赢在思维

主编：蒋忠勇 杜秀红 王乃芯

初中数学

拉分题

解题思想与方法

200例+70题

几何篇

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

赢在思维

初中数学

拉分题

解题思想与方法

200例+70题

上架建议：初中数学教辅

ISBN 978-7-5628-4402-0

9 787562 844020 >

定价：28.00元

团购热线：021-64250306

封面设计：视界创意+杜静静

赢在思维

初中数学

拉分题

解题思想与方法

(200例+70题)

几何篇

主编：蒋忠勇 杜秀红 王乃芯

编委会

王乃芯 郭妍婕 陆娇蕾 瞿美娜
倪佳娣 许静妍 汤婧雯 郭晓云
郭 嫣 黄伊雯 孙璐怡 倪昳雯
蒋忠勇 杜秀红 邵秀秀 应雨亭

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

初中数学拉分题解题思想与方法．几何篇 / 蒋忠勇等主编．
—上海：华东理工大学出版社，2015.10
(赢在思维)
ISBN 978-7-5628-4402-0

Ⅰ.①初… Ⅱ.①蒋… Ⅲ.①几何课—初中—题解
Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 237611 号

赢在思维

初中数学拉分题解题思想与方法(200 例+70 题)(几何篇)

主　　编 / 蒋忠勇　杜秀红　王乃芯
策划编辑 / 郭　艳
责任编辑 / 郭　艳
责任校对 / 成　俊
封面设计 / 视界创意
出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司
地　　址：上海市梅陇路 130 号，200237
电　　话：(021)64250306(营销部)
(021)64252174(编辑室)
传　　真：(021)64252707
网　　址：press.ecust.edu.cn
印　　刷 / 常熟市华顺印刷有限公司
开　　本 / 787 mm×1092 mm　1/16
印　　张 / 10
字　　数 / 251 千字
版　　次 / 2015 年 10 月第 1 版
印　　次 / 2015 年 10 月第 1 次
书　　号 / ISBN 978-7-5628-4402-0
定　　价 / 26.00 元

联系我们：电 子 邮 箱 press@ecust.edu.cn
官 方 微 博 e.weibo.com/ecustpress
天猫旗舰店 http://hdlgdxcbs.tmall.com

前　言

在初中数学学习过程中，对于一些中等以上难度的题目，即拉分题，大部分同学做相同的题型时有时对有时错，很难拿到高分.究其原因，绝大多数是因为对定型的、静态的基础知识理解不够深入，从而无法灵活掌握发展的、动态的数学思想，进而导致虽然进行了大量的训练但仍旧不得要领.解题方法之所以重要，本质原因就是解题思想与方法是数学学习的灵魂.为此，我们编写本套丛书，将初中数学最常见拉分题的解题思想与方法按代数篇和几何篇系统整理归类，依次阐述，旨在读者触类旁通，迅速得其要领，起到事半功倍作用，大大提高学习效率.本书主要有以下特点.

一、方法说明，带应用场合

每个专题先阐述各类数学思想解题方法，让读者头脑中存有知识框架，形成感性认识；再归类该思想方法的应用场合，包括一些常用辅助线的添加方法，在反复实践中归纳解题方法，领悟解题思想，上升到理性认识，从而达到真正理解、熟练掌握、审题后一眼看出突破口、思路尽快进入正确轨道的目的.

二、经典例题，配解析点评

每个专题按应用场合精挑细选每类思想方法的题型，新颖独特，覆盖面广，具有代表性.所有例题均配有解题分析，步骤详细，如同老师上课一般.同时，适当提供拓展型、有层次、综合性、发展性的题目，体现数学思想，让读者在探索中获取一种出乎意料，又在情理之中的成就感.

三、巩固练习，促融会贯通

精选近几年优秀试题并自编一些综合性难题，作为每个专题相应的巩固练习题.这些题目既检测了读者对前面例题的掌握程度，又帮助读者开阔视野、拓展思维.书后附有参考答案与解析，言简意赅揭示解题奥秘，读者可选择适合自己的解题技巧，提高学习效率，增强解题能力.

