

“世少赛”(中国区)选拔赛指定专用教材

海峡两岸数学邀请赛指定专用教材



丛书主编：叶立军

主 编：陈思思

我的第一本奥数书

奥数冠军的 零起步秘笈

九年级+中考

200个以上知识点

帮你构建数学知识体系

75道典型例题+75道深度拓展

让你轻松掌握解题技巧

225道跟踪练习及时学习效果检验



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

“世少赛”(中国区)选拔赛指定专用教材

海峡两岸数学邀请赛指定专用教材



我的第一本奥数书

奥数冠军的 零起步秘笈

九年级+中考

丛书主编：叶立军

主 编：陈思思

编 委：陈思思 王晓楠 刘春江 郭 风 陈亚楠 王 莹 赵亚云

程龙红 李昱茜 李亚辉 罗 强 高华岳 孟泽琪



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

· 上海 ·

图书在版编目(CIP)数据

我的第一本奥数书:奥数冠军的零起步秘笈. 九年级+中考/陈思思主编. —上海:华东理工大学出版社, 2015. 6

(给力数学·我的第一本奥数书/叶立军)

ISBN 978-7-5628-4006-0

I. ①我… II. ①陈… III. ①中学数学课—初中—升学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 186643 号

给力数学

我的第一本奥数书:奥数冠军的零起步秘笈(九年级+中考)

丛书主编/叶立军

主 编/陈思思

策划编辑/庄晓明

责任编辑/赵子艳

责任校对/成 俊

封面设计/裴幼华

出版发行/华东理工大学出版社有限公司

地 址:上海市梅陇路 130 号,200237

电 话:(021)64250306(营销部)

(021)64252718(编辑室)

传 真:(021)64252707

网 址:press.ecust.edu.cn

印 刷/南通印刷总厂有限公司

开 本/787 mm×1092 mm 1/16

印 张/16.5

字 数/384 千字

版 次/2015 年 6 月第 1 版

印 次/2015 年 6 月第 1 次

书 号/ISBN 978-7-5628-4006-0

定 价/39.80 元

联系我们:电子邮箱 press@ecust.edu.cn

官方微博 e.weibo.com/ecustpress

天猫旗舰店 <http://hdlgdxcb.tmall.com>



前言

当下的数学教育存在很多误区,其中最大的误区就是“奥数万能”以及对应的“奥数无用”.那么奥数到底是什么?中学生应不应该学习“奥数”?很多家长对此都心存疑虑.“奥数”是奥林匹克数学的简称.1934年和1935年,苏联开始在列宁格勒和莫斯科举办中学数学竞赛,并冠以数学奥林匹克的名称,1959年在布加勒斯特举办第一届国际数学奥林匹克.国际数学奥林匹克作为一项国际性赛事,由国际数学教育专家命题,出题范围超出了所有国家的义务教育水平,难度大大超过大学入学考试.

有关专家认为,只有5%的智力超常的青少年适合学奥林匹克数学,而能一路过关斩将冲到国际数学奥林匹克巅峰的人更是凤毛麟角.只有在学校课堂上数学学得相对比较扎实、学有余力且又对数学有浓厚兴趣和钻研精神的学生才适合学习奥数.《我的第一本奥数书》就是一套针对学有余力且对数学有浓厚兴趣和钻研精神的学生的必备参考资料.

本书在内容编排上,结合最新奥数竞赛的要求,设置了以下栏目:

【知识·方法·规律】对每一讲所要掌握的知识点进行了提纲挈领的归纳总结(包括主要公式、定理和常用的数学思想方法等),帮助学生对本讲的知识体系有一个全面的了解与认识,做到胸有成竹,从而提高学习效率.

【典例·解析·拓展】精选典型例题,进行深入分析,对每一道题的解题关键点都一一地进行了解读,帮助学生厘清思路、拓展思维,让学生真正能做到举一反三,全面提高解题综合能力.

【测训·反馈·应用】精选与本讲有关的针对性训练,杜绝题海战术,每道题都在书后的**【思路·点拨·详解】**中给出精辟的解题提示与分析.

即便不打算在奥数上有所建树,如果学有余力,也推荐大家研读本套丛书,这对于培养以下四方面的数学能力大有裨益.

