第 1 讲　分数的计算

一、方法和技巧

分数计算是小学数学学习的重要内容，同时也是数学竞赛的重要内容之一。要使计算准确、快速，关键在于掌握运算技巧。观察算式的特点及规律，灵活地运用运算定律和性质，对启迪思维，提高应变能力，培养学生综合分析与推理能力都有很大帮助。

常用主要技巧：① 逆用乘法分配律；② 代换法；③ 转化法。

二、典型例题

一、基础

【例 1】　计算：$7\frac{7}{9}-2\frac{8}{17}+\left(2\frac{2}{9}-1\frac{9}{17}\right)$

分析与解　先去掉小括号，使 $7\frac{7}{9}$ 和 $2\frac{2}{9}$ 相加凑整，再运用减法运算性质：

$a-b-c=a-(b+c)$

原式 $=\left(7\frac{7}{9}+2\frac{2}{9}\right)-\left(2\frac{8}{17}+1\frac{9}{11}\right)$

$=10-4$

$=6$

做一做 1　计算：$7\frac{5}{9}-\left(3\frac{4}{5}+1\frac{5}{9}\right)-1\frac{1}{5}$

【例 2】　计算：$73\frac{1}{15}\times\frac{1}{8}$

分析与解　把 $73\frac{1}{15}$ 改写成 $72+\frac{16}{15}$，再利用乘法分配律计算。

原式 $=\left(72+\frac{16}{15}\right)\times\frac{1}{8}$

$=72\times\frac{1}{8}+\frac{16}{15}\times\frac{1}{8}$

$=9+\frac{2}{15}$

$=9\frac{2}{15}$

做一做 2　计算：$\frac{1}{7}\times57\frac{1}{6}$

【例 3】　计算：$166\frac{1}{20}\div41$

分析与解　此题中的 $166\frac{1}{20}$ 可以分成一个 41 的倍数与另一个较小的数相加，再利用除法性质使运算简便。

原式 $=\left(164+2\frac{1}{20}\right)\div41$

$=164\div41+\frac{41}{20}\div41$

$=4+\frac{1}{20}$

$=4\frac{1}{20}$

做一做 3　计算：$54\frac{2}{5}\div17$

二、培优（决赛级）

1. 运用商不变的性质

【例 4】　计算 $\left(11\frac{2}{9}+9\frac{2}{11}\right)\div\left(\frac{2}{9}+\frac{2}{11}\right)$。

解法 1　原式 $=\left(\frac{101}{9}+\frac{101}{11}\right)\div\left(\frac{2}{9}+\frac{2}{11}\right)$

$=\left[101\times\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)\right]\div\left[2\times\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)\right]$

$=101\div2$

$=50\frac{1}{2}$

解法 2　原式 $=\dfrac{20+2\times\frac{20}{99}}{2\times\frac{20}{99}}$

$=\dfrac{20}{2\times\frac{20}{99}}+1$

$=49\frac{1}{2}+1$

$=50\frac{1}{2}$

小结　解法2是将原式变形为繁分式，用繁分式化简的方法来计算，同时运用“分配律”降低运算难度。

做一做4　计算$\left(9\frac{2}{7}+7\frac{2}{9}\right)\div\left(\frac{5}{7}+\frac{5}{9}\right)$。