以下几个关键问题希望读者能特别关注：辅助线的添加形式；综合性、压轴性问题的解答；思维方法和解题方法的应用场合.

授人以鱼，只供一饭之需；授人以渔，则一生受用无穷.希望读者们能通过本套丛书收获各自想收获的，同时也希望能得到广大读者的建议与批评，使这套丛书日臻完善，不断超越.

目 录

思维方法篇

解题方法篇

思维方法篇

专题 1 分类讨论

【方法说明】

把需要研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称之为分类讨论思想.

分类讨论是一种重要的数学思想，也是一种解题策略，在数学中的应用相当多，它能使许多看似非常复杂的问题简单化.因此在用分类讨论解决数学问题时要遵循一定的规则，注意合理的分类，对全体对象的分类必须做到不重复、不遗漏，每次分类必须保持在同一标准.分类讨论解题的实质，是将整体问题化为部分问题来解决，以增加题设条件.讨论的方法是逐类进行，还必须要注意综合讨论的结果，以使解题步骤完整.

【应用场合】

在初中几何中，可以运用分类讨论思想的情况有：由运动而引起的点、线的位置不确定；等腰三角形中，腰、顶角、高的不确定；直角三角形中，直角、斜边的不确定；相似三角形中，对应边、对应角的不确定；特殊四边形中，对边、邻边、对角线的不确定；圆中，弦与弦、优弧与劣弧、点与圆、直线与圆、圆与圆的位置不确定等.

【典型应用 1】与线段、角有关的分类讨论

(☆☆)【1.1.1】 **如图 1.1.1 所示，已知矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$.将此矩形绕矩形的顶点旋转，使点 A 落在直线 BC 上的点 A' 处，则 $AA'=$________.**

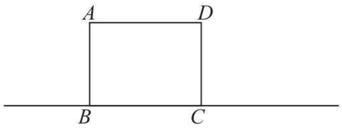

图 1.1.1

【解析】 按分别绕点 B，点 C，点 D 顺时针和逆时针旋转进行分类讨论.解得 $AA'=3\sqrt{2}$，$\sqrt{10}$，$3\sqrt{10}$，$2\sqrt{7}-2$，$2\sqrt{7}+2$.

【备注】 由点的位置的不确定和旋转方向的不确定展开讨论.

(☆☆)【1.1.2】 **如图1.1.2所示,已知$\angle AOB=52°$,以OB为边画$\angle BOC$,使得$\angle BOC$与$\angle AOB$互余,则$\angle AOC=$________.**

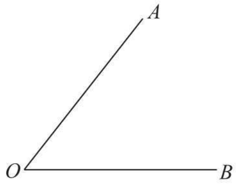

图 1.1.2

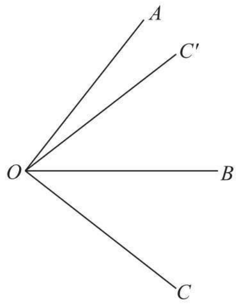

图 1.1.3

【解析】 如图1.1.3所示,本题分OC在OB上方还是下方两类情况讨论.故$\angle AOC=90°$或$14°$.

(☆☆☆)【1.1.3】 **如图1.1.4所示,已知正方形$ABCD$的边长为2,$\angle MAN=45°$.开始时,射线AN与射线AB重合,射线AM位于正方形$ABCD$的外侧,将$\angle MAN$绕定点A按逆时针旋转,当射线AM与射线AD重合时停止旋转.设旋转角为θ,$\angle MAN$与正方形$ABCD$的重叠部分面积为$S(S>0)$.求S关于θ的函数解析式,并写出θ的变化范围.**

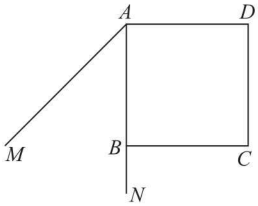

图 1.1.4

【解析】 分三类情况讨论.

当射线AN与BC边相交于点E时,如图1.1.5所示,$\angle BAE=\theta$,$BE=AB\cdot\tan\theta$,所以$S=S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AB\cdot BE=\frac{1}{2}\times2\times2\times\tan\theta=2\tan\theta(0<\theta\leqslant45°)$.

