完整、理由充分、表述清楚、书写工整,养成严谨负责的工作作风和习惯.每学完一个单元,最好做一个简短的小结.

三、写给教师的话

1. 关于数学软件 *Mathcad* 的使用.本书采用的数学软件为 *Mathcad 2001*

和 *Mathcad 14*, 两种版本各有优缺点. 与本书配套的 *ppt* 电子教案中包括 *Mathcad* 例题和数学实验的链接, 前者为教师进行 *Mathcad* 课堂演示提供参考, 后者用于学生集中上机练习.

2. 关于练习题、习题和复习题. 本书尽可能使编排的章节与教学单元相对应, 以便编制授课计划. 本书每一节后编排一组练习题和习题. 其中练习题主要用于课堂练习, 并作为习题的热身. 习题主要用作课外作业. 每一章后编排一组自测题, 主要用于对本章的复习、小结和检验, 也可用于期末复习.

3. 关于学时安排的建议. 本书建议分两个学期使用, 第一学期使用上册, 64 学时, 第二学期使用下册, 64 学时或 48 学时; 也可根据本校实际在两册书中选择部分章节在一学期内使用. 加* 号的章节或段落为选学内容, 可根据计划教学时数适当取舍.

四、关于作者

参与编写本书的有周光亚、何祖国、卢传明和欧阳菊, 其中周光亚为主编, 何祖国为副主编. 教育部高等学校教学指导委员会委员李以渝教授和四川工程职业技术学院徐诗勤副院长担任本书的主审. 学院各级领导, 特别是基础部邹毓文主任、经管系曾国勋主任对本书的编写以及相关的教学改革给予了支持、指导和帮助. 天津大学出版社的领导和编辑们以其专业、严谨的工作, 使本书增色不少! 在此一并表示感谢!

因作者水平有限, 加之时间仓促, 书中难免存在疏漏或错误, 敬请读者指正.

编 者
2012 年春

目 录

第1章 函数、极限与连续	1
1.1 函数与初等函数	1
习题 1.1	8
1.2 经济数学模型	9
习题 1.2	12
1.3 极限及其代数运算	13
习题 1.3	20
1.4 无穷小与无穷大、两个重要极限	20
习题 1.4	24
1.5 函数的连续性	25
习题 1.5	29
第1章自测题	29
第2章 导数与微分	31
2.1 导数概念	31
习题 2.1	38
2.2 导数的四则运算法则	38
习题 2.2	40
2.3 高阶导数、反函数求导法则	41
习题 2.3	44
2.4 链式法则、求初等函数的导数	44
习题 2.4	48
2.5 隐函数求导方法	49
习题 2.5	52
2.6 微分	52
习题 2.6	55
第2章自测题	55
第3章 导数的应用	58
3.1 函数的单调性与曲线的凹凸性	58
习题 3.1	61
3.2 函数的极值	61
习题 3.2	66
3.3 函数的最大值与最小值	66
习题 3.3	72
3.4 边际分析与弹性分析	73
习题 3.4	77
第3章自测题	78

第4章 定积分与不定积分及其应用	80
4.1 定积分概念和性质	80
习题 4.1	84
4.2 微积分基本公式	85
习题 4.2	87
4.3 不定积分	87
习题 4.3	90
4.4 换元积分法	90
习题 4.4	94
4.5 反常积分	95
习题 4.5	96
4.6 定积分在经济中的应用	97
习题 4.6	101
第4章自测题	102
第5章 常微分方程初步	104
5.1 可分离变量的微分方程	104
习题 5.1	106
* 5.2 一阶线性微分方程	107
* 习题 5.2	109
* 5.3 用 given - odesolve 求解模块求解常微分方程	109
* 习题 5.3	111
第5章自测题	112
附录 Mathcad 入门	113
附表 Mathcad 常用运算符	129
习题参考答案	131
参考文献	140

第 1 章 函数、极限与连续

函数是用数学术语来描述现实世界的主要工具,也是微积分的研究对象. 极限是微积分的基本研究方法. 连续是函数的重要性态,也是微积分许多重要理论的基础.