1. 基础运算能力

这方面的能力表现为能准确、快速地处理数据;能熟练地对含字母的解析式进行运算,并能在完成运算后做出全面、准确、合理的结论;能明确算理,能理解如何进行算法的优化.

2. 逻辑思维能力

这方面的能力表现为能正确理解各数学对象间的逻辑关系;能严格从概念、理论出发进行逻辑推理,得出正确结论;能正确识别充分条件、必要条件和充要条件;能正确运用数

学归纳法、反证法等基本论证方法.

3. 空间想象能力

这方面的能力表现为能正确认识空间图形的形状、大小和位置关系;能作出体现特定空间位置关系的几何图形;能在不便于作图的情况下正确想象出几何体之间的位置关系.

4. 数学语言表达能力

这方面的能力表现为能正确使用数学符号;能准确、简洁地表达出数学内容,且语句完整、连贯,层次清楚;当论证或解答各类数学问题时,能用字(或字母)准确,能注意到数学论文的书写规范,论文中的图形要求表现力强,且注重作图规范,能做到图、文相符.

除了上述四大能力之外,以下能力也在本套教材中有所体现:将实际问题抽象为数学问题的能力;数形结合相互转化的能力;观察、实验、比较、猜想、归纳问题的能力;研究、探讨问题的能力和创新能力.

由于水平有限,书中不足之处在所难免,笔者真诚地希望读者提出宝贵建议.

目 录

第1讲	反比例函数 / 1
第2讲	一元二次方程与判别式 / 11
第3讲	根与系数的关系及其应用 / 17
第4讲	二次函数 / 24
第5讲	一元二次不等式 / 31
第6讲	二次函数的最值与应用 / 38
第7讲	相似三角形及其性质 / 44
第8讲	相似的运用及共线(点)问题 / 52
第9讲	锐角三角函数 / 60
第10讲	解直角三角形 / 67
第11讲	三角形的外心与内心 / 74
第12讲	三角形的重心和垂心 / 82
第13讲	统计与概率 / 89
第14讲	圆的基本性质 / 98
第15讲	直线与圆 / 106
第16讲	圆与圆的位置关系 / 114
第17讲	圆幂定理 / 122
第18讲	四点共圆 / 130
第19讲	几何定值问题 / 138
第20讲	几何最值问题 / 147
第21讲	分类与讨论 / 156
第22讲	数形结合 / 164
第23讲	反证法 / 172
第24讲	极端原理 / 179
第25讲	染色问题 / 185
思路·点拨·详解 / 191	

第 1 讲

反比例函数



知识 · 方法 · 规律

1. 定义

一般地，形如 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$) 的函数称为反比例函数. $y = \frac{k}{x}$ 还可以写成 $y = kx^{-1}$.

2. 反比例函数解析式的特征

- (1) k 是常数, 且 k 不为零;
- (2) $\frac{k}{x}$ 中分母 x 的指数为 1, 如 $y = \frac{2}{x^2}$ 就不是反比例函数;
- (3) 自变量 x 的取值范围是 $x \neq 0$ 的一切实数;
- (4) 因变量 y 的取值范围是 $y \neq 0$ 的一切实数.

3. 反比例函数的图像

反比例函数的图像是双曲线, $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$) 中自变量 $x \neq 0$, 函数值 $y \neq 0$, 所以双曲线是不经过原点、断开的两个分支, 延伸部分逐渐靠近坐标轴, 但是不与坐标轴相交.

反比例函数的图像是轴对称图形(对称轴是 $y = x$ 或 $y = -x$).

反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 中比例系数 k 的几何意义是: 过双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 上任意一点作 x 轴、 y 轴的垂线, 所得矩形面积为 $|k|$.

反比例函数的性质如表 1-1.

表 1-1

k 的取值	图像所在象限	函数的增减性
$k > 0$	一、三象限	在每个象限内, y 值随 x 的增大而减小
$k < 0$	二、四象限	在每个象限内, y 值随 x 的增大而增大

以 $y = \frac{1}{x}$ 和 $y = -\frac{1}{x}$ 为例, 其图像如图 1-1 所示.