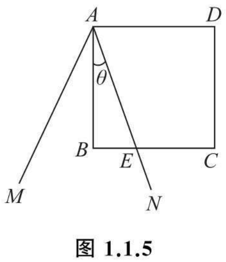

图 1.1.5

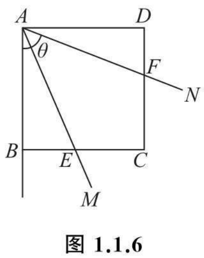

图 1.1.6

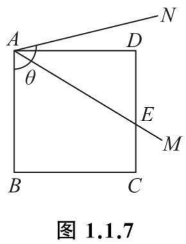

图 1.1.7

当射线AN与CD边相交于点F时,AM与BC边相交于点E,如图1.1.6所示,$\angle BAF=\theta$,$BE=AB\cdot\tan(\theta-45°)$,$DF=AD\cdot\tan(90°-\theta)=AD\cot\theta$,所以$S=S_{正方形ABCD}-S_{\triangle ABE}-S_{\triangle ADF}=4-\frac{1}{2}\times2\times2\tan(\theta-45°)-\frac{1}{2}\times2\times2\cot\theta=4-2\tan(\theta-45°)-2\cot\theta(45°<\theta\leqslant90°)$.

当射线 AM 与 DC 边相交于点 E 时，如图 1.1.7 所示，$\angle DAE=90^\circ-(\theta-45^\circ)=135^\circ-\theta$，$DE=AD\cdot\tan\angle DAE$，所以 $S=S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot DE=\frac{1}{2}\times2\times2\times\tan(135^\circ-\theta)=2\tan(135^\circ-\theta)(90^\circ<\theta<135^\circ)$.

【备注】 按角的一边与正方形的哪条边相交进行分类讨论.

(☆☆☆)【巩固练习 1】

已知$\angle ACD=90^\circ$，MN 是过点 A 的直线，$AC=DC$，$DB\perp MN$ 于点 B.

(1) 如图 1.1.8 所示，求证：$AB+BD=\sqrt{2}CB$.

(2) 当 MN 绕点 A 旋转到如图(1.1.9) 和图(1.1.10) 两个位置时，BD、AB、CB 满足什么样的关系式？请写出你的猜想，并对图(1.1.9) 给予证明.

(3) MN 在绕点 A 旋转过程中，当 $\angle BCD=30^\circ$，$BD=\sqrt{2}$ 时，则 $CD=$________，$CB=$________.

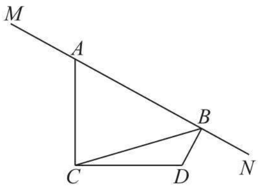

图 1.1.8

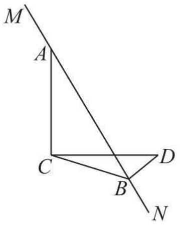

图 1.1.9

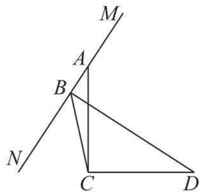

图 1.1.10

【典型应用 2】与等腰三角形有关的分类讨论

(☆)【1.2.1】 **等腰三角形的一个外角为 110°，则其顶角为________.**

【解析】 分为 110°是底角的外角和顶角的外角两种情况讨论.用内角和计算可得顶角为70°或 40°.

(☆☆)【1.2.2】 **在直角坐标系中，点 O 为坐标原点，已知点 $A(-2,2)$，试在 x 轴上找一点 P，使$\triangle AOP$ 为等腰三角形，求符合条件的点 P 的坐标.**

【解析】 分为 $OA=OP$，$OA=AP$，$OP=AP$ 三类情况讨论.故点 P 的坐标为$(2\sqrt{2},0)$或$(-2\sqrt{2},0)$或$(-2,0)$或$(-4,0)$.

