超欧拉图与均衡问题

Chaooulatu yu
Junheng wenti

李霄民　龙宪军　著

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

超欧拉图与均衡问题

李霄民　龙宪军　著

重庆大学出版社

内容提要

本书介绍了超欧拉图的相关内容，包括超欧拉图的判定技巧——收缩法，重要图类 $C(L,K)$ 的超欧拉性，简化图的性质，超欧拉图的边数问题以及 (s,t) 超欧拉图的判定问题；同时也介绍了均衡问题的相关内容，包括均衡问题的几种适定性及解集的连通性等。

本书可作为相关方向研究人员的参考资料，也可作为相关方向研究生的学习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

超欧拉图与均衡问题 / 李霄民，龙宪军著. —重庆：重庆大学出版社，2014.8

ISBN 978-7-5624-8551-3

Ⅰ.①超… Ⅱ.①李…②龙… Ⅲ.①图论—研究 Ⅳ.①O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 199154 号

超欧拉图与均衡问题

李霄民 龙宪军 著

策划编辑：杨粮菊

责任编辑：李定群 高鸿宽 版式设计：杨粮菊

责任校对：关德强 责任印制：赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：邓晓益

社址：重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编：401331

电话：(023) 88617190 88617185(中小学)

传真：(023) 88617186 88617166

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

POD：重庆书源排校有限公司

*

开本：787×1092 1/16 印张：10.75 字数：175 千

2014 年 8 月第 1 版 2014 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5624-8551-3 定价：58.00 元

前言

1736年数学家欧拉为解决哥尼斯堡七桥问题,发表了第一篇图论论文,标志着图论的正式诞生。

由于计算机的广泛应用,图论在近半个世纪得到了飞速发展。作为一门应用学科,已广泛应用于计算机科学、物理学、化学、运筹学、经济学、控制论、网络理论、管理学等众多领域;同时这些学科的发展也促进了图论的发展。

均衡问题的概念最先由 Blum 和 Oettli 引入并研究。均衡问题作为一种广泛的数学模型,包括优化问题、变分不等式问题、相补问题、非合作博弈的 Nash 平衡问题以及不动点问题等许多重要问题的特殊情形。因此,国内外许多学者从各个不同的方向推广和发展了均衡问题的理论、方法和技巧,取得了许多重要的研究成果。然而均衡问题的许多性质还不完善,还需要人们去进一步研究。

本书主要介绍超欧拉图与均衡问题的相关研究成果。

第1章介绍了图论的一些基本知识和基本术语,为阅读后面的内容提供必要的基本知识。

第2章主要介绍了超欧拉图的判定问题。超欧拉图的判定问题是一个 NP-完全问题,寻找比较好的超欧拉图的充分条件,是一个判定超欧

拉图的基本问题。美国图论学者 Catlin 的收缩技巧,在判定超欧拉图时有十分重要的应用,Catlin 及他的学生在这方面做了大量的工作,引导这个方向的发展,本章重点叙述了作者在超欧拉图的判定问题的一些成果。主要有图类 $C(L, K)$ 的判定结果及超欧拉图与 Petersen 图的一些结果。

第 3 章介绍了超欧拉图的其他相关问题。介绍了超欧拉图中生成欧拉子图的边数问题及超欧拉图的推广形式——(s,t)-超欧拉图问题。超欧拉图中生成欧拉子图的边数问题,起源于 Catlin 的 2/3-猜想,后来发现 Catlin 的 2/3-猜想并不成立,后来的学者把它作为一个公开问题提出来。本章介绍了作者在研究这个问题的一些最新结果。(s,t)-超欧拉图问题是超欧拉图问题的推广,本章也介绍了判定(s,t)-超欧拉图的一些结果。

第 4 章考虑了带函数约束的均衡问题的 Levitin-Polyak 适定性。首先给出了带函数约束的均衡问题的几类 Levitin-Polyak 适定性的定义。然后讨论了各种 Levitin-Polyak 适定性的充分必要条件。最后在一定条件下,建立了这几类 Levitin-Polyak 适定性之间的关系。

第 5 章给出了对称拟均衡问题的 α-适定性的定义以及广义 α-适定性的定义。获得了对称拟均衡问题的 α-适定性的一些距离刻画。此外在有限维空间中,讨论了这两类 α-适定性与对称拟均衡问题解的一些关系。