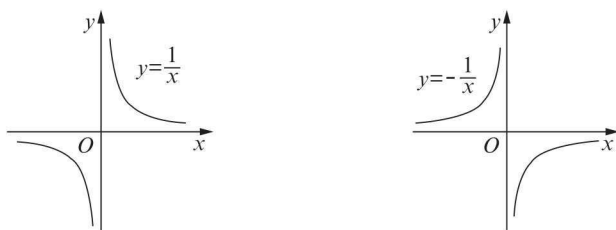
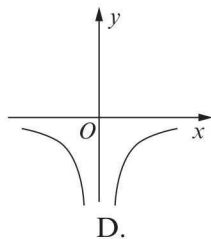
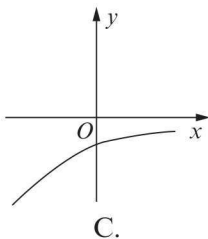
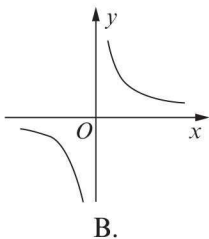
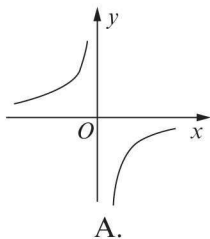


图 1-1

典例·解析·拓展

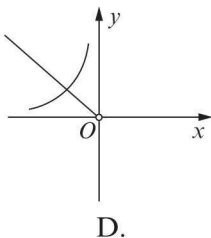
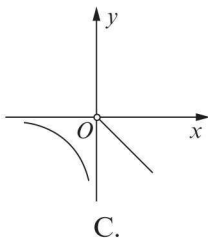
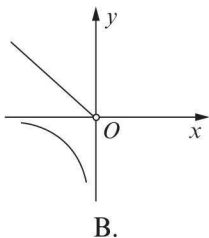
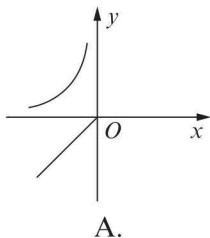
【例1】 函数 $y = -\frac{1}{|x|}$ 图像的大致形状是().



» **【解析】** 对于函数 $y = -\frac{1}{|x|}$ 的图像,我们很生疏,但我们掌握了反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像,故可从我们熟悉的图像入手.

选项 A 的图像是 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 的图像;选项 B 的图像是 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 的图像;选项 C 的图像与 y 轴有一个交点,说明 x 可以等于零,而函数 $y = -\frac{1}{|x|}$ 中的 $x \neq 0$. 最后我们再来讨论一下函数 $y = -\frac{1}{|x|}$, 由于 $x \neq 0$, 所以 y 始终都是负数, 它的图像应该分布在第三、第四象限. 故选 D.

» **【拓展】** 如果 $|x| > x$, 且 $kp < 0$, 那么, 在自变量 x 的取值范围内, 正比例函数 $y = kx$ 和反比例函数 $y = \frac{p}{x}$ 在同一直角坐标系中的图像示意图正确的是().



» **【提示】** 由 $|x| > x$ 可得, $x < 0$, 再结合 $kp < 0$ 进行讨论.

因为 $|x| > x$, 所以 $x < 0$, 所以两函数可能在第二、三象限. 又由 $kp < 0$, 可知两函数图像不在同一象限. 故选 B.

【例3】 如图1-5,已知正方形OABC的面积为9,点O为坐标原点,点A在x轴上,点C在y轴上,点B在函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k>0, x>0$)的图像上,点 $P(m, n)$ 为其双曲线上的任一点,过点P分别作x轴、y轴的垂线,垂足分别为E, F,并设矩形OEPF和正方形OABC不重合部分的面积为S.

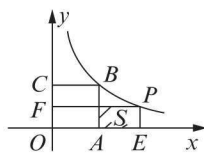


图 1-5

- (1) 求B点坐标和k的值;
- (2) 当 $S = \frac{9}{2}$ 时,求P点坐标;
- (3) 写出S关于m的函数关系式.

» **【解析】** 由正方形OABC的面积为9,可推得 $k=9$.第(2)问要考虑 $m \geq 3$ 和 $0 < m < 3$ 两种情况.

