高等院校"十二·五"规划教材

经济数学

由雷　罗辉　主编

广东省出版集团
广东科技出版社
（全国优秀出版社）

高等院校“十二·五”规划教材

经济数学

由　雷　罗　辉　主编

廣東省出版集團
广东科技出版社
·广　州·

图书在版编目(CIP)数据

经济数学/由雷,罗辉主编. —广州:广东科技出版社,2010.8

ISBN 978-7-5359-5298-1

Ⅰ.①经… Ⅱ.①由… ②罗… Ⅲ.①经济数学-高等学校-教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 106317 号

责任编辑:谢志远(zyxie1217@sina.com)
封面设计:林少娟
责任校对:边云飞
责任印制:罗华之
出版发行:广东科技出版社
(广州市环市东路水荫路 11 号 邮码:510075)
E-mail:gdkjzbb@21cn.com
http://www.gdstp.com.cn
经 销:广东励耘教育图书有限公司
(地址:广州市越秀区五羊新城寺右二马路 23-25 冠城大厦 省图书批发中心 215 室
邮编:510600 电话:020-87393354 87392513 传真:87392513)
排 版:广州科新电脑技术服务中心
印 刷:广州锦昌印务有限公司
规 格:787mm×1 092mm 1/16 印张:22.25 字数:405 千
版 次:2010 年 8 月第 1 版
2011 年 7 月第 2 次印刷
定 价:40.00 元

编　委　会

主　编: 由　雷　罗　辉

副主编: 李泽华　倪科社　庄锦才　陈文婕　李文波　梁茂辉　李伟建　周展宏

编　委: 何小兰　关裕中　邝雪松　陈顺轩　张姣玲　刘文昱　李双成　吴土明　李泽华　吴小腊

主　审: 陈　婕　龙洪波

内 容 提 要

本书主要内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微积分，无穷级数，常微分方程与差分方程。为了强调“数学为本，经济为用”的特点，每一章增加了一小节——经济应用；为了强调学生应用计算机解决数学问题的能力，每一章增加了一小节——实验空间，介绍 Matlab 软件解决高等数学中的问题。

本书内容由浅入深，叙述详细，主次分明，通俗易懂，便于教学，也便于自学；例题选取有梯度，难易适度；习题适量。

本书可作为高等院校经济管理类各专业的高等数学教材或教学参考书，也可作为各类成人教育相应课程的教材或教学参考书，还可以作为经济管理科技人员的参考书。

前　　言

经济数学的主要内容是微积分。从 17 世纪中叶牛顿、莱布尼兹的奠基工作至今，微积分学已经逐步发展成为一门逻辑严密、系统完整的学科，它不仅是其他诸多数学分支的重要基础，而且在自然科学、社会科学的众多领域获得了十分广泛的应用，成为处理有关连续变量问题最有力的数学工具。经济数学已经成为高等院校经济管理类专业的一门十分重要的公共基础课。

本书是由华南农业大学、新疆石河子大学、广东海洋大学、惠州学院、广东技术师范学院、广东药学院等院校中多年从事经济数学教学的老师所编写。在编写过程中，我们充分注意到这几年来中学数学教学内容的改革，力争在初等数学与经济数学内容的衔接部分做到拾遗补漏，以期大一学生得以顺利进入经济数学的学习状态。在内容取舍上，我们坚持以面向高等院校经管类专业和科技发展的需要为原则，舍弃了部分难度较大而应用很少的传统微积分内容，增加了经济数学模型及数学实验等内容。在体系编排上，既注意体现数学课程循序渐进、由浅入深的特点，又尽可能对体系合理优化安排，避免繁琐复杂的推理证明，逻辑推理及证明尽可能做得适可而止。为了方便对教材中内容的选学和分层次教学，书中标有* 号的内容可以选学，即使不讲授这部分内容也不会影响教材的系统性。在习题的选配方面，各节精选了一些概念性强、方法有代表性、难度适中的练习题。为了改变传统经济数学教材在大学生心目中枯燥无味的形象，编写时注重概念与定理的直观描述与背景介绍，强调理论联系实际。为了便于检验读者每章的学习效果，每章末给出了一套综合测试题。

