控江中学新教材二次开发丛书

丛书主编　张群

新课标
数学解析

（第2版）

供高二学生上学期使用

主编　高长山

XINKEBIAO
SHUXUE
JIEXI

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

控江中学新教材二次开发丛书
丛书主编　张　群

新课标数学解析

（第2版）

供高二学生上学期使用

主编　高长山

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书由控江中学特级教师和高级教师编写，它与上海市最新审定的“二期课改”教材相匹配. 全书与教材同步，依照教材的章节顺序编排，教材中每一小节课的内容为一个训练单元，每一单元分为导学篇和训练篇两个部分. 本书为高二学生提供了新颖、有效、适用、权威的教辅资料. 欢迎同学们积极选用.

图书在版编目(CIP)数据

新课标数学解析/高长山主编. --2版. --上海：同济大学出版社，2013.7

(控江中学新教材二次开发丛书/张群主编)

供高二学生上学期使用

ISBN 978-7-5608-4819-8

Ⅰ.①新… Ⅱ.①高… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第092940号

控江中学新教材二次开发丛书

新课标数学解析 供高二学生上学期使用(第2版)

主　编　高长山

责任编辑　赵　黎　　责任校对　徐春莲　　封面设计　陈益平

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路1239号　邮编：200092　电话：021-65985622)

经　销　全国各地新华书店

印　刷　常熟市华顺印刷有限公司

开　本　787 mm×1092 mm　1/16

印　张　11.75

印　数　3101—4100

字　数　293 000

版　次　2013年7月第2版　　2014年5月第2次印刷

书　号　ISBN 978-7-5608-4819-8

定　价　19.80元

编委会成员

丛书主编 张　群

本书主编 高长山

副 主 编 刘亚东　刘灿文　杨　慧

编　　委（按姓氏笔画为序）

丁昶欣　洪　晔　刘灿文　柳　敏　刘亚东

苏　静　沈　烨　谈　荣　吴惠群　王伟叶

谢　园　杨　慧　张菁璐　赵琍琍　朱敏慧

张进兴　张　旋　王慎有

前　言

本书是在多年使用并不断改进的基础上，依据上海市新课程标准、二期课改新教材的教学内容、上海数学高考要求编写而成的. 从编写的框架设计到内容的选择都具有独到之处，其知识编排按新教材章节顺序，与学校课时数匹配，可作为高二学生学习数学的优秀材料.

本书有 3 个显著特点：

特点一：结构新颖.

本书中，每一节课分为导学篇和训练篇两部分.

导学篇的主要内容是【问题驱动】. 以问题为主线，展现本节知识的获得过程. 通过解决问题，获得本节所包含的新的数学知识，通过问题解决的过程体验新知识所蕴含的数学方法，体会其中的数学思想，学生可以通过它学习和回顾本节课的主要知识，教师可以此为参考组织课堂教学.

训练篇的内容由【基础题例析】、【基础训练题】、【能力题例析】、【能力训练题】、【拓展题】五部分组成. 每单元设有测试题，全书最后还有期中测试题和期末测试题.

【基础题例析】：针对学生会考的要求而设计. 精选基础例题，侧重题型及方法，使每个例题都有其明确的目的性，便于学生把握通性通法；例题的分析简明扼要，例题的解答方法择优，解题过程完整，通过点评，总结出题目所反映的方法、技巧及值得注意的问题.

【基础训练题】：编排了适量的具有针对性和有效性的基础训练题. 学生独立完成后，可对照解答，从而达到自测、自查、自我订正的效果. 既巩固了知识和学习方法，又能反馈学生对基础知识的掌握程度.

【能力题例析】：针对高考的要求精选具有灵活度或综合性的例题，突出题型与解题方法的重要性. 例题的分析简明、透彻，解题过程完整，解题方法最佳.

【能力训练题】：编排了具有针对性和有效性的能力训练题.

【拓展题】：精选能开阔学生视野的题目，供具有较高能力的学生使用.

特点二：层次清晰，层层递进.

