高职高专工科类规划教材
浙江省重点建设教材

GONGKE GAODENG SHUXUE

工科高等数学

◎陈沛森 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高职高专工科类规划教材
浙 江 省 重 点 建 设 教 材

工科高等数学

主　编　陈沛森
副主编　金慧萍　吴金勇　潘　媛　张胜兵

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

工科高等数学/陈沛森主编．—杭州：浙江大学出版社，2011.6
ISBN 978-7-308-08796-4

Ⅰ.①工… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 119839 号

工科高等数学

陈沛森 主编

责任编辑 石国华
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版 杭州星云光电图文制作工作室
印　　刷 富阳市育才印刷有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 17
字　　数 435 千
版 印 次 2011 年 6 月第 1 版 2011 年 6 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-08796-4
定　　价 28.00 元

前　言

《工科高等数学》是浙江省重点建设教材，是作者长期为高职高专工科类学生讲授“高等数学”课的经验总结。

本教材共分为十一章，包括函数、极限及连续；导数与微分；微分学的应用；不定积分；定积分及其应用；微分方程及其应用；向量与空间解析几何；多元函数的微分学；无穷级数；傅里叶级数；MATLAB 数学实验简介。每章后都配有本章小结，供读者复习用。每章节后也配有相应的练习，供读者巩固所学知识。本教材还试图做到：

1.理论知识，够用为度，注重知识的传授，淡化理论推理。一方面不失知识的系统性和连贯性，另一方面对一些重要但纯粹是理论性的定理和性质仅仅给予叙述而不一一论证。

2.知识处理上，实用为主。为避免因一些数学概念和内容的抽象枯燥而影响读者的学习兴趣，该教材力图遵循“问题引入→产生数学→解决问题”的思路。在不影响整体的前提下，本书第一章后面也介绍了极限概念的精确描述，这为一部分数学功底好的学生深入理解极限这一重要概念提供了帮助。

3.例子的选择，体现针对性和应用性。该书是工科类学生专用的，因此在例子的选择时，尽量把与工科类专业联系紧密的具体例子呈现给读者，便于激发学习热情。

另外，本教材的每一章开始都有部分数学家的故事介绍。每个数学家的故事都是一部数学史，通过阅读它们，可培养读者热爱数学的热情，同时得到良好意志品质的熏陶。在最后一章，引入数学软件，用以解决繁琐的计算和作图，为今后读者提高解决具体问题的效率作一准备。

参加本教材编写工作的由陈沛森、金慧萍、吴金勇、潘媛、张胜兵等，陈沛森负责第一、二、三和四章的编写；金慧萍负责第六、七章；吴金勇负责第八、十一章；潘媛负责第九、十章；张胜兵负责第五章。

全书由陈沛森负责审稿。

限于编者水平，同时编写时间也较仓促，书中难免存在不妥之处，希望读者批评指正。

编　者

2010 年 10 月

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

初等数学的研究对象基本上是不变的量,即通常所讲的常量,而高等数学研究的主要对象是变量及变量之间的关系即函数.函数是高等数学最基本的概念之一,本章从讨论函数的概念开始,通过对一般函数特性的概括,引入初等函数,为学习“高等数学”打下基础.

极限、连续的概念也是高等数学的最基本概念.在高等数学里,极限方法是深入研究函数和解决各种问题的基本思想方法,微积分学中的其他重要概念如导数、定积分等都是用极限来表述的.为了便于理解和掌握极限概念,我们从讨论一种最简单的情形 —— 数列的极限入手,进而讨论函数的极限.函数的连续性与函数的极限密切相关,在本章里我们将介绍函数的连续性概念及连续函数的一些重要性质.

在高等数学中,函数的自变量和因变量都取实数,所以研究函数离不开实数,这里我们将对实数及实数集(如区间、邻域等)作一简单介绍.鉴于初学者在学习本课程前所掌握的初等数学知识的差异,我们将适当地介绍或复习初等数学中的一些重要结果和公式,供学习者选用.同时为让初学者对数学王国史有一定的了解,我们在每章开头或结尾部分会插入一些数学历史上著名数学家的简介,以增加学习者对数学尤其是高等数学历史的了解,增强学习兴趣与爱好.