本书既可以作为高等院校经管类本、专科、高职的经济数学课程的教材，也可以作为各类成人教育相应课程的教材，还可以作为相关专业科技人员的参考书。

本书由惠州学院罗辉、李文波，广东海洋大学由雷、邝雪松、吴土明，华南农业大学李泽华、吴小腊，石河子大学倪科社、刘文昱、李双成，广东药学院庄锦才，广东技术师范学院李伟建、何小兰、关裕中、梁茂辉、陈顺轩、张姣玲合作编写，最后由由雷、罗辉统一定稿。

广东技术师范学院陈婕副教授、广东药学院龙洪波主任对本书的编写提出了许多指导意见和改进建议，对此，我们表示衷心的感谢。

由于作者水平有限,书中疏漏之处在所难免,恳请读者特别是使用本教材的老师批评指正,以便使本教材在今后的教学实践的基础上更加完善。

编　者

二〇一〇年七月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

微积分是一门以函数为主要研究对象的学科．所谓函数关系就是变量之间的一种确定性的依赖关系．极限方法是研究函数的一种基本方法，它是学习微分学、积分学的基础．本章将介绍函数、函数的极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质．

第一节　函　　数

一、预备知识

1. 集合及其运算

集合是数学中的一个基本概念，一个班的全体学生构成一个集合，全体整数构成一个集合等等．一般地，具有某种特定性质的事物的全体称做一个**集合**(简称**集**)．组成这个集合的事物称为这个集合的**元素**．

集合通常用大写的拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示，其元素则用小写的拉丁字母 $a,b,c,\cdots$表示．如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$，否则，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$. 含有有限个元素的集合称为**有限集**；不是有限集的集合称为**无限集**．

对于数集，习惯上，全体自然数的集合记作 N；全体整数的集合记作 Z；全体有理数的集合记作 Q；全体实数的集合记作 R. 我们有时在表示数集的字母的右上角标上“$*$”来表示该数集内排除 0 的集，标上“$+$”来表示该数集内排除 0 与负数的集．例如，全体正整数的集合记作 Z^+，即 $Z^+=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$．

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$(读作 A 包含于 B 或 B 包含 A)．若集合 A 是集合 B 的子集，并且集合 B 是集合 A 的子集，则称集合 A 与集合 B **相等**，记作 $A=B$，即 $A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$. 若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称集合 A 是集合 B 的**真子集**，记作 $A\subset B$(读作 A 真包含于 B)．不含任何元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$，规定空集$\varnothing$是任何集合 A 的子集，即$\varnothing\subseteq A$.

集合的基本运算有交、并、差、补等．设 A,B 为两个集合，由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**(简称**交**)，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\};$$

由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的 **并集**(简称**并**)，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\};$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的 **差集**(简称**差**)，记作 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A\text{ 但 }x\notin B\};$$

有时我们所研究的集合 A,B 都是集合 I 的子集，此时，称集合 I 为 **全集**或**基本集**，称 $I\backslash A$ 为 A **补集**或**余集**，记作 A^C．

设 A,B,C 为任意 3 个集合，则集合的交、并、补运算满足下列运算规律:

交换律　$A\cap B=B\cap A, A\cup B=B\cup A$;

结合律　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C), (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

分配律　$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C), (A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$;

对偶律　$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C, (A\cup B)^C=A^C\cap B^C$.

2. 区间和邻域

所谓区间是指介于两个实数 a 与 b 之间的一切实数,在数轴上就是从 a 到 b 的线段. a 与 b 称为区间的端点,当 $a<b$ 时,a 称为左端点,b 称为右端点. 数集

$$\{x \mid a<x<b\};$$

称为**开区间**,记作(a,b);数集

$$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\};$$

称为 **闭区间**,记作$[a,b]$. 类似地,数集

$$\{x \mid a\leqslant x<b\}; \{x \mid a<x\leqslant b\}$$

称为 **半开区间**,分别记作$[a,b)$和$(a,b]$.