(1)【基础题例析】和【基础训练题】是为学生达到学业水平考试的要求而设计.

(2)【能力题例析】和【能力训练题】是为高考所设计. 学生如能高质量完成，必能在高考中获得好的成绩.

(3)【拓展题】是为学有潜力、志向高远、想进名牌大学的学生所设计，学生经常性地通过此类问题的思考与训练，必将塑造学生的思维品质，提高学生的数学能力，最终定能实现目标.

特点三：内容精简，功能齐全.

(1) 每一个方案设计一定数量的选题,紧扣课堂所学的知识与方法,问题不重复,且有梯度.

(2) 例题精选,难度适中,解题方法通俗,分析点拨及点评到位.

(3) 无论知识内容,还是解题方法、数学思想方面,各单元、期中、期末测试卷编制都比较完整,学生自我测评可信度强.

本书凝聚了控江中学全体数学教师多年来教学研究的成果,充分体现了以培养创新能力为核心的素质教育精神.愿我们这套书:给你打开一扇窗,让你领略数学的博大精深;开启你好奇的心灵,点燃你胸中的求知欲望;激发你睿智的头脑,帮助你培养理性的思维.但限于水平,书中难免会有一些缺点和不足,恳切希望广大读者批评指正.

控江中学数学组

2013 年 4 月

目　　录

前言

第七章　数列与数学归纳法 …… 1
一　数列 …… 1
7.1　数列的概念(1) …… 1
7.1　数列的概念(2) …… 5
7.2　等差数列(1) …… 8
7.2　等差数列(2) …… 11
7.2　等差数列(3) …… 14
7.3　等比数列(1) …… 18
7.3　等比数列(2) …… 21
7.3　等比数列(3) …… 25
7.3　等比数列(4) …… 28
数列单元测验题 …… 32
二　数学归纳法 …… 34
7.4　数学归纳法的概念 …… 34
7.5　数学归纳法的应用 …… 37
7.6　归纳—猜想—论证 …… 40
三　数列的极限 …… 43
7.7　数列的极限概念 …… 43
7.8　极限的运算法则(1) …… 46
7.8　极限的运算法则(2) …… 49
7.9　无穷等比数列各项的和(1) …… 53
7.9　无穷等比数列各项的和(2) …… 56
数列与数学归纳法单元测试题 …… 60

第八章　平面向量的坐标表示 …… 62
8.1　向量的坐标表示及其运算(1) …… 62
8.1　向量的坐标表示及其运算(2) …… 65
8.2　向量的数量积(1) …… 67
8.2　向量的数量积(2) …… 70
8.2　向量的数量积(3) …… 73

8.2　向量的数量积(4)……………………………………………………… 76
8.3　平面向量的分解定理 ………………………………………………… 78
8.4　向量的应用(1)……………………………………………………… 82
8.4　向量的应用(2)……………………………………………………… 85
平面向量的坐标表示单元测试题………………………………………… 89

第九章　矩阵和行列式初步……………………………………………… 91
一　矩阵………………………………………………………………………… 91
9.1　矩阵的概念 ………………………………………………………… 91
9.2　矩阵的运算(1)……………………………………………………… 96
9.2　矩阵的运算(2)……………………………………………………… 101
二　行列式……………………………………………………………………… 106
9.3　二阶行列式(1)……………………………………………………… 106
9.3　二阶行列式(2)……………………………………………………… 109
9.4　三阶行列式(1)……………………………………………………… 113
9.4　三阶行列式(2)……………………………………………………… 115
9.4　三阶行列式(3)……………………………………………………… 119

第十章　算法初步………………………………………………………… 125
10.1　算法的概念………………………………………………………… 125
10.2　程序框图(1) ……………………………………………………… 128
10.2　程序框图(2) ……………………………………………………… 133

期中试卷…………………………………………………………………… 138
期末试卷…………………………………………………………………… 140

附录　初中平面向量知识回顾………………………………………… 143
一、向量的相关概念 ………………………………………………………… 143
二、向量的加法和减法运算 ………………………………………………… 146
三、实数与向量的乘积 ……………………………………………………… 150

参考答案…………………………………………………………………… 154

第七章 数列与数学归纳法[①]

一 数 列

7.1 数列的概念(1)

(一) 导 学 篇

问题驱动

数列一节在课本上所占的篇幅不多,但是在中学数学中的地位却举足轻重.数列不仅与前面学习的函数、不等式等知识有着密切的联系,它还有着广泛的实际应用.如堆放物品总数的计算要用到数列前 n 项和公式;产品规格设计的某些问题要用到等比数列的原理;储蓄、分期付款的有关计算也要用到数列的一些知识.