2. 运用乘法分配律

【例5】　计算 $29\frac{15}{34}\times2-27\frac{9}{17}\div13$。

解　原式$=\left(29+\frac{15}{34}\right)\times2-\left(26+1\frac{9}{17}\right)\div13$

$=29\times2+\frac{15}{34}\times2-26\div13-\frac{26}{17}\times\frac{1}{13}$

$=58+\frac{15}{17}-2-\frac{2}{17}$

$=56+\frac{13}{17}$

$=56\frac{13}{17}$

做一做5　计算 $31\frac{15}{26}\times2-57\frac{1}{13}\div7$。

【例6】　计算 $\dfrac{20.03\times3.6\times7900+4500\times2.003}{79\times3.7-3.4}$。

解　原式$=2003\times\dfrac{3.6\times79+4.5}{3.7\times79-3.4}$

$=2003\times\dfrac{3.6\times79+4.5}{(3.6+0.1)\times79-3.4}$

$=2003\times\dfrac{3.6\times79+4.5}{3.6\times79+7.9-3.4}$

$=2003\times\dfrac{3.6\times79+4.5}{3.6\times79+4.5}$

$=2003$

做一做6　计算 $\frac{1995\times(4.3\times87+4.4)}{4.4\times87-4.3}$。

灵活运用上面的巧算方法，从多角度进行思考分析，常可得到一个式题的多种解法，有的甚至是十分巧妙、独特的。

4. 发散思考，一题多解

【例7】　计算 $2007\div2007\frac{2007}{2008}$。

解法1　直接利用带分数除法法则和乘法分配律。

$$\begin{aligned}原式&=2007\div\frac{2007\times2008+2007}{2008}\\&=2007\div\frac{2007\times(2008+1)}{2008}\\&=1\times\frac{2008}{2009}=\frac{2008}{2009}\end{aligned}$$

解法2　利用商不变的性质和除法的运算性质。

$$\begin{aligned}原式&=(2007\div2007)\div(2007\frac{2007}{2008}\div2007)\\&=1\div(2007\div2007+\frac{2007}{2008}\div2007)\\&=1\div1\frac{1}{2008}\\&=\frac{2008}{2009}\end{aligned}$$

解法3　利用乘法分配律和倒数知识。

$$\begin{aligned}原式&=2007\div\left(2007+\frac{2007}{2008}\right)\\&=2007\div\left[2007\times\left(1+\frac{1}{2008}\right)\right]\\&=1\times\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2008}\right)}\\&=\frac{1}{\frac{2009}{2008}}\\&=\frac{2008}{2009}\end{aligned}$$

你还有别的方法吗？

做一做 7　计算 $231 \div 231\frac{231}{232}$。

三、(选学）冲牌（总决赛级）

【例 8】　计算 $25.1 \times 63 + \frac{7}{250} \times 251 + 419.672$。

解　原式 $= 25.1 \times 63 + 0.028 \times 251 + 25.1 \times 16.72$

$= 25.1 \times 63 + 25.1 \times 0.28 + 25.1 \times 16.72$

$= 25.1 \times (63 + 0.28 + 16.72)$

$= 25.1 \times 80$

$= 2008$

小结　首先尝试把 419.672 拆开，即 $419.672 = 25.1 \times 16.72$。想一想，为什么要这样做？其次应注意到$\frac{7}{250}$能化成有限小数，此题用小数计算更为简便。

做一做 8　计算 $1994.5 \times 79 + \frac{6}{25} \times 790 + 244.9$。

3. 代换法

把相同的算式用同一个字母表示，先进行字母运算，得到最简单的字母表达式，再把算式代入，这是一种巧妙的方法。

【例 9】　计算 $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2002}\right) \times \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2003}\right) - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2003}\right) \times \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2002}\right)$。

解　令 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2002} = A$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2003} = B$

原式 $= (1+A) \times B - (1+B) \times A$

$= B + AB - A - AB$

$= B - A$

所以，原式 $= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2003}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2002}\right)$

$=\frac{1}{2003}$

做一做 9　计算 $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$。

练习一

A　组

1．计算　$7\frac{7}{9}-2\frac{8}{17}+\left(2\frac{2}{9}-1\frac{9}{17}\right)$

2．计算　$64\frac{1}{17}\times\frac{1}{9}$

3．计算　$48\frac{3}{10}\div 23$

计算下列各题：

4．$\left(3\frac{7}{11}+1\frac{12}{13}\right)\div\left(1\frac{5}{11}+\frac{10}{13}\right)$

5．$3\frac{3}{5}\times25\frac{2}{5}+37.9\times6\frac{2}{5}$

6．$\frac{9}{10}\times34.5+111\times1.8+54.3\div1\frac{1}{9}$

B　组

7．$2008\div2008\frac{2008}{2009}$

8．$\frac{382+498\times381}{382\times498-116}$

9．$3.6\times1994.4+2006.9\times6.4$

10. $\dfrac{1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1}{88888888\times88888888}$

