实数的表示与数集的重分形谱

presentations of Real Numbers and the Multifractal Spectra of Sets of Numbers

◎陈海波　著

長江出版傳媒
湖北科学技术出版社

实数的表示与数集的重分形谱

Representations of Real Numbers and the Multifractal Spectra of Sets of Numbers

陈海波　著

長江出版傳媒
湖北科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

实数的表示与数集的重分形谱 / 陈海波著. —武汉：湖北科学技术出版社，2014.3

ISBN 978-7-5352-6311-7

Ⅰ. ①实…　Ⅱ. ①陈…　Ⅲ. ①实数—研究　②集合—研究　Ⅳ. ①O122　②O144

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 272427 号

责任编辑：宋志阳(28963030@qq.com)　　封面设计：喻　杨

出版发行：湖北科学技术出版社　　电话：027-87679468

地　　址：武汉市雄楚大街 268 号

（湖北出版文化城 B 座 13—14 层）　　邮编：430070

网　　址：http://www.hbstp.com.cn

印　　刷：武汉三新大洋数字出版技术有限公司　　邮编：441021

787mm×1092mm　16 开　9 印张　210 千字

2014 年 3 月第 1 版　　2013 年 3 月第 1 次印刷

定　　价：32.00 元

前　言

实数的表示理论是数论中一个重要的研究方向. 在实数的表示理论中,经常产生被概率学家忽视的 Lebesgue 零测集. 随着数学的发展,数学家发现这些集合的研究与调和分析、动力系统、遍历论和 Diophantine 逼近等数学分支有着密切的联系. 自 20 世纪初,为了明确实数的表示理论中出现的奇异点构成的零测集的性态,分形的谱理论作为很好的工具被广泛应用. 这方面的研究最早可追溯到 1928 年,Jarnik[65]把维数理论应用到度量有界正则连分数展式构成的数集的大小. 之后,Besicovitch[10]和 Eggleston[28]等研究了实数的 p(≥2 整数)进展开中的特定水平集的维数. 而至今,基于两者或与两者工作有关的成就非常丰富. 除了常见的连分数展式和整数进展开式外,与其他的展式有关的零测集也一直为很多数学家所关注. 比如:β-展式、Lüroth 展式、Engel 展式、Sylvester 展式、Cantor 展式、Oppenheimer 展式等等. 这些集合多与数字的增长、数字的频率、数字之间的关系以及部分和等有关. 另外,除了在实数域考虑相应的问题外,人们也考虑形式 Laurent 级数域、p 进数域以及复数域等;除了在数的表示理论范围讨论外,人们也可在代数学、偏微分方程、动力系统和 Diophantine 逼近和生物等领域发现相关相似的问题.

本书研究与数的表示理论有关的一些分形集合的维数. 具体来说,这些集合主要与 p 进展式、连分数展式和 α-Lüroth 展式有关. 而所考虑的问题与数论、符号动力系统、词上的组合、连分数动力系统和 α-Lüroth 动力系统有着密切的联系. 我们的工作有些推广了经典的结果,有些发现和解决了一些新的问题.

本书共分 10 章. 第 1 章是引言部分,在这一章里,我们首先简要回顾分形几何的发展历程,然后分别介绍实数的表示理论的研究现状和本书所做的主要研究成果.

在第 2 章中,我们介绍本文涉及到的一些预备知识. 先是各种测度与维数的基本理论与性质,然后是自相似集与 Moran 集的定义以及其维数结果,再就是介绍正则变差函数,最后是相应的数的表示的一些基本理论.

后 7 章是本书的主要部分. 在第 3 章中,我们研究的分形集合是由近期出现的一个新概念切维数描述的. 为了计算出这样的分形集合的 Hausdorff 维数与 Packing 维数,我们先确定了符号空间$\{0,1\}^\infty$中字母 1 出现的下 Banach 密度为α,上 Banach 密度为β的那些点构成的集合的维数. 这里,$0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant 1$. 可以认为,我们的结果是对 Besicovitch 和 Eggleston 的一些经典工作的延伸.