(1) 因为正方形OABC的面积为9,所以 $OA=AB=3$,且 $k=9$,所以点B的坐标为(3,3).

(2) 因点P的坐标为 (m, n) .当 $m \geq 3$ 时,如图1-6, $AE = m - 3, P_1E = n = \frac{9}{m}$.

所以当 $S = \frac{9}{2}$ 时,有 $AE \cdot P_1E = \frac{9}{2}$,

即 $(m-3) \cdot \frac{9}{m} = \frac{9}{2}$.解得 $m=6$.

故 P_1 点的坐标为 $(6, \frac{3}{2})$.

当 $0 < m < 3$ 时,如图1-6, $P_2F = m, FC = n - 3 = \frac{9}{m} - 3$.

所以当 $S = \frac{9}{2}$ 时,有 $P_2F \cdot FC = \frac{9}{2}$.

即 $m \cdot (\frac{9}{m} - 3) = \frac{9}{2}$.解得 $m = \frac{3}{2}$.

即 P_2 点的坐标为 $(\frac{3}{2}, 6)$.

(3) 参照第(2)题可知,当 $m \geq 3$ 时,如图1-6,

$$S = AE \cdot P_1E = (m-3) \cdot \frac{9}{m} = 9 - \frac{27}{m}.$$

当 $0 < m < 3$ 时,如图1-7,

$$S = P_2F \cdot FC = m \cdot (\frac{9}{m} - 3) = 9 - 3m.$$

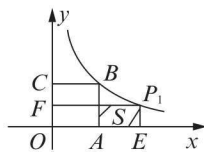


图 1-6

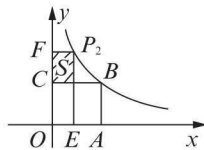


图 1-7

【拓展】 如图 1-8, 平行四边形 $ABCD$ 的顶点 A, B 的坐标分别是 $A(-1, 0), B(0, -2)$, 顶点 C, D 在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上, 边 AD 交 y 轴于点 E , 且四边形 $BCDE$ 的面积是 $\triangle ABE$ 面积的 5 倍, 试求 k 的值.

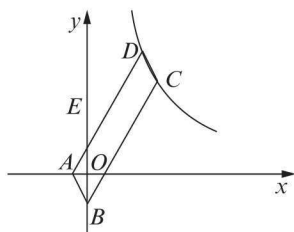


图 1-8

【提示】 如图 1-9, 过 C, D 两点分别作 x 轴的垂线, 垂足为 F, G , DG 交 BC 于 M 点, 过 C 点作 $CH \perp DG$, 垂足为 H .

因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

所以 $\angle ABC = \angle ADC, AB = CD, AD \parallel BC$.

因为 $BO \parallel DG$,

所以四边形 $EBMD$ 是平行四边形.

所以 $\angle OBC = \angle GDE$.

所以 $\angle HDC = \angle ABO$.

所以 $\triangle CDH \cong \triangle ABO$ (AAS).

所以 $CH = AO = 1, DH = OB = 2$.

设 $H(m, n)$, 则 $C(m+1, n), D(m, n+2)$, 则 $(m+1)n = m(n+2) = k$,

解得 $n = 2m$.

设直线 AD 的解析式为 $y = ax + b$, 将 A, D 两点坐标代入得 $\begin{cases} -a + b = 0, \\ ma + b = 2m + 2, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a = 2, \\ b = 2, \end{cases}$

所以直线 AD 的解析式为 $y = 2x + 2, E(0, 2), BE = 4$.

所以 $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AO = 2$.

因为 $S_{\text{四边形}BCDE} = 5S_{\triangle ABE} = 10$,

所以 $S_{\triangle ABD} = 6$,

故 $S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} \times 4m = 4$,

解得 $m = 2$,

所以 $n = 2m = 4$,

故 $k = (m+1)n = 12$.

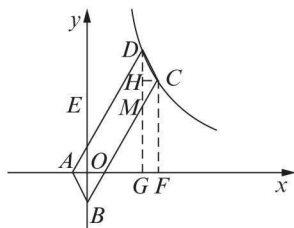


图 1-9

► 测训 · 反馈 · 应用

1. 如图 1-10, A, B 是函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图像上的两点, 点 C, D, E, F 分别在坐标轴上, 且与点 A, B, O 构成正方形和长方形. 若正方形 $OCAD$ 的面积为 6, 则长方形 $OEBF$ 的面积是().