第 6 章讨论了广义强向量拟均衡问题。在没有假设序锥的拓扑内部非空的情况下,利用

Kakutani-Fan-Glicksberg 不动点定理证明了广义强向量拟均衡问题解的存在性以及解集的封闭性,同时证明了广义强向量拟均衡问题解集的通有稳定性。

第 7 章研究了广义向量均衡问题弱有效解集的连通性。首先建立了广义向量均衡问题弱有效解的标量化刻画以及获得了其解的存在性。然后利用标量化结果,证明了这类向量均衡问题弱有效解集的连通性。

第 8 章讨论了非凸向量均衡问题的最优性条件。首先引入向量均衡问题拟 εe-弱有效解、εe-拟 Henig 真有效解、εe-拟全局有效解以及 εe-拟有效解的概念,并借助 Mordukhovich 次可微概念,在没有任何凸性条件下获得了向量均衡问题近似解的最优性条件。作为它的应用,还给出了非凸向量优化问题近似解的最优性条件。

本书是一部关于超欧拉图与均衡问题的专业书籍,全书由李霄民、龙宪军共同撰写,作者排名不分先后。分工如下:第 1 章至第 3 章由李霄民撰写,第 4 章至第 8 章由龙宪军撰写。

作者撰写本书,参阅了国内外大量的学术研究成果,在此向有关作者表示诚挚的感谢!

限于著者水平,书中缺点及欠妥之处在所难免,恳请专家和读者批评指正。

李霄民　龙宪军

2014 年 6 月

目录

第 1 章 图的基本知识

1.1 图的定义

一个图定义为一个有序对(V,E),记为$G=(V,E)$,其中,V是一个非空集合,称为顶点集,其元素称为顶点,$|V|$ 表示顶点数;E是由V中的点组成的无序点对构成的集合,称为边集,其元素称为边,并且同一点对在E中可出现多次.

图G的顶点集也记为$V(G)$,边集也记为$E(G)$. 顶点集和边集都有限的图称为有限图(finite graph). 只有一个顶点而无边的图称为平凡图(trivial graph). 边集为空的图称为空图(empty graph). 连接两个相同顶点的边的条数称为边的重数. 重数大于 1 的边称为重边(multiple edges). 端点重合为一点的边称为环(loop). 既没有环也没有重边的图,称为简单图(simple graph),边记为uv,也记uv为e,即$e=uv$,此时u和v是e的端点,并称u和v相邻(adjacent)、u(或v)与e相关联(incident). 所有与顶点v相邻接的顶点组成的集合由$N_G(v)$表示,称为顶点v的邻域,有时也简记为$N(v)$.

设有两个图$G_1=(V_1,E_1)$和$G_2=(V_2,E_2)$,若在其顶点集合之间存在一一对

应的关系,使得边之间有如下的关系:设 $u_1 \leftrightarrow u_2, v_1 \leftrightarrow v_2, u_1, u_2 \in V_1, u_2, v_2 \in V_2$; $u_1v_1 \in E_1$,当且仅当 $u_2v_2 \in E_2$,并且 u_1v_1 与 u_2v_2 的重数相同,则称两图同构(isomorphic),记为 $G_1 \cong G_2$.

每两个不同的顶点之间都有一条边相连的简单图称为完全图(complete graph). 在同构意义下,n 个顶点的完全图只有一个,记为 K_n. 所谓二分图(bipartite graph),是指具有二分类(X,Y) 的图,它的顶点集可分解为两个非空子集 X 和 Y,使得每条边的一个端点在 X 中,另一个端点在 Y 中;完全二分图(complete bipartite graph)是指具有二分类(X,Y) 的简单二分图,其中,X 中的每个顶点与 Y 的每个顶点相邻. 若 $|X| = m$, $|Y| = n$,则这样的完全二分图记为 $K_{m,n}$.