第 4 章所考虑的集合与数论中的著名的 Erdös-Rényi 极限定理有关. 我们研究了 run-length 函数的性质,得出了在不同的增长率下由它所确定的水平集的 Hausdorff 维数.

在第 5 章中,我们确定了 Besicovitch 集和 Erdös-Rényi 集这两个典型的集合的交的分形维数. 这不但推广了 Besicovitch 的经典结果而且完善了 Erdös-Rényi 极限定理.

在第 6 章,我们定义和研究了符号空间$\sum_m$中下数量等待指数和上数量等待指数所描述的回归集 $S_{\alpha,\beta}$ 并确定了其 waiting 谱. 事实上,我们把 Feng 和 Wu[41]的结果推广到了高维并补充说明了 D. H. Kim 等在文[73]中所得结果,进一步丰富了 Poincaré、Ornstein 和 Weiss 在动力系统中有关回归问题所做的一些工作.

第 7 章是第 6 章的结果在连分数展式中的体现,说明第 6 章的结论在无穷维动力系统中也是成立的. 另外,我们的结果可以看做是文[98]中的结果的一个新的方向的推广,同时它也补充完善了文[73]中的一个命题.

在第 8 章中,我们运用 Hirst[60]和 Lúczak[84]的思想和方法,在实数的α-Lüroth 展式中考虑了 Wang 等[118]在连分数展式中所讨论的类似问题. 这丰富了α-Lüroth 展式的理论并进一步加强了 Munday[93]在α-Good 型集方面的工作.

在第 9 章里我们定义了α-Lüroth 级数的 error-sum 函数,讨论了其相应的分析性质并在此基础上计算出了 error-sum 函数的图像的维数.

最后一章与α-Lüroth 动力系统有关,我们在此系统中类似考虑了 J. L. Fernández[45]在连分数动力系统中所考虑的回归集,即集合$\mathcal{W}(x_0,\{t_n\})$. 在一定条件下,我们给出了回归集谱的准确表达公式.

目　录

第 1 章　序　论

在这一章里，我们介绍本书的研究背景、研究内容和研究成果. 本章共分为四节，在第一节里，我们简要回顾分形几何这一学科的发展历程、应用前景和研究方法；第二节介绍了符号动力系统的来源、发展与应用，并给出在符号动力系统中几个集合的维数，其中有些与 Besicovitch 和 Eggleston 的一些经典工作有关；在接下来的一节里我们介绍连分数的度量性质主要是维数计算方面的研究现状，继而介绍本书中我们在连分数表示方面的工作；最后一节是关于我们在实数的 α -Lüroth 表示的几个相关研究结果的介绍.

1.1　分形几何简介

分形几何学是现代非线性科学研究中的一门新兴数学分支，其哲学本质是一种新的世界观和方法论. 它是为了弥补传统欧氏几何学的不足而产生的，在众多学科领域里有着广泛的应用.

1975 年，法国数学家 B. B. Mandelbrot 发表了划时代的专著《分形：形态、机遇和维数》(见[85])，这标志着分形几何学的诞生，该书于 1982 年再版时易名为《大自然的分形几何学》. 分形(fractal)这个词也是 B. B. Mandelbrot 为了表征复杂图形和复杂过程首先将拉丁文 fractus 转化后引入自然科学领域的，它的原意是指不规则的、支离破碎的物体. 长期以来，人们总是习惯研究光滑和规则的集合和对象，如三角形、正方形、圆锥和球等；而那些不够光滑和规则的却被认为是病态的不值得研究的而不被理睬，如云彩的边界、闪电路径、海岸线、血管系统、流体力学中的湍流、布朗运动、酶的构造以及非线性动力学中的奇异吸引子等. 自从 B. B. Mandelbrot 提出分形的概念以后，这种状况得以改观. 因为人们意识到，不规则的集合比经典的几何图形能更好的反映许多客观自然现象，对不规则集可以而且有时必须进行详细的数学描述，而分形几何

恰好为研究这些不规则集提供了一个总的框架和理论基础. 因此在短短几十年的时间里，在众多学者的努力下分形几何由于其巨大的理论价值和应用价值迅速发展成为数学中一个重要的研究领域.