(☆☆)【1.2.3】 **$\triangle ABC$ 中，点 H 是高 AD 和高 BE 的交点，若 $BH=AC$，求$\angle ABC$.**

【解析】 三角形高的位置是由三角形形状决定的.锐角三角形的高在图形内部,钝角三角形有两条高在图形外部.如图 1.2.1、图 1.2.2 所示,可求得$\angle ABC=45°$或 $135°$.

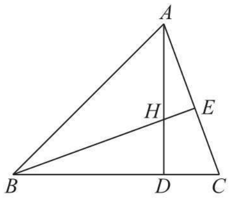

图 1.2.1

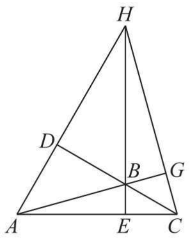

图 1.2.2

(☆☆)【1. 2. 4】 **若一个三角形的边长是大于 1 且小于 5 的整数,求该三角形的周长.**

【解析】 先按三角形分类,再在等腰中按腰和底分类.

三角形分类	三边长	腰	底	周长
不等边三角形（三边互不相等）	2 3 4	/	/	9
等腰但不等边三角形	2 2 3	2	3	7
	3 3 2	3	2	8
	3 3 4	3	4	10
	4 4 2	4	2	10
	4 4 3	4	3	11
等边三角形	2 2 2	2	2	6
	3 3 3	3	3	9
	4 4 4	4	4	12

当三边长为 2、2、4 时,无法构成三角形,舍去.故三角形周长可能是 6、7、8、9、10、11、12.

【备注】 另解,运用枚举法.

编号	三角形的三边长	周长
①	2 2 2	6
②	2 2 3	7
③	2 3 3	8
④	2 3 4	9
⑤	2 4 4	10
⑥	3 3 3	9
⑦	3 3 4	10
⑧	3 4 4	11
⑨	4 4 4	12

当三边长为 2、2、4 时，无法构成三角形，舍去.故三角形周长可能是 6、7、8、9、10、11、12.

(☆☆☆)【巩固练习 2】

已知等腰$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$于点D，且$AD=\frac{1}{2}BC$，求$\triangle ABC$底角的度数.

【典型应用 3】与直角三角形有关的分类讨论

(☆☆)【1.3.1】 **已知 x,y 为直角三角形两边长，满足 $|x^2-4|+\sqrt{y^2-5y+6}=0$，则第三边长为________.**

【解析】 分x,y都是直角边和斜边进行讨论，则第三边长可能为$2\sqrt{2}$、$\sqrt{13}$或$\sqrt{5}$.

(☆☆☆)【1.3.2】 **已知点 $M(0,1)$，$N(0,3)$，在直线 $y=2x+4$ 上找一点 P，使$\triangle PMN$为直角三角形，求点 P 的坐标.**

【解析】 先确定$\triangle PMN$的某个角为直角，再用勾股定理建立方程计算，得P坐标可能为$\left(-\frac{3}{2},1\right)$、$\left(-\frac{1}{2},3\right)$、$\left(-\frac{3}{5},\frac{14}{5}\right)$或$(-1,2)$.

(☆☆☆)【巩固练习 3】

如图 1.3.1 所示，三角形纸片ABC中，$\angle C=90°$，$AB=12$，$BC=6$，B'是边AC上一点.将三角形纸片折叠，使点B与点B'重合，折痕与BC、AB分别相交于点E、点F.

(1) 设$BE=x$，$B'C=y$，试建立y关于x的函数关系式，并写出x的取值范围.

(2) 当$\triangle AFB'$是直角三角形时，求出x的值.

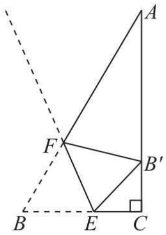

图 1.3.1

【典型应用 4】与相似三角形有关的分类讨论

(☆☆)【1.4.1】 **$\triangle ABC$ 中,点 D 是 BC 边上一点,若 AD 把 $\triangle ABC$ 分成两个相似三角形 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$,判断 $\triangle ABC$ 的形状.**

【解析】 此题一定有 $\angle ADB=\angle ADC$,分 $\angle B=\angle C$ 和 $\angle B=\angle DAC$ 两种情况讨论.所以,$\triangle ABC$ 的形状为等腰三角形或直角三角形.