阅读材料 READ 数学王子高斯(Gauss)

高斯(Johann Carl Friedrich Gauss)(1777—1855),德国著名数学家、物理学家、天文学家、大地测量学家,生于不伦瑞克,卒于哥廷根.

高斯出生于德国的一个农民家庭,他的母亲是一个贫穷石匠的女儿,虽然十分聪明,但却没有接受过教育.在她成为高斯父亲的第二个妻子之前,她从事女佣工作.他的父亲曾做过园丁、工头、商人的助手和一个小保险公司的评估师.

在古今中外的著名数学家当中,像高斯那样从小就具有高度数学才华的,恐怕极为少见.他从小就酷爱数学,据说在他还不满三岁的时候,有一天,他观看父亲算账,计算结束后,父亲念出了钱数准备写下时,身边传来细小的声音:“爸爸,算错了,总数应该是……”.父亲惊讶不止,复算结果,发现孩子的答案是正确的.高斯读小学的时候,有一次,老师出了一道难题,要他们从 1 加起,加 2,加 3,加 4,… 一直加到 100,满以为这下准能把学生们难住.没想到高斯一会儿就算了出来,老师一看,答数是 5050,一点不错,大吃一惊.高斯是这样算的:1 与 100、2 与 99、3 与 98、… 每一对的和都是 101,而 100 以内这样的数共有 50 对,$101 \times 50 = 5050$,他的这种计算方法,代数上称为等差级数求和公式.那时高斯才 9 岁.

高斯对数学的兴趣越来越浓,数学上的定理、公式和求证方法一个又一个地被他发现和证实.11 岁时,他发现了 $(x+y)^n$ 的展开式.17 岁时,他发现了数论中的二次互反律.18 岁时,

高斯又有了堪称数学史上最惊人的发现,他用代数方法解决两千年来的几何难题,而且找到了只使用直尺和圆规作圆内接正17边形的方法,也称17边形直尺圆规画法.为了纪念他少年时的这一最重要的发现,高斯表示希望死后在他的墓碑上能刻上一个正17边形.21岁时,高斯又证明了一个重要的定理:任何一元代数方程都有一个根,这一结果数学上称为“代数基本定理”,也被称做“高斯定理”.23岁时,高斯出版了他的《算术论文集》,并开始研究天文,解决了测量星球椭圆轨道的方法,也称椭圆函数.

高斯所取得的成就,一方面来自天赋,一方面来自勤奋.他家里很穷,冬天,爸爸为了节省灯油,吃完晚饭就要他上床睡觉,高斯自己做了个油灯,在微弱的灯光下全神贯注地读书到深夜.15岁时,他就读了牛顿、欧拉、拉格朗日等著名数学家的数学著作,并熟练地掌握了微积分理论.高斯的成功,不是天上掉下来的,而是刻苦学习得来的.他把科学研究工作看得高于一切.妻子病重时,高斯正在钻研一个深奥的数学问题,仆人几次来叫他:“如果您不马上过去,就不能见她最后一面了!”高斯却说:“叫她等一下,等到我过去”.直到他把手头的研究告一段落,这才匆匆跑去看望妻子.

高斯就是这样,天资聪明,更勤奋好学,终于成为著名的数学家,被誉为“数学王子”.高斯不仅被公认为是十九世纪最伟大的数学家,并且与阿基米德、牛顿并称为历史上三个最伟大的数学家.现在阿基米德和牛顿的名字早已进入了中学的教科书,他们的工作或多或少成为大众的常识,而高斯和他的数学仍遥不可及甚至于在大学的基础课程中也不出现.但高斯的肖像画却赫然印在10马克——流通最广泛的德国纸币上,相应地出现在美元和英镑上的分别是乔治·华盛顿和伊丽莎白二世.