11. $\left(\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{21}+\dfrac{1}{31}+\dfrac{1}{41}\right)\times\left(\dfrac{1}{21}+\dfrac{1}{31}+\dfrac{1}{41}+\dfrac{1}{51}\right)-\left(\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{21}+\dfrac{1}{31}+\dfrac{1}{41}+\dfrac{1}{51}\right)\times\left(\dfrac{1}{21}+\dfrac{1}{31}+\dfrac{1}{41}\right)$

12. $\left(\dfrac{531}{135}+\dfrac{579}{357}+\dfrac{753}{975}\right)\times\left(\dfrac{579}{357}+\dfrac{753}{975}+\dfrac{135}{531}\right)-\left(\dfrac{531}{135}+\dfrac{579}{357}+\dfrac{753}{975}+\dfrac{135}{531}\right)\times\left(\dfrac{579}{357}+\dfrac{753}{975}\right)$

13. $\dfrac{1\times2\times3+2\times4\times6+7\times14\times21}{1\times3\times5+2\times6\times10+7\times21\times35}$

14. $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\dfrac{1}{9^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{10^2}\right)$

15. $1949\times\left(\dfrac{1}{43}-\dfrac{1}{1992}\right)+43\times\left(\dfrac{1}{1949}-\dfrac{1}{1992}\right)-1992\times\left(\dfrac{1}{1949}+\dfrac{1}{43}\right)+13$

第 2 讲　分数数列求和（一）

一、方法和技巧

在计算分数的加、减法时，有一些分数计算题，按照常规方法计算会很复杂。如果将其中一些分数拆开，使得拆开后的一些分数相互抵消，以达到简算的目的，这就是拆项法或裂项法。以下是一些常用公式：

$$\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n\times(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$$

$$\frac{k}{n\times(n+k)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}$$

二、典型例题

一、基础（初赛级）

【例 1】　计算 $\frac{1}{10\times11}+\frac{1}{11\times12}+\cdots+\frac{1}{99\times100}$。

分析与解　本题属于“$\frac{1}{n\times(n+1)}$”类型，因而有 $\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$成立。

$$原式=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$$

$$=\frac{1}{10}-\frac{1}{100}=\frac{9}{100}$$

做一做 1　计算 $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{49\times50}$。

【例 2】　计算 $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}$。

分析与解　本题似乎不属于上面所讲的题型，但我们可以将分数的分母分解为两个连续自然数乘积的形式，即转化为“$\frac{1}{n\times(n+1)}$”类型，如 $2=1\times2$，$6=2\times3$，$12=3\times4$……

$$原式=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}+\frac{1}{7\times8}$$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+$

$\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)$

$=1-\frac{1}{8}$

$=\frac{7}{8}$

做一做 2　计算 $\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}+\frac{1}{156}$。

【例 3】　计算　$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{97\times99}$。

解　原式 $=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+$

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{97}-\frac{1}{99}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{97}-\frac{1}{99}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{99}\right)$

$=\frac{49}{99}$

小结　本题属于“$\frac{1}{n\times(n+k)}$”类型，因而有 $\frac{1}{n\times(n+k)}=\frac{1}{k}\times\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$ 成立。

做一做 3　计算 $\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\cdots+\frac{1}{98\times100}$。

二、培优（决赛级）

【例 4】计算：$1\frac{1}{3}-\frac{7}{12}+\frac{9}{20}-\frac{11}{30}+\frac{13}{42}-\frac{15}{56}$

分析与解　因为 $\frac{7}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$，$\frac{9}{20}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$，$\frac{11}{30}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$，$\frac{13}{42}=\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$，$\frac{15}{56}=\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$。

原式 $=1\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)-\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$

$$=1\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}$$

$$=1-\frac{1}{8}$$

$$=\frac{7}{8}$$

做一做 4　计算：$1\frac{1}{2}+\frac{5}{6}-\frac{7}{12}+\frac{9}{20}-\frac{11}{30}$

做一做 5　计算：$\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{81}+\frac{2}{243}$