除了上述这些有限区间以外,还有各种无限区间. 引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大),则可类似地表示无限区间. 例如,集合 $\{x \mid x\geqslant a\}$可记为$[a,+\infty)$,集合 $\{x \mid x<b\}$可记为$(-\infty,b)$,全体实数的集合 R 也可记为$(-\infty,+\infty)$.

闭区间 $[a,b]$、开区间(a,b) 及无限区间$[a,+\infty)$ 和$(-\infty,b)$ 在数轴上表示分别如图 1-1(a),(b),(c)和(d)所示.

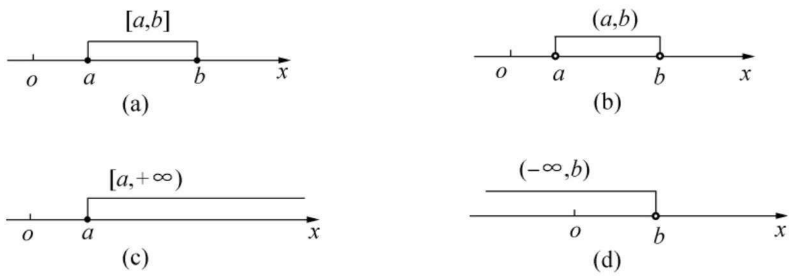

图 1-1

有些定理的成立与变量所属区间的开闭有很大关系,但有些情形不需要考虑区间的开闭以及是有限区间还是无限区间,此时,我们常常笼统地称为区间,并记作 I.

有一类特殊的区间,称为**邻域**. 在数轴上,它是以点 a 为中心,长度为 2δ 的开区间$(a-\delta, a+\delta)$,其中 a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径,记作 $U(a,\delta)$(图 1-2). 依定义有

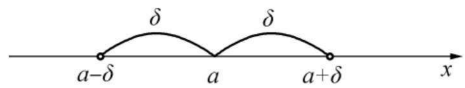

图 1-2

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

或

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$$

因为$|x-a|$表示点x与点a之间的距离，所以点a的δ邻域$U(a,\delta)$表示：与点a的距离小于δ的一切点x的集合．

如果把点a的δ邻域$U(a,\delta)$的中心点a去掉后，称此邻域为点a的**去心δ邻域**，记作$\mathring{U}(a,\delta)$即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$$

有时把开区间$(a-\delta,a)$称为a的**左δ邻域**，把开区间$(a,a+\delta)$称为a的**右δ邻域**．

3. 实数与实数的绝对值

人们对数的认识是逐步发展的，先是自然数，然后发展到有理数，再进一步发展到无理数．有理数和无理数统称为**实数**．

所有形如$\dfrac{n}{m}$(m,n为互质的整数，$m\neq0$)的数都是**有理数**．有理数都可以表示为有限小数或无限循环小数．例如，$\dfrac{2}{5}$可表示为0.4，$\dfrac{1}{3}$可表示为0.333等等．

无限不循环小数叫做**无理数**．无理数不能表示成分数的形式．例如：$\pi,\sqrt{2},-\sqrt{3}$等．

实数与数轴上的点是一一对应的，每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示；反之，每一个点又都表示一个实数．

如果一实数为a，我们用$-a$表示a的相反数，当a表示一个正实数时，$-a$就表示一个负实数；又当a表示一个负实数时，则$-a$就表示一个正实数．a与$-a$互为相反数．0的相反数为0.