在分形名词使用之前的一个世纪，分形几何的思想其实就在数学的研究中存在着，许多数学家就研究过不少不光滑不规则的集合. 比如，在 1872 年，德国数学家 Weierstrass 构造了一个处处连续但处处不可微的 Weierstrass 型函数：

$$W(x)=\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\cos(2^k x),x\in(0,1];$$

在 1883 年，德国数学家 G. Cantor 提出了三分 Cantor 集；随后在 1890 年，瑞典数学家 H. Von Koch 提出了 Koch 雪花曲线；在 1915 年，波兰数学家 W. Sierpinski 提出了 Sierpinski 垫片和海绵. 这些都属于规则的分形图形，它们是数学家按照一定的规则构造出来的并且具有严格的自相似性质，即局部经过放大后会与整体重合. B. B. Mandelbrot 曾给出分形的定义：分形是局部与整体在某种意义下存在相似性的形状. 这强调了分形的自相似性，但把某些分形排除在外. 后来，英国数学家 K. J. Falconer 通过罗列分形集所具有的性质，来给分形下定义. 如果集合 F 具有下面所有的或大部分的性质，它就是分形：

(1) F 具有精细的结构，即有任意小尺度的不规则的细节；

(2) F 具有如此的不规则性，以致于它的局部或整体都不能用微积分的或传统的几何语言来描述；

(3)通常 F 具有某种自相似或自仿射性质，这可以是统计意义上的；

(4) F 的“分形维数”(用某种方式定义的)通常严格大于它的拓扑维数；

(5)在许多有趣的情况下，F 具有非常简单的、可能是由迭代给出的定义；

(6)通常 F 具有“自然”的外貌.

由上可以看出，分形是数学上的几何抽象，它具备无穷小尺度的层次结构. 但是，自然界中的许多事物，如连绵起伏的山峦轮廓线、四通八达的江海河川、蜿蜒曲折的海岸线等其形态也具有分形特征. 这表现在对它们进行测量时，其被测值(如长度、面积、体积等)的大小会随测量尺寸的变化而发生改变. 为了测量这些集合，在 1915 年，德国数学家 Hausdorff 推广了传统的 Lebesgue 测度的概念同时引入了分形理论中一个重要的概念——Hausdorff 维数(见定义 2.1.2). 根据计算，这类统计自相似性图形和曲线的 Hausdorff 维数一般不是整数，而是一个分数值，这将传统的维数概念推广到了一般的非负实数. 比如，B. B. Mandelbrot计算得英国布列尼塔的海岸线的维数大约是1.26.

在发现 Hausdorff 维数的重要的度量价值和应用价值后，人们从不同的研究角度出发定义了各种不同的维数的概念，它们都彼此互相关联. 在 1928 年，G. Bouligand 将 Minkowski 容度应用于非整数维，由此可以将螺线做出很好的分类. 在 1932 年，L. S. Pontryagain 等引入了盒维数. 在 1934 年，A. S. Besicovitch 更深刻地揭示了 Hausdorff 测度的性质及奇异集的分数维，他在 Hausdorff 测度及其几何领域研究中作了很大贡献，因此产生了 Hausdorff-Besicovitch 维数的概念. 在 1959 年，Kolmogrov 和 Tikomirov 引入了熵维数. 在 1982 年，Tricot 引入了 packing 维数. 事实上，各种分形维数理论给出了集合一个恰当的量的刻画，为我们从不同的角度研究集合提供了重要的理论依据. 在 1982 年以后，分形理论逐渐在很多领域得到越来越广泛的应用，其理论也日趋丰富，产生了很多新的研究对象和内容，比如多重分形(multifractals)、随机分形、负分维、李雅普洛夫指数、广义超越维数等.