1. 什么是数列

1.1 数列的概念

数列就是按一定次序排列的一列数.

理解数列的概念要注意以下几点:

(1) 强调"按一定顺序排成的一列数",即数列中的每个数都有自己的特定的位置,因此,如果组成两个数列的数相同而排列次序不同,那么,它们是不同的数列.例如,数列 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 与数列 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4 是不同的.

(2) 为表述方便,给出几个名称:项,项数,首项.数列中的每一个数叫做数列的项,依次叫做这个数列的第 1 项,第 2 项,……,第 n 项,……,其中每一项对应的序号即自然数 1, 2, 3, …, n, …,叫数列的项数.

由此可以看出,给定一个数列,每一项都是确定的,即指明项数,对应的项就确定,所以,数列中的每一项与其项数有着确定的对应关系.

例如,分别指出数列 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的首项、第 2 项是多少,其中项 7 的项数是多少?

(3) 数列的一般形式:通常用字母加右下角标表示数列的项,其中右下角标表示项的位置序号.因此,数列的一般形式可以写成 a_1, a_2, a_3, …, a_n, …,或简记作$\{a_n\}$,其中,a_1, a_2, a_3, …, a_n, …分别表示数列的第 1 项、第 2 项、第 3 项、……、第 n 项,a_n 表示数列$\{a_n\}$的第 n 项,也叫数列的通项.

注意:这里,$\{a_n\}$与 a_n 是不同的:$\{a_n\}$表示数列 a_1, a_2, a_3, …, a_n, …, 而 a_n 只表示这个数列的第 n 项.

1.2 数列的分类

(1) 按项数是有限还是无限分为有穷数列和无穷数列

例如:数列 5, 4, 3, 2, 1 是项数是 5 的有穷数列;数列 1, 3, 5, …, $2n-1$, …是无穷数列.

① 本书序号与教材序号一致.

(2) 按项的变化规律，数列可分为常数数列、递增数列、递减数列和摆动数列等

例如：数列 1，1，1，…，1，…是常数数列；数列 1，3，5，…，$2n-1$，…是递增数列；数列 5，4，3，2，1 是递减数列；像数列$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…，$(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}$，…这样正、负相间的数列叫做摆动数列.

1.3 数列与集合有何区别

数列与集合是两个不同的概念，这两个概念之间主要有以下区别：

(1) 研究对象不同：数列的项一定是数，而集合的元素可以是数，也可以是人、物等.

(2) 有序性与无序性：一个数列不仅与构成的"数"有关，还与其排列顺序有关，如：数列 1，2，3，4 与数列 4，3，2，1 是两个不同的数列；而集合中的元素具有无序性.

(3) 可重复性与不可重复性：在数列的定义中，并没有规定数列中的数必须不同. 因此，同一个数在数列中可以重复出现，即数列中允许不同的项是相同的数；而集合中的元素具有互异性.

(4) 记法的不同：表示一个数列时，只须将它的项按次序逐一列举，记号$\{a_n\}$是数列的简单记法；而集合的列举法表示，要把所有元素写在一个大括号内，若记号$\{a_n\}$表示集合，则它表示的是一个单元素集合.

2. 什么是数列的通项公式

我们常常需要研究数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n 与它的位置序号 n 之间的关系.