高斯不仅是数学家,还是那个时代最伟大的物理学家和天文学家之一.在物理学方面,高斯最引人注目的成就是在1833年和物理学家韦伯发明了有线电报,这使高斯的声望超出了学术圈而进入公众社会.除此以外,高斯在力学、测地学、水工学、电动学、磁学和光学等方面均有杰出的贡献.即使是数学方面,我们谈到的也只是他年轻时候在数论邻域里所做的一小部分工作,在他漫长的一生中,他几乎在数学的每个邻域都有开创性的工作.例如,在他发表了《曲面论上的一般研究》之后大约一个世纪,爱因斯坦评论说:“高斯对于近代物理学的发展,尤其是对于相对论的数学基础所作的贡献(指曲面论),其重要性是超越一切,无与伦比的”.

高斯22岁获博士学位,25岁当选圣彼得堡科学院外籍院士,30岁任哥廷根大学数学教授兼天文台台长.虽说高斯不喜欢浮华荣耀,但在他成名后的五十年间,这些东西就像雨点似的落在他身上,几乎整个欧洲都卷入了这场授奖的风潮,他一生共获得75种形形色色的荣誉,包括1818年英王乔治三世赐封的“参议员”,1845年又被赐封为“首席参议员”.高斯的两次婚姻也都非常幸福,第一个妻子死于难产后,不到十个月,高斯又娶了第二个妻子.高斯于1855年2月23日凌晨1点在哥廷根去世,享年78岁.

1.1 预备知识

1.1.1 实 数

1.集合

集合是数学中一个基本的概念,我们可通过例子来理解它.某一个教室里的学生构成一个集合;太阳及围绕太阳运动的星体构成集合,称为太阳系;所有有理数或全体实数也分别构成

集合，我们通常称为有理数集或实数集，等等．一般地，集合（简称集）即具某种属性的事物的全体．集合一般用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 来记，而组成这个集合的事物称为该集合的元素，一般用小写字母 $a, b, c, \cdots$ 来记．事物 a 是集合 A 的元素记作 $a \in A$（读作 a 属于 A）；事物 a 不是集合 A 的元素记作 $a \notin A$（读作 a 不属于 A）．很显然，事物 a 与集合 A 的关系是：要么 $a \in A$，要么 $a \notin A$．

集合一般有两种表示法，即列举法和描述法．所谓列举法就是集合中的所有元素都一一列出来的方法，如 A 是由 2，4，6，8，10 五个数构成的集合，记作 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$，也就是说 $\{\}$ 把 A 的元素一一列举出来了．而描述法就是通过给出元素的特性来表示集合的方法，一般用 $A = \{a \mid a$ 具有性质$\}$ 来表示具有某种性质的全体元素 a 构成的集合．如上述的集合 A 也可记为：

$$A = \{2n \mid n \leqslant 5, n \text{ 为正整数}\}.$$

又如满足方程 $x^3 + 4x^2 + 3x = 0$ 的全体根的集合 A，用列举法表示为 $A = \{0, -1, -3\}$；用描述法表示为 $A = \{x \mid x^3 + 4x^2 + 3x = 0\}$．

由此可见，一个集合可以有不同的表示法，即集合的表示法不是唯一的．

只含有一个元素的集合也叫单元集；不含有任何元素的集合叫空集，记为 $\varnothing$，如方程 $x^2 + 1 = 0$ 的全体实数根的集合就是一个空集，事实上，$x^2 + 1 = 0$ 在实数范围内无实根．

现在来考察两个集合：

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 与 $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$．

可以看出 A 中的每一个元素都是 B 中的元素，即属于 A 的元素都属于 B，我们称 A 包含于 B，并记作 $A \subset B$．当 $A \subset B$ 时称 A 为 B 的子集．

【例 1.1】　设 $A = \{0, 1, 2\}$，则集合 A 的所有子集有 2^3 个，它们是 $\varnothing$，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{0, 1\}$，$\{0, 2\}$，$\{1, 2\}$，$\{0, 1, 2\}$．一般地，由 n 个元素组成的集合，子集的总数共有 2^n 个．

要注意，在考虑集合 A 的所有子集时不要漏掉集合 A 本身和空集 $\varnothing$．

设 A, B 是两个集合，如果 $A \subset B$，$B \subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A = B$．

很明显，两个集合只有含相同元素时才相等．

【例 1.2】　集合 $A = \{0, -1, -3\}$ 与集合 $B = \{x \mid x^3 + 4x^2 + 3x = 0\}$ 是相等的．

设集合 A, B, C，如果 $x \in C$，则 $x \in A$ 或 $x \in B$，则称 C 为 A 与 B 的并集，记为 $C = A \cup B$，显然并集 C 把集合 A, B 作为子集，即 $A \subset C$ 且 $B \subset C$．

