线性代数

LINEAR ALGEBRA

主编 / 黄秀花　纳艳萍

黄河出版传媒集团
阳光出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 黄秀花，纳艳萍主编. —银川：阳光出版社，2014.11

ISBN 978-7-5525-1609-8

I. ①线… II. ①黄… ②纳… III. ①线性代数—高等学校—教材 IV.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 290097 号

线性代数 黄秀花 纳艳萍 主编

责任编辑	赵维娟 朱双云
封面设计	齐玉成
责任印制	岳建宁

黄河出版传媒集团
阳 光 出 版 社 出版发行

地 址	宁夏银川市北京东路 139 号出版大厦(750001)
网 址	http://www.yrpubm.com
网上书店	http://www.hh-book.com
电子信箱	yangguang@yrpubm.com
邮购电话	0951-5045842
经 销	全国新华书店
印刷装订	宁夏捷诚彩色印务有限公司
印刷委托书号	(宁)0000149
开 本	880mm×1230mm 1/32
印 张	8.25
字 数	200 千字
版 次	2014 年 12 月第 1 版
印 次	2014 年 12 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5525-1609-8/G·1593
定 价	24.00 元

前　言

PREFACE

线性代数是一门重要的基础课程，内容有很强的抽象性和逻辑性. 线性问题广泛存在于自然科学的各个领域，某些非线性问题常常也可以转化为线性问题来处理,在计算机普遍应用的今天，线性代数的理论和方法已经成为从事自然科学和工程技术工作不可缺少的工具. 因此掌握线性代数的基本概念和基本方法对每个科技人员来说是必需的.

本书是根据高等学校基础理论教学“以应用为目的,以必须够用为度”的原则,按照教育部制定的《线性代数课程教学基本要求》,在吸收国内外教材的优点并结合多年教学经验的基础上编写而成. 根据非数学专业学生使用的需要,以矩阵作为贯穿全书的主线. 我们编写本书的指导思想是：力图使教材既体现线性代数本身的系统性、严密性,又符合知识引入自然合理、文字叙述通俗易懂的原则.

全书共分 6 章,主要内容有:矩阵及行列式、矩阵的初等变换、向量组的线性相关性、线性方程组、特征值与特征向量、线性空间与线性变换. 第

6 章的内容超出了理工科线性代数课程的教学基本要求,仅供部分对数学基础要求较强的专业选修.

本书每节配有适量的、有针对性的习题,供读者在练习中进一步掌握本节的知识点. 另外每章还选配了总习题,类型有填空题、选择题、解答题和证明题,给学生提供了更大的选择空间,书后还配备了标准答案.

本书主线清晰,结构紧凑,问题处理简洁明了,易于理解,便于自学和把握.另外,本书还给出了一些重要概念的数学典故和数学背景,增强了可读性和趣味性.

本书第 1,2,4 章由黄秀花编写,第 3,5,6 章由纳艳萍编写.

本书的出版得到了宁夏大学新华学院和宁夏大学教育教学改革项目的资助.宁夏大学刘锐教授和赵雪芬老师对本书的编写给予了很大帮助,在此我们表示衷心感谢!

由于编者水平有限,书中内容、结构不当甚至错误在所难免,敬请读者批评指正.

编　者

2014 年 9 月

目　录

CONTENTS

第 1 章　矩阵及行列式

矩阵是线性代数的主要研究对象之一. 它贯穿于线性代数的各个方面,是求解线性方程组的有力工具,也是自然学科、工程技术和经济研究等领域处理线性模型的重要工具.

本章从实际问题出发,引出矩阵的概念,进而系统地介绍矩阵的基本运算及方阵的行列式.

§1.1　矩阵的概念

这一节我们主要介绍矩阵的定义及几种特殊矩阵.

一、矩阵的概念

例 1.1　某航空公司在 A,B,C,D 四城市之间开辟了若干航线,用图 1.1 表示四个城市间的航班,若从 A 到 B 有航班,则用带箭头的线段连接 A 与 B.

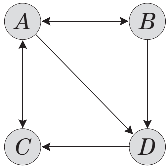

图 1.1

为了便于研究,1 表示有航班,0 表示没有航班. 则图 1.1 可用一个数表表示:

$$
\begin{array}{c}
 & A & B & C & D \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}
\end{array}
$$

该数表反映了四城市间的航班情况.

例 1.2　某种物资有 3 个产地,4 个销地,调配量如表 1.1 所示.

表 1.1

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	6	3	5
A_2	3	1	2	0
A_3	4	0	1	2

那么,表中的数据可以构成一个矩形数表:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}
$$

在预先约定行列意义的情况下,这样的简单矩形数表就能表明整个产销调配的状况.

例 1.3　线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

其中 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 代表 n 个未知量，m 是方程的个数，$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 称为方程组的系数，$b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 称为常数项. 为了便于研究和求解线性方程组，我们把系数和常数项取出并按原来的位置排成下列矩形数表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

并对这个矩形数表进行操作，就可以简化运算的表达形式，达到求解方程组的目的.

不同的问题，去掉数表中数据的实际含义，我们抽象得到如下矩阵的概念.

定义 1.1　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 按一定顺序排成一个 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵（m 行 n 列的矩阵），简称**矩阵**. 横的各排称为矩阵的行，竖的各排称为矩阵的列，其中 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列的元素（$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$）.