本文以下所提及的图均为无向无环的有限图. 设 G 是一个图,$d_G(u)$ 表示 G 中顶点 u 的度数(即与顶点 u 关联的边的数目),有时也简记为 $d(u)$. 度数为偶(奇)数的顶点称为图 G 的偶(奇)顶点. $O(G)$ 表示图 G 中奇顶点的集合. 用 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示 G 的顶点的最小度与最大度. 对于有限集合 X, $|X|$ 表示 X 中元素的个数. 关于图 G 的度数有下面的结论:

定理 1.1 图 $G = (V,E)$ 中所有顶点的度的和等于边数的 2 倍,即

$$\sum_{u \in V} d(u) = 2|E|$$

推论 1.1 在任何图中,奇顶点的个数为偶数.

对于图 G 与 H,若有 $V(H) \subseteq V(G)$,$E(H) \subseteq E(G)$,则称 H 是 G 的子图(subgraph),记为 $H \subseteq G$. 有时又称 G 是 H 的超图(supergraph). 图 G 的子图 H 称为 G 的生成子图,如果图 H 满足 $V(H) = V(G)$,对于图 $G = (V,E)$,若 $V1$ 是 V 的非空子集,以 $V1$ 为顶点集,以两端点均在 $V1$ 中的边的全体为边集所组成的子图,称为 G 的由 $V1$ 导出的子图,记为 $G[V1]$,简称为 G 的导出子图(induced subgraph). 导出子图 $G[V \backslash V1]$ 记为 $G\text{-}V1$,它是由 G 中删除 $V1$ 中的顶点以及与这些顶点相关联的边所得到的子图. 若 $V1 = \{v\}$,则把 $G\text{-}\{v\}$ 简记为 $G\text{-}v$. 对于图 $G = \{V,E\}$,若 $E1$ 是 E 的非空子集,以 $E1$ 为边集,以 $E1$ 中边的端点的全体为顶点集所组成的子图,称为 G 的由 $E1$ 导出的子图,记为 $G[E1]$,简称为 G 的边导出子图(edge-induced subgraph). 导出子图 $G[E \backslash E1]$ 记为 $G\text{-}E1$. 若 $E1 = \{e\}$,则把 $G\text{-}\{e\}$ 简记为 $G\text{-}e$.

1.2　图的连通性

图 G 的一条途径(walk)是指一个有限非空序列 $W = v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$,它的项交替地为顶点和边,使得对 $1 \leqslant i \leqslant k$,$e_i$ 的端点是 v_{i-1} 和 v_i. 称 W 是从 v_0 到 v_k 的一条途径,或一条 (v_0,v_k) 途径. 顶点 v_0 和 v_k 分别称为 W 的起点(origin)和终点(terminus). 整数 k 称为 W 的长(length). 在简单图中,途径可简单地由其顶点序列来表示,即 $W = v_0v_1v_2\cdots v_k$.

若途径 W 的边互不相同,则 W 称为迹(trail). 又若 W 的顶点也互不相同,则 W 称为路.

G 的两个顶点 u 和 v 是连通(connected)的,如果在 G 中存在 (u,v) 路. 如果 G 中任意两个顶点 u 和 v 都是连通的,则称 G 为连通图. 连通是顶点集 V 上的一个等价关系,它的每个等价类的导出子图称为 G 的连通分支(component),简单称为分支. 记 G 的分支数为 $\omega(G)$. 于是 G 是连通的当且仅当 $\omega(G) = 1$.

称一条途径是闭的(closed),如果它有正的长且起点和终点相同. 若一条闭迹的起点和内部顶点互不相同,则称它为圈(cycle). 长为 k 的圈,称为 k 圈;按 k 是奇数还是偶数,称 k 圈是奇圈和偶圈. 3 圈常称为三角形(triangle). 利用圈的概念,有以下二分图的一个特征:

定理 1.2　一个图是二分图当且仅当它不含奇圈.

不包含圈的图称为无圈图(acyclic graph),也称为森林;连通的无圈图,称为树(tree). 树也是森林. 关于树有以下常用结论:

定理 1.3　设图 $G = (V,E)$,则下列命题等价:

① G 是树.

② G 中任意两顶点间有且仅有一条路相连;G 是连通的,且 $|E| = |V| - 1$.

③ G 中无圈,且 $|E| = |V| - 1$.

④ G 中无圈,但在 G 中任意不相邻两顶点间增加一条边,就得到一个唯一的一个圈.