【例 1.3】　$\{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$．

设集合 A, B, C，如果 $x \in C$，则 $x \in A$ 且 $x \in B$，则称 C 为 A 与 B 的交集，记为 $C = A \cap B$．可以看出集合 C 是由集合 A, B 的公共元素所构成，它是 A, B 的子集．例 1.3 中给出的两集合 $\{1, 2, 3\}$ 与 $\{1, 2, 4, 5\}$，其交集为 $\{1, 2\}$，即

$$\{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 4, 5\} = \{1, 2\}.$$

2．实数集

高等数学这门课程主要是在实数范围之内讨论问题的，因此对于实数或实数集必须有比较清晰的认识．在这一节我们将对此作一简单的介绍．

人们对实数的认识是逐步发展的，首先是自然数 0，1，2，3，4，$\cdots$ 其全体记为 N，并称之为自然数集，在 N 内我们可定义加法与乘法运算．随着客观事物的发展，从自然数集扩充到有理数集，任一有理数都可以表示成 $\frac{p}{q}$（p, q 为整数，且 $q \neq 0$），有理数集用 Q 表示．有理数集对通常的四则运算是封闭的（所谓封闭即对数集中各元素经四则运算后其值仍在数集中，当然除数不能为 0）．

显然有理数集的引进解决了许多实际问题,但对如何表示方程 $x^2=2$ 的根这一问题却无能为力.前人在有理数集基础上引进了实数集的概念.实数包括有理数与无理数(如满足 $x^2=2$ 的 x 就是无理数,我们已知道 x 就是 $\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$),实数集通常用 R 表示.实数集对通常的四则运算也是封闭的.

有关实数的许多性质诸如有序性、稠密性及连续性都可通过数轴直观地加以解释.数轴可如下确定:在一条直线上取定一点,记作 O,称其为原点;取直线的一个方向为正向,并用箭头表示;再取一个单位长度,就可构成数轴.数轴上的任意一点 P,都对应一个实数 x.这个实数 x 是这样确定的:若 P 与原点 O 重合,则 $x=0$;若 P 不与原点 O 重合,首先用所取的单位长度量出线段 OP 的长度 $|OP|$,如果有向线段 OP 与数轴正向相同,则 $x=|OP|$;如果有向线段 OP 与数轴正向相反,则 $x=-|OP|$.反之,任给一个实数 x,都可以在数轴上找到一个点 P,使该点 P 所对应的实数为 x.这样,数轴上的点与实数之间建立起一一对应关系(如图1.1所示).

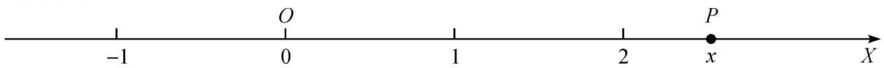

图1.1

实数集合等价于数轴上点的集合.在今后的讨论中,我们总把数轴上的点与实数同等看待.

3.实数的绝对值

对任意实数 x,其绝对值用 $|x|$ 表示,并且当 $x>0$ 时 $|x|=x$;当 $x=0$ 时 $|x|=0$;当 $x<0$ 时 $|x|=-x$.如 $|3|=3$,$|-3|=3$,$|0|=0$ 等等.

绝对值 $|x|$ 有明显的几何意义:实数 x 的绝对值等于数轴上点 x 到原点 O 的距离.

绝对值有如下几个主要性质(以下的 x,y 为任意实数):

(1) $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$;

(2) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$;

(3) $||x|-|y||\leqslant|x-y|$;

(4) $|xy|=|x||y|$;

(5) $\left|\dfrac{y}{x}\right|=\dfrac{|y|}{|x|}\ (x\neq 0)$.