现在，分形几何已经拓展了人们认知世界的视野，分形理论与数论、计算机、微分方程、动力系统和生物学等其他各学科交叉结合相辅相成，已经成了数学研究中一道靓丽的风景线.

1.2 符号动力系统及相关集合研究

符号动力系统(参见[76,80,99]等)是动力系统中一个迅速发展的分支，它是作为对一般动力系统的一种研究方法而产生的，但同时其思想方法对其他领域比如数据存储和传输等也有重要的意义和深远的影响.

动力系统源自对模型化物理现象后得到的微分方程系统的研究. 比如天体和气体分子的运动规律都可以用一定的数学模型加以说明. 在实际的研究中，我们需要把时间离散化从而把研究转移到单个变换的迭代上. 对系统作定性分析和定量分析是我们感兴趣的，比如某状态经过空间中特定区域平均所花费的时间就是定量分析，而考察某状态在变换下是否是周期的或者常返的就是定性分析. 符号动力系统产生的意图就是把系统的空间和时间一样离散化，即是把空间分成有限或无限的块，对每个块给一个符号，状态在系统中的运动轨迹就对应一个无穷符号序列. 这样，我们就把对初始系统的研究转化为符号动力系统的研究，从而把问题简单化清晰化.

在 1898 年，J. Hadamard[57]在研究某些负曲率表面上的测地线问题时就已经用到了无穷符号序列，这也是符号动力系统开始的一个标志. 在 1938

年,M. Morse 和 G. A. Hedlund 在一篇具有里程碑意义的文章[91]中,概括了符号动力系统的研究主体和学科本质. 符号动力系统在很大程度上依赖于其他的数学学科,比如线性代数等,但是它本身作为一个新工具也促进了其他领域的发展. 自 20 世纪 70 年代以来,符号动力系统的研究已非常深入,许多深刻的结果被发现,同时与其他学科的联系一再被揭示,从而已发展成为非常活跃交叉性很强的学科.

分形几何和符号动力系统的结合自然而又紧密,这使得我们可以在符号空间中研究许多分形集合的维数. 为方便陈述,本书的前面部分内容的探讨就是主要在符号空间中进行的,根据符号空间与欧氏空间之间的对应关系,如果考虑实数的整数进展式我们的结果同样是成立的.

1.2.1 Banach 密度与切维数

很多分形集合都与数的展开有关,对这种集合的研究一直是分形几何中的一个重要方向. 例如三分 Cantor 集可以看作是[0,1]区间中以 3 为底的展开式中只包含 0 和 2 的数构成的. 如果我们不考虑那可数个展式不唯一的点(在分形理论中,这对维数的大小是没有影响的),那么我们就可以在三分 Cantor 集和符号空间$\sum_3=\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$的一个子集$\{0,2\}^{\mathbb{N}}$之间建立一一对应. 在本书中,我们总取自然数集$\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$. 这样,我们就把欧氏空间中的问题转化到符号空间了. 这种处理问题方法具有普适性,他可以让我们省去不少麻烦的说明. 需要补充说明的是若令字母表 $A=\{0,1,\cdots,m-1\}$,这里 $m\geqslant 1$ 为整数,那么$\sum_m$表示由 A 上的无穷单边序列 $w=(w_k)_{k\geqslant 1}=w_1w_2w_3\cdots$ 组成的集合. 特别地,在符号空间上 $\sum_2$ 赋予$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$-Bernoulli 测度 μ(见式 3.10 前面的定义),就有 E. Borel[15]于 1909 年提出的如下的定理:

定理 1.2.1　符号空间$\sum_2$ 中 μ-几乎所有的序列的字母 1 出现的频率是$\frac{1}{2}$,即有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{w_1+w_2+\cdots+w_n}{n}=\frac{1}{2},\quad \mu\text{—a. e. } w\in\sum\nolimits_2.$$