1.1 函数与初等函数

1.1.1 函数

变量与常量 在某一过程中其值发生变化,或可取不同值的量称为**变量**;其值不变,或取相同值的量称为**常量**.

例如,假定在一定时期内,某商品的价格 p 是不变的,这时 p 是常量,而该商品的销售量 Q 和销售额 R 都在变化,因此 Q 和 R 都是变量. 又如,考察某一个班级的学生的情况时,不同学生的年龄、身高、体重是不完全相同的,即这些量可取不同值,因此这些量都是变量,而他们的学制应该相同(例如 3 年),因此学制是常量.

变量与常量是相对的,随着研究目的或条件的改变,它们是可能互相转化的. 例如,商品价格 p 在一定时期内也可能发生变化,这时 p 就是变量.

值得关注的是变量之间的相互关系. 例如,销售额 R 显然依赖于价格 p 和销售量 Q . 事实上, $R = pQ$. 当价格 p 不变,即 p 是常数时,就说 R 是 Q 的一元函数;当 p 和 Q 都是变量时,就说 R 是 p 和 Q 的二元函数.

函数定义 设变量 x 在非空集合 D 中取值, y 是实数变量. 如果对于变量 x 在 D 中的每一个值,通过某种规则 f ,有 y 的唯一确定的值与之对应,则称规则 f 是(定义在 D 上的)一个**函数**,或者说 y 是 x 的函数,记作 $y = f(x)$. D 称为函数 $f(x)$ 的**定义域**,全体函数值的集合 $\{y | y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的**值域**, x 称为自变量, y 称为因变量.

如果 D 是全体 n 元有序实数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的集合(记为 $\mathbf{R}^n$)的子集,即自变量 x 是 n 元有序实数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$,就说 $f(x)$ 是一个 n 元函数,常记作 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. 特别地,当 $n = 1$ 时,即 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集,亦即 x 是实数变量时, $f(x)$ 就是之前讨论过的一元函数;当 $n = 2$ 时, $f(x)$ 是一个二元函数,常记作 $z = f(x, y)$,也说 z 是 x 和 y 的二元函数(x 和 y 也称为自变量).

当 $n \geq 2$ 时, n 元函数统称为**多元函数**. 多元函数与一元函数有很多质的差异,而多元函数之间则主要表现为量的差异,因此本书在讨论多元函数时,主要讨论二元函数.

例 1 函数 $Q = AL^\alpha K^{1-\alpha}$ 称为柯布-道格拉斯生产函数,其中 Q 是产值, A 是综合技术水平, L 是投入的劳动量, α 是劳动力产出弹性系数, K 是投入的资本. 如果 A 和 α 是常数,则 Q 是 L 和 K 的一个二元函数.

函数可想象为对每个允许的输入(即自变量的值)指定一个唯一确定的输出(即函数值)的机器. 输入构成了函数的定义域, 输出构成了函数的值域, 如图 1.1.1 所示.

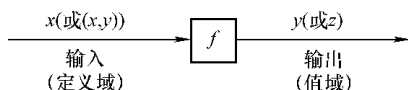


图 1.1.1 函数的“机器”图示

一元函数和二元函数的定义域 一元函数的定义域是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个子集, 常表现为一个实数区间或区间的并集.



二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域 D 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个子集, D 在几何上常表现为一个平面区域. 区域 D 一般由一条或多条曲线围成. 这些曲线称为区域 D 的边界. 包含全部边界的区域称为**闭区域**, 不包含任何边界的区域称为**开区域**. 如果存在正数 M , 使区域 D 包含于圆盘 $x^2+y^2 \leq M^2$ 内, 则称区域 D 是一个**有界区域**, 否则称 D 是一个**无界区域**.

实际问题中的函数的定义域是由问题的背景限定的. 例如, 如果自变量是距离, 则不能取负数; 如果自变量是人数, 则只能取非负整数, 等等. 当函数用一个公式表示时, 如果没有特定条件指定函数的定义域, 那么函数的定义域是指使公式有意义的自变量的集合. 如函数 $y=\ln(1+x)$ 的定义域是区间 $(-1, +\infty)$.

例 2 求二元函数 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的定义域.