如果数列$\{a_n\}$的项 a_n 与它的项数 n 之间的对应关系可以用一个公式表示，这个公式就叫做这个数列的通项公式. 即数列的通项公式就是项 a_n 与项数 n 之间的关系式. 如数列 4，3，2，1，0，-1，-2的通项公式为 $a_n=5-n$，$n\leqslant 7$，表示 n 取不大于 7 的正整数(因为数列只有 7 项).

2.1 不是所有的数列都有通项公式

如：$\sqrt{2}$精确到 1，0.1，0.001，…，不足近似值构成的数列 1，1.4，1.41，1.414，….

2.2 有的数列的通项公式不是唯一的

一些数列的通项公式可以有不同的形式. 例如数列 -1，1，-1，1，…的通项公式可以写成 $a_n=(-1)^n$，也可以写成 $a_n=\begin{cases}-1,\ n=2k-1,\ k\in\mathbf{N}^*,\\ 1,\ n=2k,\ k\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$

这两个通项公式形式上虽然不同，但表示同一个数列.

3. 数列有哪些表示方法

我们知道，函数表示法有列表法、图像法、解析式法. 类似地，数列的表示也就有列举法、图示法、通项公式法.

(1) 列举法：a_1，a_2，a_3，…，a_n，…，或简记作$\{a_n\}$.

(2) 图示法：一个函数的直观形式是其图像，我们也可用图形表示一个数列，把它称作图示法. 具体方法是以项数 n 为横坐标，相应的项 a_n 为纵坐标，即以$\{n,a_n\}$为坐标在平面直角坐标系中做出点. 所得的数列的图形是一群孤立的点，因为横坐标为正整数，所以，这些点都在 y 轴的右侧，而点的个数取决于数列的项数. 图像中可以直观地看到数列的项随项数由小到大变化而变化的趋势.

(3) 通项公式法：函数解析式反映了一个函数的函数值与自变量之间的数量关系，类似地，有一些数列的项能用其项数的函数式表示出来，即 $a_n=f(n)$，这个函数式叫做数列的通项公式.

数列的通项公式具有双重身份，它表示了数列的第 n 项，又是这个数列中所有各项的一般表示. 通项公式反映了一个数列项与项数的函数关系，给了数列的通项公式，这个数列便确定了，代入项数就可求出数列的每一项. 例如，数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=2n-1(n\in\mathbf{N})$，则 $a_{100}=2\times100-1=199$.

4. 数列与函数有怎样的关系

数列的项是按一定次序排列的，"次序"便是函数的自变量，于是，我们研究数列就可借用函数的研究方法，用函数的观点看待数列.

在数列的项数与项之间存在下述对应关系：若以项数 n 为自变量，相应的项 a_n 作为因变量，则对

每个在自然数 N(或它的有限子集)中的自然数,都有唯一确定的数 a_n 与之对应,因此,数列可以看作是一个定义域为自然数集 $\mathbf{N}$(或它的有限子集)的函数,而数列的项就是当自变量 n 从小到大依次取自然数时所对应的一列函数值 $f(1)$, $f(2)$, …, $f(n)$, ….

数列的实质是函数,因此,一些数列问题可以用函数方法来解决.通过一些简单数列的通项公式,可以求其最大项或最小项,就是函数思想与方法的体现.

另一方面,数列与函数又有区别:数列的项是按一定次序排列的,而函数的值却不能排列.例如,5 是正奇数列 $b_n = 2n - 1(n \in \mathbf{N})$ 的第 3 项,而对函数 $y = 2x - 1(x \geqslant 1)$,则无法确定 5 是其第几项.由于数列与函数的区别,决定了对数列的某些研究可以采用与对函数的研究不同的方法.

(二) 训 练 篇

基础题例析

例 1　根据下列数列的前四项,写出它的一个通项公式:

(1) $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{10}{9}$, …;　　(2) 3, 0, 3, 0, …;　　(3) -1, $\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{4}$, $\frac{7}{8}$, ….

分析:这类问题一般采用观察分析法,研究数列的各项与其对应项数之间,项与项之间的内在联系,归纳出其通项公式.