自然地,我们需要研究字母出现的频率不相等的序列的组成的集合,尽管这样的集合的测度为零,但它们的 Hausdorff 维数可能是非零的. 在 1934 年,Bescovitch[17]研究了如下集合:设 $0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2}$,定义

$$B_p:=\left\{w\in\sum\nolimits_2:\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{w_1+w_2+\cdots+w_n}{n}=\frac{1}{2}\leqslant p\right\}.\qquad(1.1)$$

他得出这样的结论:

定理 1.2.1　设 $0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2}$,则

$$\dim_H B_p = \frac{1}{\log 2} H(p).$$

这里 $\dim_H$ 表示集合的 Hausdorff 维数(见定义 2.1.2),熵函数 H(·)定义如下:

$$H(x) := -x\log x - (1-x)\log(1-x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1.2}$$

并且规定 $0\log 0 =: 0$. 在 1949 年,Eggleston[28]把这一结果推广到了空间 $\sum_m$ 中,这里整数 $m \geqslant 1$. 对于给定的概率向量 $\boldsymbol{P} = (p_0, p_1, \cdots, p_{m-1})$,考虑下面的集合:

$$B_{\boldsymbol{P}} := \left\{ w \in \sum_m : \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\mathrm{Card}\{1 \leqslant k \leqslant n : w_k = i\}}{n} = p_i,\ i = 0, 1, \cdots, m-1 \right\}, \tag{1.3}$$

这里 Card 表示集合元素的个数,那么就有

定理 1.2.3 对任意概率向量 $\boldsymbol{P} = (p_0, p_1, \cdots, p_{m-1})$,有

$$\dim_H B_{\boldsymbol{P}} = \frac{1}{\log m} \sum_{i=0}^{m-1} p_i \log p_i.$$

集合 $B_{\boldsymbol{P}}$ 通常被称为 Bescovitch-Eggleston 集. 这里,对于特殊的一致分布的情形即当($\boldsymbol{P} = \frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \cdots \frac{1}{m}$)时,集合 $B_{\boldsymbol{P}}$ 的 $\boldsymbol{P}$-Bernoulli 测度为 1,同时它的 Hausdorff 维数也为 1. 最近,L. Olsen[95]研究了一种被称之为 r 近似的离散的 Bescovitch-Eggleston 集,它的结果提供了关于非正规数集合的 Hausdorff 维数的经典结果的一个离散的模拟. 另外,L. Barreira[5]、A. Bisbas[13]等人研究了一大类实数集的 Hausdorff 维数,他们得到了维数的显性表达式,并保持和拓展了一些经典的结果.

但是,以前的工作所考虑的集合都是与前 n 项和平均有关. 在本书中,我们从一个新的角度出发,在符号空间中引入一种动态的平均——Banach 平均,并研究了新的集合. 我们的结果可以看作是 Bescovitch 和 Eggleston 经典工作的一种推广,同时它与切维数的概念也紧密联系起来了.

设实数 α, β 满足 $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$. 记

$$S_n(w) = \sum_{k=1}^{n} w_k$$

为序列 $w = (w_k)_{k\geqslant 1}$ 的前 n 项和. 定义集合

$$X_{\alpha,\beta} = \left\{ w \in \sum{}_2 : \lim_{m\to\infty} \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_m(T^n w)}{m} = \alpha,\ \lim_{m\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_m(T^n w)}{m} = \beta \right\}, \tag{1.4}$$

那么我们有

定理 1.2.4 对任意 $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$,我们有

$$\dim_H X_{\alpha,\beta} = \dim_P X_{\alpha,\beta} = \sup_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} \frac{H(t)}{\log 2}.$$