解 要使函数式有意义, 应有

$$4-x^2-y^2 \geq 0 \quad \text{或} \quad x^2+y^2 \leq 4,$$

因此定义域为

$$D = \{ (x,y) \mid x^2+y^2 \leq 4 \}.$$

显然 D 是一个有界闭区域, 它的边界是圆 $x^2+y^2=4$.

函数的图形 一元函数的图形通常是一条平面曲线. 例如, 一次函数 $y=ax+b$ 的图形是一条直线, 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图形是一条抛物线, 反比例函数 $y=k/x$ 的图形是一条双曲线, 等等.

为了认识二元函数的图形, 先简要介绍空间直角坐标系和曲面方程的概念.

空间直角坐标系 一个空间直角坐标系由空间一点 O 和 3 条以 O 为原点的两两互相垂直的数轴: x 轴、 y 轴和 z 轴(也分别称为横轴、纵轴和竖轴)构成, 称为 $Oxyz$ 坐标系. O 称为**坐标原点**, 3 条数轴称为**坐标轴**, 它们的方向通常符合右手规则, 即分别以右手拇指、食指指向 x 轴正向和 y 轴正向时, 中指的指向就是 z 轴的正向, 如图 1.1.2 所示. 3 条坐标轴两两确定一个平面, 称为**坐标面**, 并依次把由 x 轴和 y 轴、 y 轴和 z 轴、 z 轴和 x 轴所确定的坐标面分别称为 xOy 面、 yOz 面和 zOx 面. 3 个坐标面将空间分为 8 个部分, 每一部分称为一个**卦限**. 8 个卦限的编号及位置如图 1.1.3 所示.

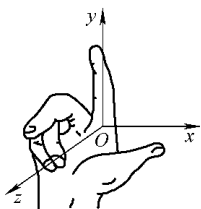


图 1.1.2

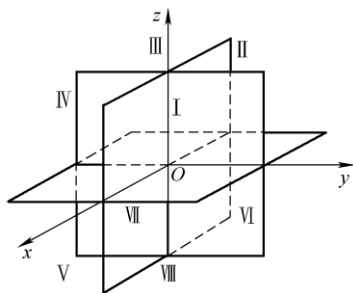


图 1.1.3

空间点的坐标 设 M 是空间任意一点,依次过 M 作与 x 轴、 y 轴和 z 轴垂直的平面,垂足依次为 P, Q 和 R (图 1.1.4), 设它们的坐标依次为 x, y 和 z , 称有序数组 (x, y, z) 为点 M 的坐标, x, y 和 z 依次称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

设在 $Oxyz$ 坐标系中有一个空间曲面 Σ . 如果 Σ 上每一点的坐标 (x, y, z) 都是方程 $F(x, y, z) = 0$ 的解, 不在 Σ 上的点的坐标都不是 $F(x, y, z) = 0$ 的解, 就说 $F(x, y, z) = 0$ 是曲面 Σ 的方程, Σ 是方程 $F(x, y, z) = 0$ 的图形. 例如, 方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的图形是球心在原点, 半径为 2 的球面, 或者说这个球面的方程是 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, 如图 1.1.5 所示. 又如三元一次方程 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的图形是一个平面, 而方程 $z = a$ 表示一个垂直于 z 轴的平面(该平面上任意点的竖坐标都等于 a).

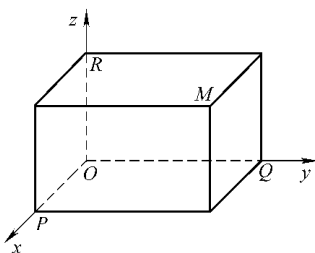


图 1.1.4

二元函数的图形 二元函数的图形通常是一个空间曲面. 例如, 函数 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 的图形是一个上半球面, 如图 1.1.6 所示.