解:(1) $a_n = \dfrac{2(n+1)}{2n+1}$;

(2) $a_n = \begin{cases} 3, & n \text{ 为奇数时}; \\ 0, & n \text{ 为偶数时}. \end{cases}$ 或 $a_n = \dfrac{3[1+(-1)^{n-1}]}{2}$;

(3) $a_n = (-1)^n \dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$.

点评:由数列的前若干项写出它的一个通项公式,一般可通过观察分析数列的各项中的结构特征(整式、分式、递增、递减、摆动等),分析项与项数之间、项与项之间的关系,归纳出一些规律性的结论.摆动数列中项的正、负号可用 $(-1)^n$ 或 $(-1)^{n-1}$ 调节.还要掌握一些简单数列的变化规律,如奇数数列、偶数数列、自然数的乘方构成的数列等.

例 2　在数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_n = n(n+1)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 写出 a_{11}, a_{30} 及 a_{n+1};

(2) 420 是不是数列 $\{a_n\}$ 中的项?如果是,它是第几项?

分析:本题考查的是数列的项与数列通项公式的概念.

解:(1) $\because a_n = n(n+1)$, $\therefore a_{11} = 11 \times (11+1) = 132$, $a_{30} = 30 \times (30+1) = 930$.

$\therefore a_{n+1} = (n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2$;

(2) 假设 420 是数列 $\{a_n\}$ 中的项,设 $a_n = n(n+1) = 420$, $\therefore n^2 + n - 420 = 0$.

求得 $n_1 = 20$, $n_2 = -21$(舍去),$\therefore$ 420 是数列 $\{a_n\}$ 中的第 20 项.

点评:判断一个数 A 是不是数列的项的基本方法是,看方程 $a_n = A$ 是否有正整数解.

基础训练题

1. 下列说法中,正确的是(　　).

A. 数列都有通项公式　　B. 有通项公式的数列都是无穷数列

C. 数列的通项公式确定时,数列就确定了　　D. 给出数列的若干项,它的通项公式就确定了

2. 数列 $\{a_n\}$ 的通项是 $a_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}$, $n \in \mathbf{N}^*$,则 a_6 的值为________.

3. 已知数列$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，$2\sqrt{2}$，$\sqrt{11}$，$\sqrt{14}$，…，那么，$4\sqrt{2}$是数列的第________项.

4. 数列 11，13，15，...，$2n+1$ 的项数是________.

5. 写出下列各数列的一个通项公式：

(1) $-\frac{1}{1\cdot 3}$，$\frac{1}{3\cdot 5}$，$-\frac{1}{5\cdot 7}$，$\frac{1}{7\cdot 9}$，…. $a_n=$________；

(2) $\frac{1}{2}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{10}{16}$，$\frac{17}{32}$，$\frac{26}{64}$，…；$a_n=$________；

(3) $-\frac{1}{2}$，0，$\frac{1}{4}$，0，$-\frac{1}{6}$，0，$-\frac{1}{8}$，0，…；$a_n=$________.

6. 已知数列 $\{a_n\}$：$a_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots.\ a_n=n^2$，求 a_3+a_5 的值.

能力题例析

例题 已知数列的通项公式为 $a_n=-n^2+7n+8$. (1) $\frac{45}{4}$是否是数列中的项？(2)求数列$\{a_n\}$的最大项的值.

分析：(1)由 $a_n=\frac{45}{4}$ 和 $n\in\mathbf{N}^*$ 易知；(2)由二次函数配方得 $n=3$ 或 4 时取得；(3)由使 $a_n\geqslant 0$ 成立的自变量 n 的取值，及前 n 项和定义可得.

解：(1)由 $a_n=\frac{45}{4}$，得 $n=\frac{1}{2}$ 或$\frac{13}{2}$，因 $n\in\mathbf{N}$，所以$\frac{45}{4}$不是数列中的项；(2)由 $a_n=-\left(n-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{81}{4}$，得 $n=3$ 或 4 时取得最大值为 20.

点评：本题应注意数列中项数 n 为正整数.