这里,我们用 $\dim_P$ 表示集合的 packing 维数(见定义 2.1.4),集合 $X_{\alpha,\beta}$ 的定义中的平均即为 Banach 平均,其累次极限分别就是字母 1 在序列 w 中的上 Banach 密度和下 Banach 密度. 特别地,定义集合

$$X_\alpha := \left\{ w \in \sum{}_2 : \lim_{m\to\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{S_m(T^n w)}{m} = \lim_{m\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{S_m(T^n w)}{m} = \alpha \right\}, \tag{1.5}$$

如果在上面的定理中取 $\alpha=\beta$,那么有如下推论

推论 1.2.5　对任意 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$,我们有

$$\dim_H X_\alpha = \dim_P X_\alpha = \frac{H(\alpha)}{\log 2}.$$

在 2005 年,D. Guido 和 T. Isola[52]给出了度量空间 X 中某一点 x 处上切维数 $\bar{\delta}_X(x)$ 和下切维数 $\underline{\delta}_X(x)$ 的定义,并且发现在特定条件下它们和点 x 处的上局部维数 $\overline{d}_X(x)$ 和下局部维数 $\underline{d}_X(x)$ 之间满足如下关系:

$$\underline{\delta}_X(x) \leqslant \underline{d}_X(x) \leqslant \overline{d}_X(x) \leqslant \bar{\delta}_X(x). \tag{1.6}$$

在 2006 年,它们又在文中[53]定义了局部有限 Borel 测度 μ 在点 x 处的上切维数 $\bar{\delta}_\mu(x)$ 和下切维数 $\underline{\delta}(x)$,并且发现它们和测度的上局部维数 $\overline{d}_\mu(x)$ 和下局部维数 $\underline{d}_\mu(x)$ 也有如下类似结果:

$$\underline{\delta}_\mu(x) \leqslant \underline{d}_\mu(x) \leqslant \overline{d}_\mu(x) \leqslant \bar{\delta}_\mu(x). \tag{1.7}$$

由此可以看出切维数对空间中点的重分形特性非常敏感,而且有例表明,即使有些分形集在某点处的上下局部维数相等,其上下切维数也可能不等. 因此切维数是描述分形的不规则性质的一个很好的工具. 设 $0<p<1$ 且 $\mu:=\mu_p$ 为符号空间 $\sum_2$ 上的 $(1-p,p)$-Bernoulli 测度. 那么在符号空间中我们有切维数的一个特殊版本,见定义 3.1.5 利用上面 Banach 密度所确定的水平集的维数结果,我们就可以得到如下结论:设 $0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant 1$,定义集合

$$Y_{\alpha,\beta} := \{ w \in \sum{}_2 : \underline{\delta}_\mu(w) = H(\alpha,p), \bar{\delta}_\mu(x) = H(\beta,p) \}, \tag{1.8}$$

则有

定理 1.2.6　对任意 $0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant 1$,我们有

$$\dim_H Y_{\alpha,\beta} = \dim_P Y_{\alpha,\beta} = \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} \frac{H(t)}{\log 2}.$$

这里 H(•,•) 为相对熵函数(见定义 3.6). 特别地,定义集合

$$Y_\alpha := \{ w \in \sum{}_2 : = \delta_\mu(w) = H(\alpha,p) \}, 0\leqslant\alpha\leqslant 1. \tag{1.9}$$

从上面定理可得

定理 1.2.7　对任意 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$,我们有

$$\dim_H Y_\alpha = \dim_P Y_\alpha = \frac{H(\alpha)}{\log 2}.$$

在前面的工作基础上，我们还可以考虑下面几个方面的问题：(1)如何将定理1.2.4推广到一般的甚至无穷符号空间？比如可以考虑将其应用到Lüroth展式、连分数展式等.(2)考虑拓扑混合符号动力系统($\sum_A$, T)，其中$\sum_A$是由$m\times m$本原矩阵$\boldsymbol{A}$所确定的有限型子移位，T为其上移位算子. 设$\varphi: \sum_A \to \mathbb{R}^d$为连续函数，令$M_{\text{inv}}$表示$\sum_A$上所有$T$不变Borel概率测度构成的集合，文[37]给出了如下形式的变分公式：

$$h_{\text{top}}\left\{w\in \sum{}_A: \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(T^j w)=\alpha\right\}=\sup_{\mu\in M_{\text{inv}}}\left\{h_\mu: \int\varphi\,\mathrm{d}\mu=\alpha\right\}. \quad (1.10)$$