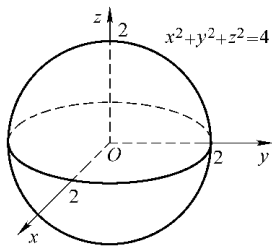


图 1.1.5

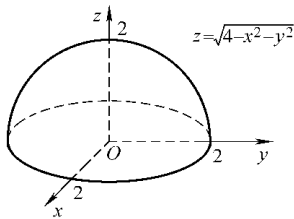


图 1.1.6



函数的特性 在中学已经讨论过一元函数的一些基本特性, 如奇偶性、单调性、周期性和有界性. 对于二元函数 $z = f(x, y)$, 也可以讨论一些类似的特性.

一元函数的奇偶性在几何上表现为某种对称性. 例如, 若 $f(x)$ 是偶函数, 则对于定义域内任意 x , 有 $f(-x) = f(x)$, 表现在几何上, 即函数图形上任意点 (x, y) 关于 y 轴的对称点 $(-x, y)$ 也在图形上, 因此函数图形关于 y 轴对称. 类似地也可以讨论二元函数(图形)的一些对称性. 例如, 如果对于定义域内任意 (x, y) , 有 $f(-x, y) = f(x, y)$, 即图形上点 (x, y) ,

z) 关于 yOz 面的对称点 $(-x, y, z)$ 也在图形上, 则 f 的图形关于 yOz 面对称; 如果 $f(-x, y) = -f(x, y)$, 即图形上点 (x, y, z) 关于 y 轴的对称点 $(-x, y, -z)$ 也在图形上, 则 f 的图形关于 y 轴对称, 等等. 一般地, 如果某空间图形上任意点关于某坐标面(轴)的对称点都在该图形上, 那么这个图形关于该坐标面(轴)对称.

又如, 也可与一元函数类似地定义二元函数的有界性: 如果存在 $M \geq 0$, 对于区域 D 中任意的 (x, y) , 都有 $|f(x, y)| \leq M$, 就说函数 $z = f(x, y)$ 在 D 上有界. 它表现在几何上, 就是函数图形在 D 上这部分界于两个水平平面(如 $z = \pm M$) 之间.

例 3 指出下列函数的图形的对称性:

$$(1) y = \frac{\sin x}{1+x^2};$$

$$(2) z = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

解 (1) 因为函数是奇函数, 所以函数的图形关于原点对称, 如图 1.1.7 所示;

(2) 以 $(-x, y, z)$ 代替 (x, y, z) , 方程不变, 即点 (x, y, z) 关于 yOz 面的对称点 $(-x, y, z)$ 都在函数图形上, 所以函数的图形关于 yOz 面对称; 以 $(x, -y, -z)$ 代替 (x, y, z) , 方程不变, 即点 (x, y, z) 关于 x 轴的对称点 $(x, -y, -z)$ 都在函数图形上, 所以函数的图形关于 x 轴对称, 如图 1.1.8 所示.