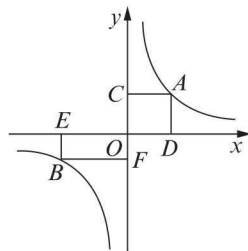
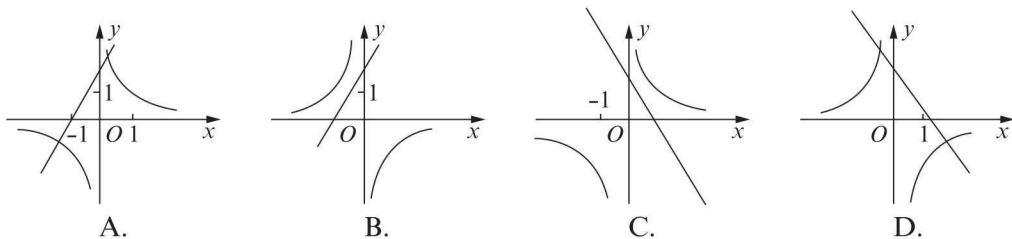


图 1-10

- A. 3
- B. 6
- C. 9
- D. 12

2. 反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 与一次函数 $y = k(x+1)$ 的图像只可能是().



3. 如图 1-11 所示, 点 A 是双曲线 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 上的一动点, 过点 A 作 $AC \perp y$ 轴, 垂足为点 C , 作 AC 的垂直平分线与双曲线交于点 B , 交 x 轴于点 D . 当点 A 在双曲线上从左到右运动时, 四边形 $ABCD$ 的面积().

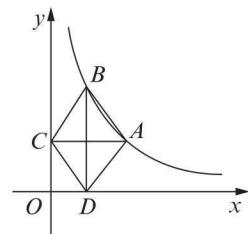


图 1-11

- A. 逐渐变小
 - B. 由大变小再由小变大
 - C. 由小变大再由大变小
 - D. 不变
4. 方程 $x - 4 = \frac{3}{x}$ ().
- A. 有 1 个实根
 - B. 有 2 个不同的实根
 - C. 有 2 个相等的实根
 - D. 无实根

5. 某医药研究所开发一种新药,成年人按规定的剂量服用,服药后每毫升血液中的含药量 y (毫克) 与时间 t (小时) 之间的函数关系近似满足如图 1-12 所示的曲线,当每毫升血液中的含药量不少于 0.25 毫克时治疗有效,则服药一次治疗疾病的有效时间为().

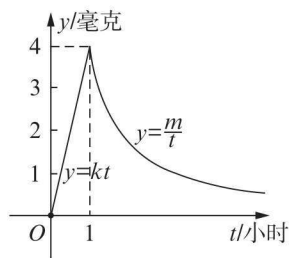


图 1-12

A. 16 小时

B. $15\frac{7}{8}$ 小时

C. $15\frac{15}{16}$ 小时

D. 17 小时

6. 如图 1-13, 点 A 在反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ ($x > 0$) 的图像上, 点 B 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图像上, $AB \perp x$ 轴于点 M , 且 $AM : MB = 1 : 2$, 则 k 的值为_____.

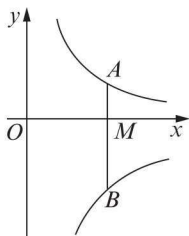


图 1-13

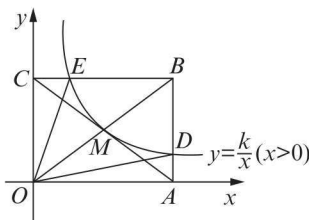


图 1-14

7. 如图 1-14, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图像经过矩形 $OABC$ 的对角线的交点 M , 分别与 AB, BC 相交于点 D, E . 若四边形 $ODBE$ 的面积为 3, 则 k 的值为_____.

8. 反比例函数 $y = (3m-1)x^{m^2-2}$ 的图像所在的象限内, y 随 x 增大而增大, 则反比例函数的解析式是_____.

