徽積溯源

關中味經
官書局刊

微積溯源八卷前四卷爲微分術後四卷爲積分術乃算學中最深之事也余既與西士傅蘭雅譯畢代數術二十五卷更思求其進境故又與傅君譯此書焉先是咸豐年問曾有海甯李壬叔與西士偉烈亞力譯出代微積拾級一書流播海內余素與壬叔相友得讀其書粗明微積二術之梗概所以又譯此書者蓋欲補其所略也書中代數之式甚繁校算不易則劉君省菴之力居多今刻工已竣矣故序之曰吾以爲古時之算法惟有加減而已其乘與除乃因加減之不勝其繁故更立二術以使之簡易也開方之法又所以濟除法之窮者也蓋算學中自有加減乘

除開方五法而一切淺近易明之數無不可通矣惟人之心思智慮日出不窮往往以能人之所不能者爲快遇有窒礙難通之處輒思立法以濟其窮故有減其所不可減而正負之名不得不立矣除其所不受除而寄母通分之法又不得不立矣代數中種種記號之法皆出於不得已而立者也惟每立一法必能使繁者爲簡難者爲易遲者爲速而算學之境界藉此得更進一層如是屢進不已而所立之法於是乎日多矣微分積分者蓋又因乘除開方之不勝其繁且有窒礙難通之處故更立此二術以濟其窮又使簡易而速者也試觀圓徑求周眞數求對數等事

雖無微分積分之時亦未嘗不可求惟須乘除開方數十百次其難有不可言喻者不如用微積之法理明而數捷也然則謂加減乘除開方代數之外更有二術焉一曰微分一曰積分可也其積分術爲微分之還原猶之開平方爲自乘之還原除法爲乘之還原減法爲加之還原也然加與乘其原無不可還而微分之原有可還有不可還是猶算式中有不可開之方耳又何怪焉如必曰加減乘除開方已足供吾之用矣何必更究其精是舍舟車之便利而必欲負重遠行也其用力多而成功少蓋不待智者而辨矣同治十三年九月十八日金匱華蘅芳序

微積溯源卷一

英國華里司輯

英國　傅蘭雅　口譯
金匱　華蘅芳　筆述

論變數與函數之變比例

第一款　用代數以解任何曲線。其中每有幾種數。其大小恆有定率者。如橢圓之長短徑。拋物線之通徑。雙曲線之屬徑之類是也。

又每有幾種數。可有任若干相配之同數。其大小恆不能有定率者。如曲線任一點之縱橫線是也。

數既有此兩種分別。則每種須有一總名以賅之。故名

其有定之數曰常數。無定之數曰變數。

凡常數之同數。不能增。亦不能損。

凡變數之同數。能變爲大。亦能變爲小。故其從此同數變至彼同數之時。必歷彼此二數間最小最微之各分數。

如平圓之半徑爲常數。而其任一段之弧。或弧之弦矢切割各線。及各線與弧所成之面。皆謂之變數。

橢圓之長徑短徑。皆爲常數。而其曲線之任一段。或曲線上任一點之縱橫線。並其形內形外所能作之任何線。或面。或角。皆謂之變數。

抛物線之通徑爲常數，而其曲線之任一段，或任一點之縱橫線，或弧與縱橫線所成之面，皆謂之變數。他種曲線亦然。

凡常數，恆以甲乙丙丁等字代之，凡變數恆以天地人等字代之。

第二款　若有彼此二數，皆爲變數，此數變，而彼數因此數之變而亦變者，則彼數爲此數之函數。

如平圓之八線，皆爲弧之函數。　若反求之，亦可以弧爲八線之函數。

又如重學中令物體前行之力，與其物所行之路，皆爲

時刻之函數。

如有式 $\text{地}=\frac{\text{甲丅天}}{\text{甲丄天}}$。此式中甲為常數。天為自主之變數。地為天之函數。故地之同數。能以天與甲明之。

如有式 $\text{天}=\frac{\text{地丄一}}{\text{甲(地丅一)}}$。此式中。甲與一皆為常數。地為自主之變數。天為地之函數。故天之同數。可以地與甲及一明之。

如有式 $\text{戊}=\text{甲丄乙天丄丙天}^{\text{二}}$。或 $\text{戊}=\sqrt{(\text{甲}^{\text{二}}\text{丄乙天丄天}^{\text{二}})}$。或 $\text{戊}=\frac{\text{丙丄天}^{\text{二}}}{\text{甲丄}\sqrt{\text{乙天}}}$。其甲乙丙為常數。天為自變