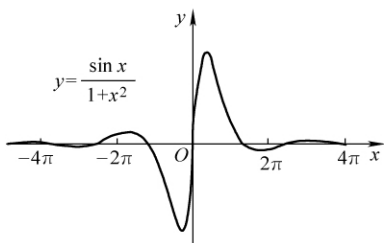


图 1.1.7

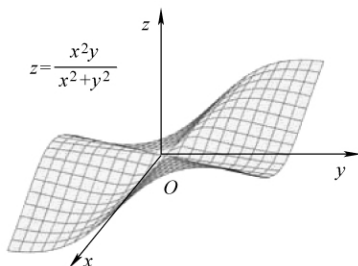


图 1.1.8

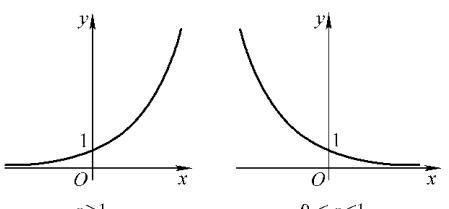
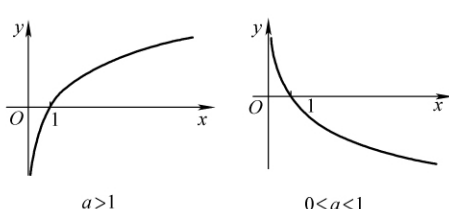
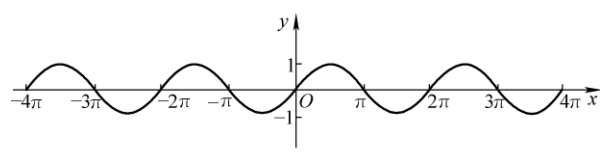
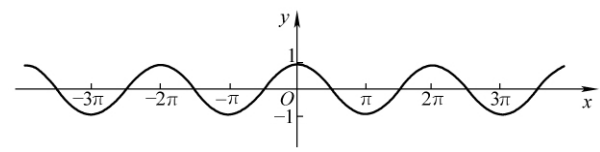
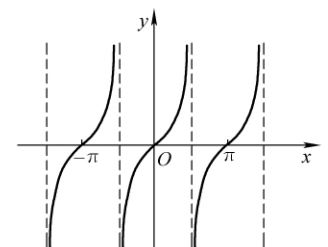
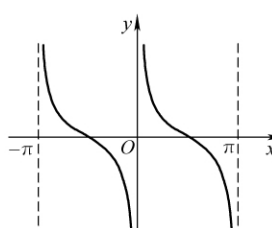
1.1.2 初等函数

基本初等函数 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数, 见表 1.1.1.

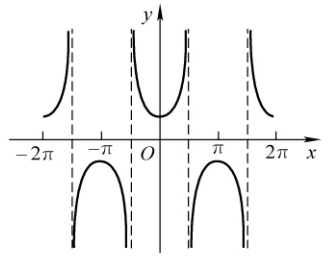
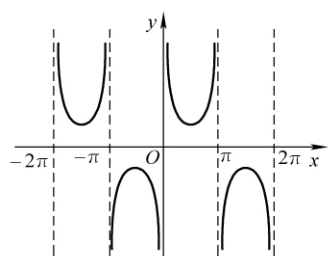
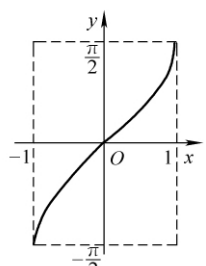
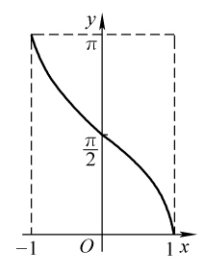
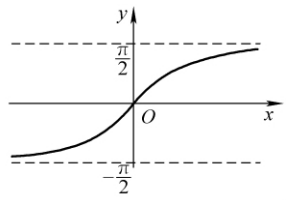
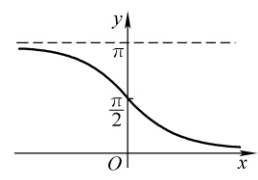
表 1.1.1

函 数	图 形
幂函数 $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$) 定义域和值域随 α 的值而定	

续表

函 数	图 形
指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 定义域 $(-\infty, +\infty)$, 值域 $(0, +\infty)$	 $a > 1$ $0 < a < 1$
对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 定义域 $(0, +\infty)$, 值域 $(-\infty, +\infty)$	 $a > 1$ $0 < a < 1$
三角函数	正弦函数 $y = \sin x$ 定义域 $(-\infty, +\infty)$ 值域 $[-1, 1]$ 
	余弦函数 $y = \cos x$ 定义域 $(-\infty, +\infty)$ 值域 $[-1, 1]$ 
	正切函数 $y = \tan x$ 定义域 $\left\{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ 值域 $(-\infty, +\infty)$ 
	余切函数 $y = \cot x$ 定义域 $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ 值域 $(-\infty, +\infty)$ 

续表

	函 数	图 形
三角函数	正割函数 $y = \sec x$ 定义域 $\left\{ x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$ 值域 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	
	余割函数 $y = \csc x$ 定义域 $\{ x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z} \}$ 值域 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	
反三角函数	反正弦函数 $y = \arcsin x$, 它是 $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ 的反函数 定义域 $[-1, 1]$ 值域 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$	
	反余弦函数 $y = \arccos x$, 它是 $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$ 的反函数 定义域 $[-1, 1]$ 值域 $[0, \pi]$	
	反正切函数 $y = \arctan x$, 它是 $y = \tan x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ 的反函数 定义域 $(-\infty, +\infty)$ 值域 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$	
	反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$, 它是 $y = \cot x$, $x \in (0, \pi)$ 的反函数 定义域 $(-\infty, +\infty)$ 值域 $(0, \pi)$	

复合函数 设函数 $y = \sqrt{u}$, $u = 1 + x$, 由它们组合得到的新函数 $y = \sqrt{1+x}$ 称为由这两个函数构成的复合函数.