【例 6】　计算$\left[7\frac{1}{3}-\left(\frac{49}{12}-\frac{63}{20}+\frac{77}{30}-\frac{91}{42}+\frac{105}{56}\right)\right]\div 22$

解原式$=\left[\frac{22}{3}-\left(\frac{49}{3}-\frac{49}{4}-\frac{63}{4}+\frac{63}{5}+\frac{77}{5}-\frac{77}{6}-\frac{91}{6}+\frac{91}{6}+\frac{105}{7}-\frac{105}{8}\right)\right]\div 22$

$$=\left(\frac{22}{3}-\frac{49}{3}+\frac{112}{4}-\frac{140}{5}+\frac{168}{6}-\frac{196}{7}+\frac{105}{8}\right)\times\frac{1}{22}$$

$$=\left(\frac{105}{8}-\frac{49-22}{3}+28-28+28-28\right)\times\frac{1}{22}$$

$$=\frac{33}{8}\times\frac{1}{22}$$

$$=\frac{3}{16}$$

做一做 6　$\left(\frac{15}{56}-\frac{13}{42}+\frac{11}{30}-\frac{9}{20}+\frac{7}{12}-\frac{1}{3}\right)\div\frac{1}{22}\times 91\div\frac{1}{8}$

（2002 年全国少年夏令营）

三、冲牌（总决赛级）

【例 7】　计算　$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+49+50}$。

分析与解　本题可先利用等差数列求和公式将各分数的分母化简，再利用公式求和。

原式$=\dfrac{1}{\dfrac{(1+2)\times2}{2}}+\dfrac{1}{\dfrac{(1+3)\times3}{2}}+\dfrac{1}{\dfrac{(1+4)\times4}{2}}+\cdots+$

$\dfrac{1}{\dfrac{(1+50)\times50}{2}}$

$=\dfrac{2}{2\times3}+\dfrac{2}{3\times4}+\dfrac{2}{4\times5}+\cdots+\dfrac{2}{50\times51}$

$=2\times\left(\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\dfrac{1}{4\times5}+\cdots+\dfrac{1}{50\times51}\right)$

$=2\times\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{50}-\dfrac{1}{51}\right)$

$=2\times\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{51}\right)$

$=\dfrac{49}{51}$

做一做 7　计算 $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+99}$。

灵活地运用裂项分解的方法来求分数数列之和，同样可以得到同一算题的多种解法。

【例 8】　计算 $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{21}+\dfrac{1}{28}+\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{45}$。

解法 1　原式$=2\times\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\cdots+\dfrac{1}{72}+\dfrac{1}{90}\right)$

$=2\times\left(\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\dfrac{1}{4\times5}+\cdots+\dfrac{1}{8\times9}+\dfrac{1}{9\times10}\right)$

$=2\times\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{10}\right)$

$=\dfrac{4}{5}$

解法 2　原式$=\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\dfrac{1}{1+2+3+4}+\cdots+$

$\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+9}$

$=\dfrac{1}{\dfrac{(1+2)\times2}{2}}+\dfrac{1}{\dfrac{(1+3)\times3}{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\dfrac{(1+9)\times9}{2}}$

$=\dfrac{2}{2\times3}+\dfrac{2}{3\times4}+\cdots+\dfrac{2}{9\times10}$

$=\dfrac{4}{5}$

解法 3　原式$=\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right)+$

$\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{9}\right)+\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{5}\right)$

$=1-\frac{1}{5}$

$=\frac{4}{5}$

解法 4　分组法

原式$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right)+\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{28}\right)+\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{45}\right)=\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+$

$\frac{1}{7}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{9}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{25}$

$=1-\frac{1}{5}$

$=\frac{4}{5}$

做一做 8　计算$\frac{1}{6}+\frac{1}{30}+\frac{1}{70}+\frac{1}{126}+\frac{1}{198}$

【例 9】　从$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{5}{6}$，…，$\frac{97}{98}$，$\frac{98}{99}$，$\frac{99}{100}$中任选 10 个数，使这 10 个数之和等于 9。求这 10 个数分别是多少？(答案不惟一。)