能力训练题

1. 已知数列$\{a_n\}$的前四项分别为 1，0，1，0，给出下列各式：k，$n\in\mathbf{N}^*$，

(1) $a_n=\frac{1}{2}[1+(-1)^{n+1}]$；(2) $a_n=\sin^2\frac{n\pi}{2}$；(3) $a_n=\frac{1}{2}[1+(-1)^{n+1}]+(n-1)(n-2)$；

(4) $a_n=\begin{cases}0, & n=2k,\\ 1, & n=2k+1\end{cases}(k\in\mathbf{N}^*)$，则可作为数列$\{a_n\}$通项公式的序号为(　　).

A. (1)(2)　　B. (1)(2)(3)　　C. (1)(2)(4)　　D. (2)(3)(4)

2. $\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\frac{\sqrt{10}}{8}$，$\frac{\sqrt{17}}{15}$，$\frac{\sqrt{26}}{24}$，…；$a_n=$________.

3. 已知函数 $f(x)=\frac{2x}{x+2}$，若 $a_1=1$，且 $a_{n+1}=f(a_n)$，$n\in\mathbf{N}^*$，

(1) 写出数列$\{a_n\}$的前 5 项；

(2) 试归纳出$\{a_n\}$的通项公式.

拓展题

已知数列 $1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ 1,\cdots,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots,\ 1,\ \cdots$. 求这个数列的第 43 项.

7.1　数列的概念(2)

(一)导 学 篇

问题驱动

1. 什么是数列的递推关系式

如果已知数列$\{a_n\}$的任一项 a_n 与它的后一项 a_{n+1}(或者后几项)之间的关系可以用一个公式,且已知数列的第 1 项(或前几项),那么,这个公式就叫做这个数列的递推公式.

由于数列的自变量为正整数,于是就有可能相邻的两项(或几项)有关系,从而数列就又有其特殊的表示法——递推公式法. 例如,数列 3, 5, 7, 9…,可以用通项公式表示为 $a_n=2n+1(n\in\mathbf{Z}^+)$;也可以用递推公式表示为 $a_1=3$ 且 $a_{n+1}=a_n+2(n\in\mathbf{Z}^+)$.

关于数列的递推公式,应注意以下两点:

(1) 递推公式是数列所特有的表示法,它包含两个部分,一是递推关系,一是初始条件,二者缺一不可.

(2) 递推关系式也是数列的一种表示方法. 有时需要把递推关系式转化为通项公式,一般,这种转化比较困难,只要求能将几类特殊递推关系转化为通项公式,不做高要求.

数列常见的递推公式有以下几种:

$$\begin{cases}a_{n+1}=Aa_n+B,\\a_1=a;\end{cases}\quad\begin{cases}a_{n+1}=A(n)a_n+B,\\a_1=a;\end{cases}\quad\begin{cases}a_{n+2}=Aa_{n+1}+Ba_n+C,\\a_1=a,\ a_2=b.\end{cases}$$

2. 怎样用函数的观点来研究数列

数列的实质是函数,所以,从函数的观点来看数列,数列$\{a_n\}$也有与函数类似的性质.

2.1　单调性

如果一个数列,从第 2 项起每一项都大于(小于)它前面的一项,这样的数列叫做递增(递减)数列. 即:

若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,有 $a_n<a_{n+1}$(或 $a_{n+1}-a_n>0$),则称数列$\{a_n\}$为单调递增数列;

若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,有 $a_n>a_{n+1}$(或 $a_{n+1}-a_n<0$),则称数列$\{a_n\}$为单调递减数列.

单调递增数列和单调递减数列统称为单调数列.

2.2　周期性

若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,存在常数 $T\in\mathbf{N}^*$,使得 $a_{n+T}=a_n$ 成立,则称数列$\{a_n\}$为周期数列,常数 T 称为数列$\{a_n\}$的周期.

（二）训 练 篇

基础题例析

例 1　已知数列$\{b_n\}$中，$b_1=1$，$b_2=5$，且$b_{n+2}=b_{n+1}-b_n(n\in\mathbf{N})$，求$b_{2014}$的值.