设 e 是图 G 的一条边，若 $\omega(G-e) > \omega(G)$，则称 e 为 G 的割边(cut edge). 连通图是树当且仅当它的每条边都是割边. 对于顶点集 V 的两个子集 S 和 $S1$，用 $[S,S1]$ 表示一个端点在 S 中，另一个端点在 $S1$ 中的全体边的集合. $[S,V—S]$ 称为图 G 的一个边割(edge cut)，其中 S 是 V 的非空真子集. 具有 k 条边的边割称为 k— 边割. 称图 G 的边数最少的边割的边数为 G 的边连通度(edge connectivity)，记为 $\kappa'(G)$. 平凡图和不连通图的边连通度为 0. 如果 $\kappa'(G) \geqslant k$，称 G 是 k— 边连通的.

顶点 v 称为图 G 的割点，如果 $\omega(G-v) > \omega(G)$. 对于 V 的子集 $V1$，如果 $G—V1$ 不连通，称 $V1$ 为 G 的一个顶点割. 称图 G 的顶点数最少的顶点割的顶点数为 G 的点连通度，记为 $\kappa(G)$. 如果 $\kappa(G) \geqslant k$，称 G 为 k— 连通的. 关于割边及连通度有如下结论：

定理 1.4　e 是图 G 的一条割边当且仅当 e 不含在 G 的圈中.

证明　设 e 是 G 的一条割边，因为 $\omega(G-e) > \omega(G)$，存在 G 的两点 u 和 v 在 G 中连通，但在 $G-e$ 中不连通，所以在 G 中存在一条 (u,v) 路 P 经过边 e. 设 $e = xy$，且在路 P 上 x 在 y 之前. 在 $G-e$ 中，通过 P 的一段把 u 连接到 x，通过 P 的一段把 y 连接到 v 上. 若 e 在 G 的圈 C 上，则在 $G-e$ 中，x 与 y 由路 $C-e$ 连通，于是 u 和 v 在 $G-e$ 中连通，与假设矛盾.

反过来，设 e 不是割边，即 $\omega(G-e)=\omega(G)$，因为在 G 中存在一条 (x,y) 路，x 与 y 在同一个分支中，也即 x 与 y 在 $G-e$ 的同一个分支中，所以在 $G-e$ 存在一条 (x,y) 路 P，那么 $P+e$ 是 G 的圈，与假设矛盾.

定理 1.5　连通图 G 是树当且仅当 G 的每一条边是割边.

定理 1.6　每个连通图包含一棵生成树.

定理 1.7　若图 $G=(V,E)$ 是连通的，则 $|E| \geqslant |V|-1$.

定理 1.8　树 T 的每个度大于 1 的顶点都是割点.

定理 1.9　对于图 G，有 $\kappa(G) \leqslant \kappa'(G) \leqslant \delta(G)$.

证明　若 G 不连通，则 $\kappa(G)=\kappa'(G)=0$，结论成立. 设 G 连通，若 $G=K_1$，则 $\kappa'(G)=0$. 若 $G \neq K_1$，因为每一个顶点的所有关联的边构成 G 的一个边割，所以 $\kappa'(G) \leqslant \delta(G)$. 下面证明 $\kappa(G) \leqslant \kappa'(G)$. 设 $|V(G)|=n$，若 $G=K_n$，则 $\kappa'(G)=n-1=\kappa(G)$. 当 $G \neq K_n$ 时，则 $n \geqslant 3$. 设 E_1 是一个极小边割，则 $|E_1|=\kappa'(G)$，则 $G-E_1$ 恰好有两个分支 G_1 和 G_2. 则必存在 $u \in V(G_1)$ 和 $v \in V(G_2)$，使得 $uv \notin$

$E(G)$. 否则, 设 $|V(G_1)|=n_1$, $|V(G_2)|=n-n_1$, 于是 $\kappa'(G)=|E_1|=n_1(n-n_1)\geqslant n-1$,这与 $G\neq K_n$ 矛盾. 因此对于 E_1 中的每一边,总可以取一个不同于 u 和 v 的端点,从而得到至多 $\kappa'(G)$ 个点,这些点构成一个分离 u 和 v 的点割 V_1,故 $\kappa(G)\leqslant|V_1|\leqslant\kappa'(G)$.

定理 1.10　设 $v\in V(G)$,则下面的论断等价:

①v 是割点.