分析与解　因为$\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$，所以要使这样的 10 个分数之和等于 9，即相当于从 2 到 100 中找 10 个不同的自然数的倒数的和等于 1。受此启发，我们得出：

$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{n+1}$

换句话说，有 $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n+1}=1$；

当取 n=9 时，即有 $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{9\times10}+\frac{1}{10}=1$；

所以，$\frac{1}{2}$、$\frac{5}{6}$、$\frac{11}{12}$、$\frac{19}{20}$、$\frac{29}{30}$、$\frac{41}{42}$、$\frac{55}{56}$、$\frac{71}{72}$、$\frac{89}{90}$、$\frac{9}{10}$ 为一种解法。

做一做 9　例 9 的答案很多，你还能想出其他的思路和解法吗？

练习二

一、A 组（基础题）

计算下列各题：

1. $\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}+\cdots\cdots+\frac{1}{39\times40}$

2. $\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}$

3. $\frac{1}{13\times15}+\frac{1}{15\times17}+\frac{1}{17\times19}+\cdots+\frac{1}{37\times39}$

4. $\frac{1}{2\times7}+\frac{1}{7\times12}+\frac{1}{12\times17}+\frac{1}{17\times22}+\cdots+\frac{1}{92\times97}+\frac{1}{97\times102}$

二、B 组（培优题）

5．$11+13\frac{1}{6}+15\frac{1}{12}+17\frac{1}{20}+19\frac{1}{30}+21\frac{1}{42}+23\frac{1}{56}+25\frac{1}{72}+27\frac{1}{90}$

6．$1\frac{1}{4}-\frac{9}{20}+\frac{11}{30}-\frac{13}{42}+\frac{15}{56}$

7．$\frac{7}{10}-\frac{13}{40}+\frac{19}{88}-\frac{25}{154}+\frac{31}{238}$

8．$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{3^{100}}$

9. $\left(1-\frac{1}{15}\right)+\left(1-\frac{1}{35}\right)+\left(1-\frac{1}{63}\right)+\left(1-\frac{1}{99}\right)+\left(1-\frac{1}{143}\right)+\left(1-\frac{1}{195}\right)+\left(1-\frac{1}{255}\right)+\left(1-\frac{1}{323}\right)+\left(1-\frac{1}{399}\right)+\left(1-\frac{1}{483}\right)$

三、（选做）C 组（冲牌题）

10．从$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，…，$\frac{99}{100}$中任选五个数，使这五个数的和等于 4。

11．$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+1990}$

12．比较 $S_{2000}=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots\cdots+\frac{2000}{2^{2000}}$与 2 的大小．

第 3 讲　分数数列求和（二）

一、方法和技巧

在前面学习分数数列求和的基本类型的基础上，本讲我们继续学习较复杂的分数数列求和，以及对分数数列求和的灵活应用。要善于将各分母分解成恰当的整数乘积的形式，便于拆项，而且拆开以后可消去一些项，从而简化运算。以下是一些常用公式：

① $\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{n\times(n+1)}-\frac{1}{(n+1)\times(n+2)}\right]$

② $\frac{1}{n\times(n+k)\times(n+2k)}=\frac{1}{2k}\times\left[\frac{1}{n\times(n+k)}-\frac{1}{(n+k)\times(n+2k)}\right]$

③ $\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{1}{3}\times\left[\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}-\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}\right]$

④ $\frac{1}{n\times(n+k)\times(n+2k)\times(n+3k)}=\frac{1}{3k}\times\left[\frac{1}{n\times(n+k)\times(n+2k)}-\frac{1}{(n+k)\times(n+2k)\times(n+3k)}\right]$

……

二、典型例题

一、基础（初赛级）

【例 1】　计算 $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{9\times10\times11}$。

分析与解　本题属于“$\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}$”类型。根据公式①进行分解：

原式 $=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{9\times10}-\frac{1}{10\times11}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10\times11}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{54}{110}$

$=\frac{27}{110}$

做一做 1　计算 $\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\cdots+\frac{1}{8\times9\times10}$。