分析：此数列以递推形式给出，若按递推规律逐项求出b_{2002}，显然不合适，也不易求出其通项公式. 而利用函数思想，研究数列的周期性问题就容易解决了.

解：前 8 项依次为：1，5，4，-1，-5，-4，1，5，∴ 数列$\{b_n\}$是周期为 6 的周期数列，即$b_{n+6}=b_n(n\in\mathbf{N}^*)$，∴ $b_{2014}=b_{6\times335+4}=b_4=-1$.

点评：本题为理解数列的递推式，由递推式可逐次求出数列的项.

例 2　已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$，$n\in\mathbf{N}^*$，

（1）写出数列$\{a_n\}$的前 4 项；

（2）猜测数列$\{a_n\}$的通项公式.

分析：写出数列的若干项，用观察法寻找规律.

解：(1) ∵ $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$，∴ $a_2=2a_1+1=3$，$a_3=7$，$a_4=15$；

(2) ∵ $a_1=2^1-1$，$a_2=2^2-1$，$a_3=2^3-1$，$a_4=2^4-1$，

∴ $a_n=2^n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$.

点评：通过观察归纳出事物的一般规律，然后再予以证明，是发现问题、解决问题的重要的基本方法. 本题也可以将递推公式变形，将问题转化为等比数列来求通项公式. 这种方法将在后面的有关章节中讲解.

基础训练题

1. 数列$\{a_n\}$满足：$a_{n+1}=a_n+n$，$a_1=2$，则$a_5=$________.

2. 数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=n^2+an+1$，若数列$\{a_n\}$为单调递增数列，则实数a的取值范围是________.

3. 数列$\{a_n\}$满足：$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & 0\leqslant a_n<\dfrac{1}{2},\\ 2a_n-1, & \dfrac{1}{2}\leqslant a_n<1,\end{cases}$ 若$a_1=\dfrac{6}{7}$，则a_{2014}的值为________.

4. 设数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{n^2+4n+1}{n}$，则此数列的第____项最小，最小值为________.

5. 关于问题："函数$f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x-10}$的最大值、最小值与数列$a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n-10}$的最大值、最小值"，下列说法中正确的是________.

A．函数$f(x)$有最大、最小值，数列$\{a_n\}$有最大、最小值

B．函数$f(x)$无最大、最小值，数列$\{a_n\}$有最大、最小值

C．函数$f(x)$有最大、最小值，数列$\{a_n\}$有最大值无最小值

D．函数$f(x)$无最大、最小值，数列$\{a_n\}$无最大值有最小值

6. 已知数列$\{a_n\}$：$a_1=-\dfrac{1}{100}$，$a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$，求$a_{101}$的值.

能力题例析

例题　已知数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=(n^2-5n+4)\cdot 0.9^n$，

(1) 数列中有多少项是负数？

(2) 是否存在自然数 N，使得对于任意自然数 n，都有 $a_n\leqslant a_N$ 成立？

分析：(1) $\because$ 0.9^n 恒正，$\therefore$ 关键是确定满足 $n^2-5n+4<0$ 的项；(2) 本题实质是求数列的最大项的项数，通常由考察 $a_{n+1}-a_n$ 的符号入手.

解：(1) 由 $n^2-5n+4<0$，得 $1<n<4$，$n\in\mathbf{N}$，$\therefore$ $n=2$，3，$\therefore$ 数列中有两项是负数；

(2) $\because$ $a_{n+1}-a_n=-0.1\times 0.9^n(n^2-23n+40)$，$\because$ $-0.1\times 0.9^n<0$，

$\therefore$ 由 $n^2-23n+40>0$，得 $1.9<n<21.1$，于是得到：

当 $n\leqslant 2$ 时，数列单调递减；当 $2\leqslant n<21$ 时，数列单调递增；当 $n>22$ 时，数列单调递减.

$\therefore$ 数列在 $n=1$，21，22 时可能取最大值. 经验证，$a_{22}=378\times 0.9^{22}$ 最大，$\therefore$ $N=22$.

点评：本题为说明如何用函数的思想判断数列的单调性并由此得出数列的最大项.