之數而戊皆爲天之函數

凡函數之中可以有數箇自主之變數

如有式 $戊=甲天^{二}\perp乙天地\perp丙地^{二}$ 則天與地皆爲自主之變數戊爲天地兩變數之函數

凡變數之函數其形雖有多種然每可化之使不外乎以下數類

$天^{卯}$　$甲^{天}$　對天　正弦天　餘弦天　等類是也

凡函數爲$天^{卯}$之類，其指數爲常數，則可從天之卯方用代數之常法化之，而以有窮之項明其函數之同數，故謂之代數函數，亦謂之常函數，

如有式

$$戊＝甲天^{三}\perp\frac{\sqrt{甲\perp天^{二}}}{乙天\top丙天^{三}}$$

此種函數，其戊之同數，可用加減乘除開方等法而得之，

凡函數爲$甲^{天}$對天之類，則其函數之同數不能以有窮之項明之，故謂之越函數，越者，超越於尋常之意也，

一

凡函數為正弦天餘弦天及正切天正割天之類則其函數之同數皆可以平圜之各線明之故謂之圜函數亦謂之角函數

以上三種函數常函數越函數圜函數也若已知天之同數則其函數之同數即可求得故名此三種函數為陽函數因其顯而易明故謂之陽函數

更有他種函數必先解其方程式令函數中之各變數分開然後能求其同數者

如有式 $\text{戊天}=\dfrac{\text{戊丅天}}{\text{戊丄天}}$ 其戊為天之函數如欲求其戊與天相配

之同數必先解其二次方程式始能通

此種之式名曰天之隂函數因其雜糅未明故謂之隂函數反之亦可云天爲戊之隂函數

如解其方程式爲

$$戊＝\frac{三}{二}\left[天丄\frac{天}{一}丄\frac{天}{\sqrt{天^{四}丄六天^{三}丄一}}\right]$$

則戊變爲天之隂函數

昔代數之家凡遇須用開平方之處每于其式之左旁作一根字以記之如根天爲天之平方根後又變通其法而以根號記之如$\sqrt{天}$爲天之平方根此代數之例也

茲可仿照此例。凡遇某變數之函數。亦用一號以記之。所以凡有任何變數之函數。皆可書一函字于其變數之旁。以爲識別。

如天之函數。則作 函天。或作 函(天)。皆言天之函數也。所以凡見變數之左旁。有一函字者。其函字並非代天之倍數。其意謂是某變數之函數也。

用此法。則可將

戊＝天^{卯}。
戊＝甲^{天}。
戊＝對天。
戊＝正弦天。
戊＝餘弦天。

各種之式。以一語賅之。謂之 戊＝函天。或 戊＝函(天)。

若函數從兩箇變數而成。其天與地皆爲自主之變數。其式如 $戊=甲天^{二}\perp乙天地\perp丙地^{二}$ 者。則可以 $戊=函(天地)$ 別之。函數爲多箇變數所成者。倣此推之。

惟函數只指其變數言之。若其甲乙丙丁各常數。雖多不論。

第三款　凡觀此書者。必先明變數與函數變比例之限。如幾何原本中。證明平圓之面積。必比其外切多等邊形之面積微小。若其外切多等邊形之邊愈多。則其面

積愈近于平圓之面積。所以可設平圓之面積爲任何小。而切其圓外爲多等邊形。可使多等邊形之面積與平圓之面積較。其數甚小于所設之圓面積。再設其多等邊形之面積爲級數。而其邊之變率。可每變多若干倍。則其多等邊形之面積。必漸與平圓之面積相近。而以平圓爲其限。雖切于圓外之多等邊形。其邊任變至若何多。其面積總不能等于平圓之面積。然其級數之總數。可比平圓之面積所差甚微。其較數之小。可小至莫可名言。

若用此法于圓內容多等邊形。則其多等邊形之面積。

亦以平圓之面積爲限。

總言之。凡平圓之周。爲其內容外切多等邊形之限。

如代數術第二百六十六款言如令甲代平圓之任何弧。則$\frac{\text{正弦甲}}{\text{甲}}$恆大于半徑。而$\frac{\text{正切甲}}{\text{甲}}$恆小于半徑。然令其弧爲任何小。則其式之同數。必甚近于半徑。而其所差之數可小至不能以言語形容。所以此兩數中間之數爲一。（卽半徑也。）故其公限亦爲一。

由此可見凡弧與弦切。三者之中。任取其二以相較。其比例之限必相等。