9. 如图 1-15, A, B 是双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 上的点, A, B 两点的横坐标分别是 $a, 2a$, 线段 AB 的延长线交 x 轴于点 C , 若 $S_{\triangle AOC} = 9$, 则 $k =$ _____.

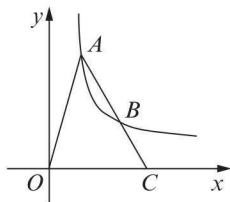


图 1-15

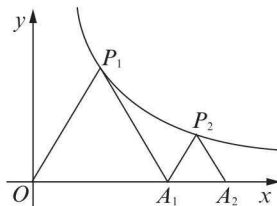


图 1-16

10. 如图 1-16, P_1 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 在第一象限图像上的一点, 点 A_1 的坐标为 $(2, 0)$. 若 $\triangle P_1OA_1$ 与 $\triangle P_2A_1A_2$ 均为等边三角形, 则 A_2 点的坐标为_____.

11. 如图 1-17, 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图像经过点 $(\frac{1}{2}, 8)$, 直线 $y = -x + b$ 经过该反比例函数图像上的点 $Q(4, m)$.

(1) 求上述反比例函数和直线的函数解析式;

(2) 设该直线与 x 轴、 y 轴分别相交于 A, B 两点, 与反比例函数图像的另一个交点为 P , 连接 OP, OQ , 求 $\triangle OPQ$ 的面积.

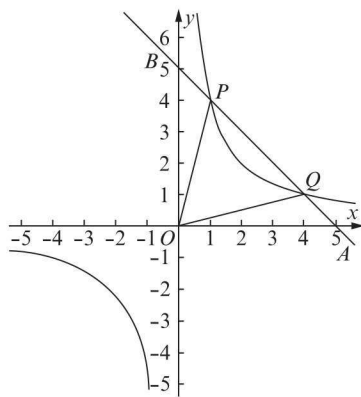


图 1-17

12. 已知: 如图 1-18 是反比例函数 $y = \frac{k}{2x}$ 和一次函数 $y = 2x - 1$, 其中一次函数的图像经过 (a, b) 、 $(a+1, b+k)$ 两点.

(1) 求反比例函数的解析式.

(2) 若点 A 的坐标是 $(1, 1)$, 请问: 在 x 轴上是否存在点 P , 使 $\triangle AOP$ 为等腰三角形? 若存在, 把符合条件的点 P 的坐标都求出来; 若不存在, 请说明理由.

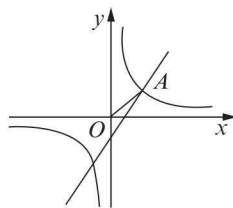


图 1-18

13. 如图 1-19, 在直角坐标系中, O 为坐标原点. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 的图像经过点 $A(2, m)$, 过点 A 作 $AB \perp x$ 轴于点 B , 且 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{1}{2}$.

- (1) 求 k 和 m 的值;
- (2) 点 $C(x, y)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像上, 求当 $1 \leq x \leq 3$ 时函数值 y 的取值范围;
- (3) 过原点 O 的直线 l 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像交于 P, Q 两点, 试根据图像直接写出线段 PQ 长度的最小值.

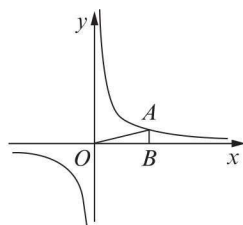


图 1-19

14. 如图 1-20, 已知直线 AB 与 x 轴交于点 C , 与双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 交于 $A(3, \frac{20}{3})$ 、 $B(-5, a)$ 两点, $AD \perp x$ 轴于点 D , $BE \parallel x$ 轴且与 y 轴交于点 E .

- (1) 求点 B 的坐标及直线 AB 的解析式;
- (2) 判断四边形 $CBED$ 的形状, 并说明理由.

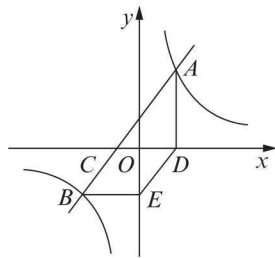


图 1-20

第 2 讲

一元二次方程 与判别式