其实定理1.2.4只是对示性函数作了类似回答，更一般地，当φ为连续函数时我们可否确定与集合

$$\left\{w\in \sum{}_A: \lim_{m\to\infty}\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\varphi(T^{j+n})=\alpha\right\}$$

表达形式相仿的集合的维数，能否也给出相应的变分公式？(3)定理1.2.6中的切维数定义是由Bernoulli测度给出的，如何将这个定理推广到Markov测度和Gibbs测度的情形？

1.2.2 具不同增长率的run-length函数

Run-length函数的概念(见定义4.1.1)最早是在概率论中提出的，它是用来描述在抛币过程中连续出现正面的个数的数学模型. 很多结果是关于刻画它的期望和极限特征的，也有的结果是关于生物中的DNA序列的，对此读者可以参考[2，24，30，31，94，104]等文献以求更多的了解. 设μ是空间$\sum_2$上的$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$-Bernoulli测度，设序列$\sum_2$且$r_n(w)$为相应的run-length函数，则我们有以下著名的Erdös-Rényi极限定理(见[105])：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n(w)}{\log_2 n}=1,\ \mu\text{—a. e. } w\in \sum{}_2. \quad (1.11)$$

以上定理成立的例外集的大小最先由Ma等[89]给出，他们不但证明Erdös-Rényi定理成立的例外集是满维的而且还以run-length函数为工具对Egoroff定理作了深入的说明. 在本文中我们对上述结果又做了进一步的研究，确定了与不同增长率的run-length函数有关的水平集的Hausdorff维数. 设φ是定义在自然数集$\mathbb{N}$上的函数并记

$$E(\varphi)=\left\{w\in \sum{}_2: \lim_{n\to\infty}\frac{r_n(w)}{\varphi(n)}=1\right\}, \quad (1.12)$$

我们有

定理 1.2.8　设 $\alpha > 0$ 且 $\varphi(n) = \alpha n$，则 $\dim_H E(\varphi) = 0$.

以下考虑 $\varphi(n) = o(n)$ 的情形，分为有界和正则变差（见定义 4.4.1）两种情况进行考虑. 设整数 $M \geqslant 1$，定义

$$E(M) := \{w \in \sum\nolimits_2 : \lim_{n\to\infty} r_n(w) = M\}, \tag{1.13}$$

记 λ_M 为与 $E(M)$ 相关联的矩阵的谱半径（见 4.3 节）. 利用非负矩阵的有关知识，可以得到

定理 1.2.9　设整数 $M \geqslant 1$，则

$$\dim_H E(M) = \log_2 \lambda_M.$$

推论 1.2.10　$\lim\limits_{M\to\infty} \dim_H E(M) = 1$.

进一步，定义集合

$$E(\infty) := \{w \in \sum\nolimits_2 : \sup_{n\geqslant 1} r_n(w) < \infty)\}, \tag{1.14}$$

我们还有

推论 1.2.11　$\dim_H E(\infty) = 1$.

设函数空间 Φ 是由满足下面条件的函数 $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 所组成的：序列 $\{\varphi(n)\}_{n\geqslant 1}$ 是正则变差的，且当 $n \to \infty$ 时，$\varphi(n)/n \to 0, \varphi(n) \to \infty$.

在 $\varphi \in \Phi$ 条件下，我们的结论是

定理 1.2.12　设 $\varphi \in \Phi$，如果 $E(\varphi)$ 不是空集，那么 $\dim_H E(\varphi) = 1$；更进一步，如果 φ 还是一个增函数，那么我们总有

$$\dim_H E(\varphi) = 1.$$

需要说明的是，函数空间 Φ 包含了很多常见的函数，见例 4.4.3. 另外，对于 run-length 函数，我们还可以作如下进一步研究.