② 存在 $V\backslash\{v\}$ 的一个剖分 U 和 W,使得对任意的 $u\in U, w\in W$,点 v 在每一条(u,w) 路上.

③ 存在异于 v 的点 u,w,使 v 在每一条(u,w) 路上.

定理 1.11　设 $e\in E(G)$,则下列论断等价:

①e 是 G 的割边.

② 存在 V 的一个剖分 U 和 W,使得对任意的 $u\in U, w\in W$,e 在每一条(u,w) 路上.

③ 存在点 u,w,使 e 在每一条(u,w) 路上.

④e 不在 G 的任一圈上.

无割点的非平凡连通图称为不可分图;一个图的极大不可分子图称为块. 如果 G 是不可分图,则 G 本身也称为块. 显然,对于顶点数大于 3 的图,若该图是块当且仅当该图是 2 连通图.

定理 1.12　对于图 G,若 $|V(G)|\geqslant 3$,则下列论断等价:

①G 是块.

②G 的任意两点在一个圈上.

③G 的任意一点和任意一边在某个圈上.

④G 的任意两边在某个圈上.

⑤ 对 G 的任意两点 u 和 v 及任一边 e,总存在过边 e 的(u,v) 路.

⑥ 对 G 的任意三点,存在过其中一点而连接另外两点的路.

⑦ 对 G 的任意三点,存在连接其中任两点,而不过第三点的路.

定理 1.13　对于连通图 G,若 $|V(G)|\geqslant 3$,则下列论断等价:

①G 是 2 边连通图.

②G 不含割边.

③G 的每一边在某一个圈上.

④ 任意两边在某个回路上.

⑤ 任意一点和任一边在某个回路上.

⑥ 任意两点在某个回路上.

定理 1.14　若 $|V(G)| \geqslant 3$,则 G 是 2 连通图当且仅当图的任意两点由两条内不交的路连接.

定理 1.15　图 G 是二分图的充分且必要条件是 G 不含奇圈.

证明　若 G 是二分图,$G=(S,T,E)$,其中 S,T 是 G 的二分类. 对于 E 中的任意一边,它的两个端鼎足之势分别在 S,T 中,因此 G 不含奇圈.

反过来,不妨设 G 为连通图,否则分别考察 G 的每个分支. 任取 $v \in V(G)$,令 $S=\{u \in V(G) \mid d(u,v)$ 为偶数$\}$,$T=\{ \in V(G) \mid d(u,v)$ 为奇数$\}$;因为 G 是连通图,所以 $V(G)$ 被剖分为 S,T.

下证对任一边 $e=xy \in E(G)$,必有 $x \in S, y \in T$. 若不然,不妨设 $x,y \in S$,则 x 到 v 的最短路 P_x 与 y 到 v 的最短路 P_y 及边 xy 构成一个长不奇数的回路,回路是若干个边不交的圈的并,至少一个圈长为奇数,与假设矛盾.

1.3　最短路及求法

图中两点间的最短路,在实际当中十分有用,本节介绍图中最短路的求法及应用.

1.3.1　Dijkstra 算法求最短路——求 G 中顶点 u_0 到其余顶点的最短路

设 G 为赋权有向图或无向图,假定 G 边是的权均非负.

对每个顶点 v,定义两个标记$(l(v),z(v))$,其中:

$l(v)$ 表示从顶点 u_0 到 v 的一条路的权;

$z(v)$ 表示顶点 v 的父亲结点,用以确定最短路的路线.

算法的过程就是在每步改进这两个标记,合最终 $l(v)$ 为从顶点 u_0 到 v 的最短路的权.

S 表示一个具有永久标号的顶点集,输入:G 的带权邻接矩阵 $W(u,v)$.

算法步骤如下:

① 赋初值:令 $S=\{u_0\}$, $l(u_0)=0$; $\forall v\in\bar{S}=V-S$,令

$$l(v)=W(u_0,v),z(v)=u_0,u\leftarrow u_0$$

② 更新 $l(v)$, $z(v)$: $\forall v\in\bar{S}=V-S$,若 $l(v)>l(u)+W(u,v)$,则令 $l(v)=l(u)+W(u,v)$, $z(v)=u$

③ 设 v^* 是使 $l(v)$ 取最小值的 $\bar{S}$ 中的顶点,则令

$$S=S+\{v^*\},u\leftarrow v^*$$

④ 若 $\bar{S}\neq\phi$,转步骤 ②,否,停止.