元素为实数的矩阵称为**实矩阵**，元素为复数的矩阵称为**复矩阵**. 本书主要讨论实矩阵.

我们一般用大写黑体字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 表示矩阵，有时为了体现矩阵的行列数，在大写字母右下角添加下标，如 $m\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或者 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$.

在 $m\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，如果 $m=n$，就称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方（矩）阵，

简称为方阵;一阶方阵也常作为一个数对待.

在 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 中,位于相同行、列交叉位置的元素 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**主对角线元素**,由其排成的对角线称为方阵的主对角线.

二、几种特殊的矩阵

1.行矩阵和列矩阵

仅有一行的矩阵称为行矩阵,行矩阵记为

$$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

仅有一列的矩阵称为列矩阵,列矩阵记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

2.零矩阵

若一个矩阵的所有元素都为零,则称这个矩阵为**零矩阵**.例如,一个 $s\times n$ 零矩阵记为 $\boldsymbol{O}_{s\times n}$,在不会引起混淆的情形下,常记为 $\boldsymbol{O}$.

3.三角矩阵

主对角线下(上)方的元素全为零的方阵称为**上(下)三角矩阵**.例如 $n\times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为 n 阶上三角矩阵.

又例如 $n\times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为 n 阶下三角矩阵.

4. 对角矩阵

除主对角线上的元素 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 外,其余元素全为零的方阵称为对角矩阵. 例如 $n\times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为 n 阶**对角矩阵**,通常简记为 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$.

显然对角矩阵既是上三角矩阵,也是下三角矩阵.

5. 数量矩阵

主对角线元素全相等的对角矩阵称为**数量矩阵**. 例如 $n\times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

为 n 阶数量矩阵.

6. 单位矩阵

主对角线上元素全为 1 的数量矩阵称为**单位矩阵**. 例如 $n\times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

为 n 阶单位矩阵，记为 $\boldsymbol{E}_n$. 在不会引起混淆的情况下，常简记为 $\boldsymbol{E}$.

后面将看到零矩阵和单位矩阵在矩阵运算中起着类似于数字 0 和 1 的作用.

当两个矩阵的行数和列数分别相等时，称它们是**同型矩阵**.

7. 行阶梯形矩阵

若一个矩阵的零行（如果有的话）均在非零行的下方，并且每个非零行的首个非零元（即该行从左至右的第一个非零元素）的列标随着行标的增大而增大，则称此矩阵为**行阶梯形矩阵**.

例如

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

都是行阶梯形矩阵.

定义 1.2 如果两个同型矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$ 其对应元素相等，即 $a_{ij} = b_{ij}$，那么称**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等**，记为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

例 1.4 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2-b & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} c+1 & -4 \\ 0 & 3d \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$，试求 a,b,c,d.

解 因为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$，从而有

$$1 = c+1, a = -4, 2-b = 0, 3 = 3d$$

所以

$$a=-4,b=2,c=0,d=1.$$

习题 1.1

1. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\a&2&1\\b&c&1\end{pmatrix}$ 为上三角形矩阵，试求 a,b,c.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&5&8\\-1&2&4&6\\3&5&7&-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&2&5&8\\-1&b&4&6\\c&5&7&-2\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，试求 a,b,c.

§1.2　矩阵的运算

矩阵的运算主要包括矩阵的线性运算、乘法运算以及矩阵的转置. 这些运算有的与通常数的运算类似，有的则有很大区别.

一、矩阵的线性运算

1. 矩阵的加法和减法

定义 1.3　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个同型矩阵，称 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{C}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$
$$=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&\cdots&a_{1n}+b_{1n}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&\cdots&a_{2n}+b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}+b_{m1}&a_{m2}+b_{m2}&\cdots&a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$$

为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的和**，记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

例 1.5 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 7\\ -1 & 5 & -5\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}9 & 4 & -1\\ 7 & 3 & 2\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}&=\begin{pmatrix}3 & 2 & 7\\ -1 & 5 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9 & 4 & -1\\ 7 & 3 & 2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}3+9 & 2+4 & 7+(-1)\\ -1+7 & 5+3 & -5+2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}12 & 6 & 6\\ 6 & 8 & -3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

归纳总结：在矩阵的加法运算中应该注意：

（1）只有当两个矩阵同型时，才能进行加法运算，且其和矩阵仍是与它们同型的矩阵.

（2）和矩阵的元素是两个矩阵对应元素的和.

称 $m\times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix}-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn}\end{pmatrix}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的负矩阵，记为 $-\boldsymbol{A}$，即 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$.

称 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$ 为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的差**，记为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，即矩阵的减法定义为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

矩阵的加、减法与实数的加、减法有一些类似的运算性质.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{O}$ 都是同型矩阵,则矩阵的加法满足下面的运算规律:

(1)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$(交换律);

(2)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$(结合律);

(3)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

(4)$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

例 1.6　(续例 1.5)　求 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

解　$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 9 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3-9 & 2-4 & 7-(-1) \\ -1-7 & 5-3 & -5-2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -6 & -2 & 8 \\ -8 & 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

2. 矩阵的数乘

定义 1.4　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,以数 k 乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素所得的矩阵,称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积,简称**数乘**,记作 $k\boldsymbol{A}$,即

$$k\boldsymbol{A}=k(a_{ij})_{m\times n}=(ka_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

从定义 1.4 可以看出,$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{O}$ 实际上是数 0 与 $m\times n$