一般地, 如果函数 $u = g(x)$ 的某些输出可以作为函数 $y = f(u)$ 的输入, 则由 f 和 g 组成的函数 $f[g(x)]$ 称为由 f 和 g 构成的复合函数.

例4 写出构成下列复合函数的简单函数:

$$(1) y = \cos \sqrt{1-x^2}; \quad (2) y = e^{\tan^2 x}.$$

解 (1) $y = \cos u$, $u = \sqrt{v}$, $v = 1 - x^2$;

(2) $y = e^u$, $u = v^2$, $v = \tan x$.

注 所谓简单函数, 通常指常数或基本初等函数或它们通过加、减、乘、除运算组合得到的函数.

多元函数也有复合函数. 例如由函数 $z = \sqrt{u}$ 和 $u = x^2 + y^2$ 构成的复合函数是 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

初等函数 由常数或基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合所形成的能用一个式子表示的函数称为初等函数.

例如下面的函数都是初等函数:

$$y = x^2 - 2x + 3, z = x^2 + y^2, y = \ln(1+x), z = \ln(x+y).$$

本书中讨论的函数一般都是初等函数.

下面举一个非初等函数的例子.

例5(企业所得税) 我国关于企业所得税的计税规定如下: 计税所得额大于10万元的, 所得税率为33%; 计税所得额不大于10万元, 大于3万元的, 所得税率为27%; 计税所得额不大于3万元的, 所得税率为18%. 应纳税额 = 税率 × 计税所得额. 试列出企业应纳税额与计税所得额之间的函数关系.

解 设企业计税所得额为 x 万元, 应纳税额为 y 万元, 则其函数关系为

$$y = \begin{cases} 0.18x, & 0 \leq x \leq 3, \\ 0.27x, & 3 < x \leq 10, \\ 0.33x, & x > 10. \end{cases}$$

y 是一个分段函数. 由于它不能用一个式子表示, 因此它不是初等函数. 分段函数大都不是初等函数, 但也有分段函数是初等函数. 例如 $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 是一个分段函数, 但 $|x| = \sqrt{x^2}$, 所以它是一个初等函数.

练 习 题

1. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{\sqrt{-x^2 - 3x + 4}}{x}; \quad (2) z = \sqrt{x-y} + \ln(2x+y).$$

2. 在表 1.1.2 中填写点 (a, b, c) 关于指定坐标面或坐标轴的对称点的坐标.

表 1.1.2

坐标面			坐标轴		
xOy 面	yOz 面	zOx 面	x 轴	y 轴	z 轴

3. 下列函数的图形具有怎样的对称性:

(1) $f(x) = e^x + e^{-x}$; (2) $g(x) = e^x - e^{-x}$; (3) $f(x, y) = x^2y$.

习 题 1.1

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1, \\ 1 - x, & 1 < x < 2, \end{cases}$ 求 $f(0)$, $f(1)$, $f\left(\frac{5}{4}\right)$.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{x+2} + \frac{1}{x^2-1}$;

(2) $y = \sqrt{2-x} + \lg x$;

(3) $z = \sqrt{x-\sqrt{y}}$;

(4) $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$.

3. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 2]$, 值域是 $[0, 1]$, 图形如图 1.1.9 所示. 试确定下列函数的定义域和值域, 并作出它们的草图:

(1) $f(x) + 2$; (2) $2f(x)$; (3) $-f(x)$;
(4) $f(x-1)$; (5) $f(-x)$; (6) $-f(x+1) + 1$.