用上述算法求出的 $l(v)$ 就是 u_0 到 v 的最短路的权,从 v 的标记 $z(v)$ 追溯到 u_0,就得到 u_0 到 v 最短路的路线.

1.3.2　求距离矩阵的算法

将带权邻接矩阵 W 作为距离矩阵的初值,即

$$D^{(0)}=(d_{ij}^{(0)})_{n\times n}=W$$

①$D^{(1)}=(d_{ij}^{(1)})_{n\times n}$,其中 $d_{ij}^{(1)}=\min\{d_{ij}^{(0)},d_{i1}^{(0)}+d_{1j}^{(0)}\}$; $d_{ij}^{(1)}$ 是从 v_i 到 v_j 的只允许以 v_1 作为中间点的路径中最短路的长度.

②$D^{(2)}=(d_{ij}^{(2)})_{n\times n}$,其中 $d_{ij}^{(2)}=\min\{d_{ij}^{(1)},d_{i1}^{(1)}+d_{1j}^{(1)}\}$; $d_{ij}^{(2)}$ 是从 v_i 到 v_j 的只允许以 v_1,v_2 作为中间点的路径中最短路的长度.

⋮

ⓝ $D^{(n)}=(d_{ij}^{(n)})_{n\times n}$,其中 $d_{ij}^{(n)}=\min\{d_{ij}^{(n-1)},d_{i1}^{(n-1)}+d_{1j}^{(n-1)}\}$; $d_{ij}^{(n)}$ 是从 v_i 到 v_j 的只允许以 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 作为中间点的路径中最短路的长度,即是从 v_i 到 v_j 的中间可插入任何点的路径中最短路的长度,因此,$D^{(n)}$ 即为距离矩阵.

1.3.3　求路径矩阵的算法

在建立距离矩阵的同时可建立路径矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times n}$, r_{ij} 的含义是从 v_i 到 v_j 的

最短路要经过的标号为 r_{ij} 的点. 且有

$$R^{(0)}=(r_{ij}^{(0)})_{n\times n}, r_{ij}^{(0)}=j$$

每求得一个 $D^{(k)}$,按下列方式产生相应的新的 $R^{(k)}$,

$$r_{ij}^{(k)}=\begin{cases}k & \text{若 } d_{ij}^{(k-1)}>d_{ik}^{(k-1)}+d_{kj}^{(k-1)} \\ & \text{否则}\end{cases}$$

即当 v_k 被插入任何两点间的最短路径时,被记录在 $R^{(k)}$,依次求 $D^{(n)}$ 时求得 $R^{(n)}$,可以由 $R^{(n)}$ 来查找任何两点之间最短路的路径. 注意到 $R^{(n)}$ 中元素保留的是顶点 v_i 到 v_j 中标号最大的点(除 v_i 及 v_j 外). 若 $r_{ij}^{(n)}=j$,则表示从 v_i 到 v_j 的路径中不经过其他的点.

1.3.4 查找最短路径的方法

若 $r_{ij}^{(n)}=p_1$,则点 p_1(以下为了简洁,称点 v_i 为点 i)是点 i 到点 j 的最短路的中间的点. 然后用同样的方法再分头查找. 若:

① 向点 i 追溯得

$$r_{ip1}^{(n)}=p_2, r_{ip2}^{(n)}=p_3, \cdots, r_{ipk}^{(n)}=p_k$$

② 向点 j 追溯得

$$r_{p1j1}^{(n)}=q_1, r_{q1j}^{(n)}=q_2, \cdots, r_{qmj}^{(n)}=j$$

则由点 i 到点 j 的最短路径为

$$i, p_k, \cdots, p_2, p_1, q_1, q_2, \cdots, q_m, j$$

1.4 欧拉图与 Hamilton 图

1736 年,欧拉在解决哥尼斯堡七桥问题时形成了欧拉图的概念. 判定一个图是否为欧拉图已经有比较好的判定条件,而寻找 Hamilton 图的一个简洁而有效的充分条件,仍然是一个诱人而没有解决的问题.