4.区间与邻域

在实数集合 R 的子集中,区间是我们讨论问题时经常涉及的.所谓区间就是数轴上介于某两点之间的一切点所构成的集合,这两个点称为区间的端点.如果端点都是定数,则称为有限区间(并称两端点之差的绝对值为区间长度),否则称为无限区间.常见的区间有:

开区间 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$;

闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$;

半开半闭区间 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$;

$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$;

无穷区间 $[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$;

$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$;

$(-\infty,a]=\{x\mid x\leqslant a\}$;

$(-\infty,a)=\{x\mid x<a\}$;

$(-\infty,+\infty)=R$.

通常用大写字母如 I 表示某个给定的区间,另外需说明的是,上述提到的 $-\infty$,$+\infty$ 及 ∞ 是一种符号(分别叫做负无穷大,正无穷大和无穷大),既不能看做数,也不能参与运算.

为了今后讨论问题在表达上的方便,还要介绍有关邻域的概念.

设 $a\in R$,$\delta\in R$ 且 $\delta>0$,则集合

$$\{\, x \mid |x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的 $\delta-$邻域,记作 $U(a,\delta)$.

由于不等式 $|x-a|<\delta$ 等价于不等式 $a-\delta<x<a+\delta$,所以 a 的 $\delta-$邻域就是:

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta),$$

这是以点 a 为中心,区间长度为 2δ 的开区间,正数 δ 叫做邻域的半径.

集合

$$\{x \mid o<|x-a|<\delta\},$$

称为点 a 的 $\delta-$空心邻域,记作 $U^0(a,\delta)$.

集合

$$\{x \mid a-\delta<x\leqslant a\}\text{ 和 }\{x \mid a\leqslant x<a+\delta\}$$

称为 a 的左邻域和右邻域,分别记作 $U^-(a,\delta)$ 和 $U^+(a,\delta)$.

当不必指明邻域半径时,上述记号中的正数 δ 可省略,即邻域、空心邻域、右邻域和左邻域可简记为 $U(a)$,$U^0(a)$,$U^-(a)$ 和 $U^+(a)$.

【例1.4】 利用区间表示不等式

$$x^2+x-12>0$$

的全部解.

【解】 先对不等式左端分解因式,原不等式为

$$(x-3)(x+4)>0,$$

即有 $x-3>0$ 或 $x+4<0$,即 $x>3$ 或 $x<-4$.

也就是说,对任何大于3或小于-4的实数都满足要求,故

$$\{x \mid x^2+x-12>0\}=(-\infty,-4)\cup(3,+\infty).$$

1.1.2 三角公式或三角恒等式

设实数 α、β,则 $\sin\alpha$,$\cos\alpha$,$\tan\alpha$,$\cot\alpha$,$\sec\alpha$,$\csc\alpha$ 称作为“角”α 的正弦、余弦、正切、余切、正割和余割,其中 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,$\cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$,$\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$,$\csc\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}$.它们之间符合如下关系:

(1)$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$;

(2)$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$;

(3)$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$;

由上述三个基本公式,可以推导出其他公式或恒等式:

(4)$\sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha$,$\csc^2\alpha=1+\cot^2\alpha$;

(5)$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$;

(6)$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;

(7) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$;

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$;

$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$;

(8) $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$;

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$;

$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$;

(9) $\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$;

$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$.

1.1.3 行列式

1.二阶行列式

我们把由 4 个实数 a_{ij} $(i=1,2,j=1,2)$ 构成的代数式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 叫做由元素 a_{ij} $(i=1,2,j=1,2)$ 组成的一个行列式,记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1}$$

从左边看到,这 4 个元素分别处在从上到下和从左到右计序的行、列位置上,每一个元素右下角的一对数字 ij 恰表示了其在行列式中所处的行和列的位置,i 表示行,j 表示列,如 a_{12} 表示该元素在第一行和第二列的位置,而 a_{22} 表示它处在第二行和第二列的位置.由于行列式恰好有 2 行和 2 列且每行、每列上恰有 2 个元数,进而恰有 2^2 个元素构成,故我们特意叫它为二阶行列式.

注意,若把二阶行列式中行与行交换位置或列与列交换位置,结果要发生变化,如 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=3\times5-2\times1=13$,而 $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=2-15=-13$.

2.三阶行列式

取 3^2 个实数(也称为元素) a_{ij} $(i=1,2,3,j=1,2,3)$,则记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \tag{2}$$