能力训练题

1. 7，77，777，7777，⋯；$a_n=$____________.

2. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=0$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_{20}=$________.

3. 设数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n^3+n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，则 2 014 是不是数列$\{a_n\}$的项？若是，它是第几项？

拓展题

已知 $f(x)=10^x-10^{-x}$，数列$\{a_n\}$满足 $f(\lg a_n)=2n$，

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 证明数列$\{a_n\}$是递增数列.

7.2　等差数列(1)

(一) 导 学 篇

问题驱动

我们知道，按不同的变化规律，数列分成了不同的类型. 本节我们将研究一类有特别性质的重要数列——等差数列. 它是本章的核心知识之一，也是今后解决许多数列问题的基础.

1. 什么是等差数列

如果一个数列从第 2 项开始，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数，这样的数列叫做等差数列. 这个常数叫做等差数列的公差，通常用字母 d 表示公差. 第一项也叫首项.

(1) 由定义可知等差数列的特点：从第 2 项起，每一项减去前一项的差等于同一个常数.

思考 1：数列 1，1，2，3，…，n，…，是否是等差数列，为什么？(答：不是)

(2) 等差数列定义的符号表示：$a_2-a_1=d$；$a_3-a_2=d$；…；$a_n-a_{n-1}=d$；…. 上述符号描述可抽象为：$\{a_n\}$ 为等差数列 $\Leftrightarrow a_{n+1}-a_n=d$(常数)$(n\geqslant 1,\ n\in\mathbf{N})$；此递推式也可以写为 $a_n-a_{n-1}=d$(常数)$(n\geqslant 2,\ n\in\mathbf{N})$.

思考 2：这两个递推公式在形式上有何区别，自然数 n 的取值范围有何不同，为什么？

(3) 若 $d=0$，则该数列为常数列. 如：数列 $\{a_n\}$：$a_n=c$(c 为常数).

2. 什么是等差中项

如果 a，A，b 成等差数列，则称 A 是 a 和 b 的等差中项.

(1) a，A，b 成等差数列的充要条件是 $A=\dfrac{a+b}{2}$.

证明：设公差为 d，则 $A=a+d$，$b=A+d=a+2d$，

$\therefore\ \dfrac{a+b}{2}=\dfrac{a+a+2d}{2}=a+d=A$.

反之，由 $A=\dfrac{a+b}{2}$ 得：$2A=a+b$ 即 $A-a=b-A$，由定义知，a，A，b 成等差数列.

(2) 如果 3 个数成等差数列，那么，等差中项等于另两项的算术平均数.

(3) 由等差中项的概念得出：若数列 $\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 是等差数列，则数列从第 2 项开始，每一项都是其前一项和其后一项的等差中项. 符号表示：

$$\{a_n\}\text{ 为等差数列}\Leftrightarrow 2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n\geqslant 2,\ n\in\mathbf{N}).$$

3. 怎样判断一个数列是否是等差数列呢

在解决数列问题时，等差数列的性质有着非常重要的作用. 因此在遇到一个未知的数列时，我们首先需要考察它是否是等差数列，那么，判断一个数列是等差数列，有哪些常用方法呢？

(1) 怎样证明一个数列是等差数列，有哪些常用方法呢？

① 定义法：即证明 $a_{n+1}-a_n=d$(常数)$(n\geqslant 1,\ n\in\mathbf{N})$ 成立，则 $\{a_n\}$ 为等差数列；

② 等差中项法：即由 $2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n\geqslant 2,\ n\in\mathbf{N})$，得 $\{a_n\}$ 为等差数列.

(2) 怎样证明一个数列不是等差数列？

否定一个命题的常用方法就是举一反例. 因此只要举出数列中，有一项不满足等差数列的定义即可.

例如，上面的思考 1 中，数列的通项公式可以为：$a_n=\begin{cases}1,\ n=1,\ 2,\\ n,\ n\geqslant 3,\ n\in\mathbf{N}.\end{cases}$ $\because\ a_2-a_1=0$，而 a_3-