实数的绝对值定义为：一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；0的绝对值是0. 如果a是一个实数，则有

$$|a|=\begin{cases}a, & a>0,\\0, & a=0,\\-a, & a<0.\end{cases}$$

例如，$|\pi|=\pi$；$|\sqrt{2}-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

解绝对值不等式最后归结为以下两种情形：

(1) $|x|<a$，当$a\leqslant0$，其解集为空集，当$a>0$，解集为：

$$\{x\,|\,-a<x<a\};$$

(2) $|x|>a$，，当$a<0$，其解集为全体实数R，当$a\geqslant0$，解集为：

$$\{x\,|\,x<-a\}\cup\{x\,|\,x>a\}.$$

4. 逻辑推理及符号

若命题A成立必然得到命题B成立，则称命题A为命题B的**充分条件**，或称命题B为命题A的**必要条件**．

若命题A成立必然得到命题B成立且命题B成立必然得到命题A成立，则称命题A为命题B的**充分必要条件**，或称命题B为命题A的充分必要条件，即命题A等价于命题B.

在数学的逻辑推理中，为了书写方便，我们常采用下列逻辑符号．

符号$\forall$表示“任给”或“每一个”；符号$\exists$表示“存在”或“找到”；符号$A\Rightarrow B$表示命题(或条

件) A 是 B 的充分条件,或命题(或条件) B 是 A 的必要条件;符号 $A \Leftrightarrow B$ 表示命题(或条件) A 与 B 等价,或命题(或条件) A 与 B 互为充要条件.

二、函数的定义

在初中,我们已经学习了函数的概念.

设在一个变化过程中有两个变量 x 与 y,如果对于 x 的每一个值,y 都有唯一的值与它对应,那么就说 y 是 x 的函数,x 叫做自变量.

到了高中,借助于集合将函数的概念叙述为:

设 A,B 是非空的数集,如果按某个确定的对应关系 f,使对于集合 A 中的任意一个数 x,在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应,那么就称 $f:A \to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数,记作

$$y = f(x), x \in A.$$

实践表明,许多同学在理解和认识函数的概念时仍存在一些困难. 事实上,函数也可以理解为一种关系、一个模型. 函数是一种简单的数学模型,它描述的是变量与变量之间的一种确定性的依赖关系.

例 1 甲班同学的人数 y 是乙班同学人数 x 的两倍,这种关系用函数可表示为 $y = 2x$. 常见的倍数关系用函数可表示为 $y = kx$.

例 2 圆的面积 s 随半径 r 的改变而变化,它们的关系为

$$s = \pi r^2, r \in (0, +\infty).$$

例 3 自由落体运动中,下落的距离 h 和时间 t 都是变量,它们有如下关系:

$$h = \frac{1}{2}gt^2, t \in [0, T].$$

由此可见,当两个变量 x 和 y 之间存在着一种严格的确定性依赖关系 f 时,这种关系就可以用函数 $y = f(x)$ 来进行表示. 因此,函数是一种关系,称为函数关系. 下面给出函数关系的定义.

定义 1 设两个变量 x 和 y,当变量 x 在一给定的数集 D 中任意取一个值时,变量 y 的值由这两个变量之间的关系 f 及 x 的值完全确定,称这个关系 f 为定义在 D 上的一个函数关系,或称 y 是 x 的函数,记作 $y = f(x), x \in D$.

数集 D 叫做这个函数的**定义域**,x 叫做**自变量**,y 叫做**因变量**或函数.

函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数的**值域**,记作 R_f 或 $f(D)$,即 $R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$.

例 2、例 3 的值域分别为: $R_f = (0, +\infty)$, $R_f = \left[0, \frac{1}{2}gT^2\right]$.

注 (1) 两个变量之间的函数关系 f 在"对应说"里称为"对应法则"或"对应规则".

(2) 记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的: 前者表示自变量 x 与因变量 y 之间的关系或对应法则,而后者表示与自变量 x 对应的函数值. 但习惯上常用记号"$f(x), x \in D$"或"$y = f(x), x \in D$"来表示定义在 D 上的函数 f.

(3) 若对任意 $x \in D$,按照关系 f 只有一个 y 值与之对应,则称函数 $y = f(x)$ 为 **单值函数**,否则,称函数 $y = f(x)$ 为 **多值函数**. 如函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 为单值函数,函数 $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ 为多