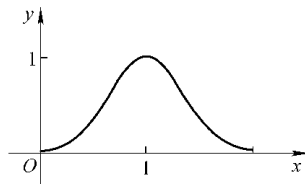


图 1.1.9

4. 下列函数的图形具有怎样的对称性:

(1) $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$;

(2) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

5. 下列函数的图形关于坐标面(轴)具有怎样的对称性:

(1) $z = 2x - y^2$;

(2) $z = xy^2$.

6. 写出构成下列复合函数的简单函数:

(1) $y = \sqrt{5x-1}$;

(2) $y = \sin^2 x$;

(3) $y = \tan \sqrt{2x-1}$;

(4) $y = e^{\cos x}$;

(5) $y = e^{-\sin^2 \frac{1}{x}}$;

(6) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

7. (M)^① 试确定 x, y 的适当范围, 作下列函数的图形:

(1) $f(x) = |x^2 - 1|$;

(2) $f(x) = \frac{6x^2 - 15x + 6}{4x^2 - 10x}$;

(3) $z = x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 6y + 5$;

(4) $z = xy^2$.

^① 标有“(M)”的题目可利用数学软件, 如 Mathcad 解答.

1.2 经济数学模型

1.2.1 经济学中的常用函数

效用函数 消费者消费的目的是得到满足. **效用**是用来衡量消费者满足程度的一个数. 效用大表示满足程度高; 效用小表示满足程度低; 如果消费使人感受到痛苦, 则效用为负. 效用 U 与所消费的商品组合之间的数量关系的函数 $U = U(X, Y, Z, \cdots)$ 称为**效用函数**, 其中 $X, Y, Z, \cdots$ 分别代表消费者所拥有或消费的各种商品的数量. 它被用以衡量消费者从消费既定的商品组合中所获得满足的程度. 美国经济学家萨缪尔森提出了一个有趣的公式:

$$\text{幸福} = \frac{\text{效用}}{\text{欲望}}.$$

需求函数 某种商品的**需求量** Q 是指购买者愿意并且能够购买这种商品的数量. 影响需求量的因素很多, 如人口数、收入水平、存款余额、商品价格、消费者的偏好等. 如果只考虑商品价格 p 变动对商品需求量 Q 的影响, 这时需求量就是价格 p 的一元函数 $Q = Q(p)$, 称为**需求函数**. 需求函数的图形称为**需求曲线**.

思考 根据生活经验, 你认为需求函数 $Q = Q(p)$ 是否具有某种单调性?

常见的需求函数如下.

(1) 线性需求函数: $Q = a - bp$, 其中 $a > 0, b > 0$ 是常数. a 也就是当 $p = 0$ 时的需求量, 即**最大需求量**, 也称为**饱和需求量**.

(2) 二次需求函数: $Q = a - bp^2$, 其中 $a > 0, b > 0$ 是常数.

(3) 指数需求函数: $Q = Aa^{-bp}$, 其中 $A > 0, a > 1, b > 0$ 是常数.

思考 以上3种需求函数各自具有怎样的特点?

供给函数 某种商品的**供给量**是指经营者愿意并且能够出售这种商品的数量. 供给量受产品成本、技术、价格(包括对其他商品的估计或预测价格)等多种因素影响. 如果只考虑价格因素的影响, 这时供给量 Q 就是价格 p 的一元函数 $Q = q(p)$, 称为**供给函数**. 供给函数的图形称为**供给曲线**.

在一般情况下, 供给函数 $Q = q(p)$ 是增函数.

思考 根据市场规律, 在下列情形下, 价格 p 可能产生怎样的变化?

(1) $q(p) > Q(p)$, 即供过于求.

(2) $q(p) < Q(p)$, 即供不应求.

(3) $q(p) = Q(p)$, 即供需平衡.

供需平衡时的价格称为**均衡价格**.

总成本函数 这里简单地将生产经营中所发生的各项耗费的总和称为**总成本**, 也称为**总费用**, 并将它简单地分为固定成本和可变成本两部分. **固定成本**是指数量相对固定不变, 与产量或销售量没有直接关系的成本, 如厂房、设备等; **可变成本**是指随产量或销售量变动而变动的成本, 如原材料消耗、能源消耗、劳动者报酬等. 总成本 C 通常可作为产量(或销