1. 考虑极限不存在的情形. 设 $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$，集合

$$\left\{ w \in \sum\nolimits_2 : \varliminf_{n\to\infty} \frac{r_n(w)}{n} = \alpha, \ \varlimsup_{n\to\infty} \frac{r_n(w)}{n} = \beta \right\}, \tag{1.15}$$

的维数是多少？关于更一般的增长情况呢？

2. Erdös-Rényi 定理是否可以推广到其他的不同的数的展式或不同空间中，然后进一步求出例外集的维数？

1.2.3　Besicovitch 集与 Erdös-Rényi 集

在研究 run-length 函数的时候，我们还发现其与数字的密度有密切的联系. 为此，我们定义了 Besicovitch 集和 Erdös-Rényi 集，并考虑了他们交的 Hausdorff 维数和 packing 维数. 我们的结果同时推广了 Besicovitch 的经典结果和文[89]的结果.

我们考虑的上 Besicovitch 集和下 Besicovitch 集分别定义为

$$\overline{B}(\alpha) = \{x \in [0,1] : \overline{\tau}_1(x) \leqslant \alpha\}, 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2};$$

$$\underline{B}(\alpha) = \{x \in [0,1] : \underline{\tau}_1(x) \geqslant \alpha\}, \frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

其中，$\overline{\tau}_1$ 和$\underline{\tau}_1$ 分别 为 x 的 2 进展式中数字 1 的上密度和下密度. 另外需要指出的是，对集 合 $\overline{B}(\alpha)$ ，当$\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$ 时由 Borel 正规数定理知从维数的角度看其为平凡集，故我们讨论从略. 对集合$\underline{B}(\alpha)$而言也可得到类似结果. 另一方面，我们定义 Erdös-Rényi 集为

$$E(\beta) = \left\{x \in [0,1] : \lim_{n\to\infty} \frac{r_n(x)}{\log_2(n)} = \beta\right\}, \ 0 \leqslant \beta \leqslant \infty. \tag{1.16}$$

为了揭示 Besicovitch 集和 Erdös-Rényi 集之间的联系并同时推广 Besicovitch 的经典结果和文[89]的结果，我们考虑如下两个集合的交

$$\underline{S}(\alpha,\beta) = \left\{x \in [0,1] : \underline{\tau}_1(x) \geqslant \alpha, \lim_{n\to\infty} \frac{r_n(x)}{\log_2(n)} = \beta\right\}, \ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, 0 \leqslant \beta \leqslant \infty. \tag{1.17}$$

并得到

定理 1.2.13　对任意 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 和 $0 \leqslant \beta \leqslant \infty$，集合$\underline{S}(\alpha,\beta)$ 是正则的. 更确切地说，我们有

$$\dim_H \underline{S}(\alpha,\beta) = \dim_P \underline{S}(\alpha,\beta) = \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant 1} \frac{H(t)}{\log 2}.$$

另外，做适当的特殊化取值和定理证明的修改，我们还可得到如下两个推论.

推论 1.2.14　对任意 $0\leqslant\beta\leqslant\infty$，有

$$\dim_H E(\beta) = \dim_P E(\beta) = 1.$$

推论 1.2.15　对任意 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$，有

$$\dim_H \underline{B}(\alpha) = \dim_P \underline{B}(\alpha) = \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant 1} \frac{H(t)}{\log 2}.$$

除此之外，集合 $\underline{S}(\alpha,\beta)$ 的对偶集 $\overline{S}(\alpha,\beta)$ 也是我们讨论的内容(见第 5 章最后一节). 我们容易类似地得到相关的结果和推论.

1.2.4　Waiting 时间与数量等待指数

经典的动力系统中，Poincaré 回归定理是最基本的结果之一. 它说明在任何具有限不变测度的系统中，正测度的集合中的几乎所有的点将无限次返