【备注】 由对应角不确定而需要分类讨论.

(☆☆☆)【1.4.2】 **已知一个三角形三边长分别为 9、12、16.若 $\triangle ABC$ 与它相似,其中 $AB=3$,$BC=4$,则 $AC=$ ________.**

【解析】 分 AC 为最长边、最短边两种情况讨论,如果是中间边,则对应边不成比例,要舍去.因此得 $AC=\frac{16}{3}$ 或 $\frac{9}{4}$.

【备注】 相似三角形对应边不确定要分类讨论.

(☆☆☆)【1.4.3】 **如图 1.4.1 所示,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$AC=3$,$BC=4$.翻折 $\angle C$,使点 C 落在斜边 AB 上的某一点 D 处,折痕为 EF(点 E,点 F 分别落在边 AC,BC 上),若 $\triangle CEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似,求 CD 的长.**

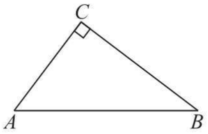

图 1.4.1

【解析】 如图 1.4.2 所示,当 $\triangle CEF\backsim\triangle CAB$ 时,$EF\parallel AB$,即 $CD\perp AB$,可用面积法得 $CD=\frac{12}{5}$.

如图 1.4.3 所示,当 $\triangle CEF\backsim\triangle CBA$ 时,$\angle A=\angle CFE$,由 $\angle C=90°$,$CD\perp EF$,得 $\angle ACD=\angle CFE$,即 $\angle A=\angle ACD$,故 $DC=DA$,同理 $DC=DB$,所以 $DC=\frac{1}{2}AB=\frac{5}{2}$.所以 CD 长为 $\frac{12}{5}$ 或 $\frac{5}{2}$.

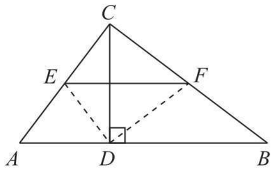

图 1.4.2

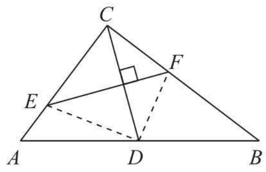

图 1.4.3

(☆☆☆)【巩固练习 4】

如图 1.4.4 所示，已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A，B 两点，与 y 轴交于点 C，点 D 为 OC 的中点，直线 AD 交抛物线于点 $E(2,6)$，且△ABE 与△ABC 的面积之比为 3∶2.

(1) 求直线 AD 和抛物线的解析式.

(2) 抛物线的对称轴与 x 轴相交于点 F，点 Q 为直线 AD 上一点，且△ABQ 与△ADF 相似，直接写出点 Q 的坐标.

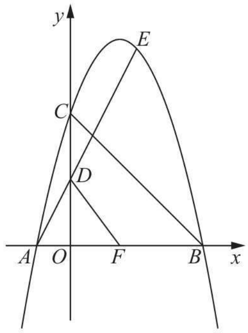

图 1.4.4

【典型应用 5】与特殊四边形有关的分类讨论

(☆☆)【1.5.1】 **抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 y 轴正半轴交于点 C，与 x 轴交于点 $A(1,0)$，$B(4,0)$，且∠OCA＝∠OBC.在直角坐标平面内确定点 M，使得以点 M，A，B，C 为顶点的四边形是平行四边形，求点 M 的坐标.**

【解析】 平行四边形中有两组对边，两条对角线.现有三点构成三条线段，按哪两条为邻边分成三类，故 $M(3,2)$ 或 $M(5,-2)$ 或 $M(-3,2)$.

(☆☆☆)【1.5.2】 **如图 1.5.1 所示，已知点 $A(-1,m)$ 与点 $B(2,m+3\sqrt{3})$ 是反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 图像上的两个点，若点 $C(-1,0)$，则在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 图像上是否存在点 D，使得以 A，B，C，D 四点为顶点的四边形为梯形？若存在，求出点 D 的坐标；若不存在，请说明理由.**

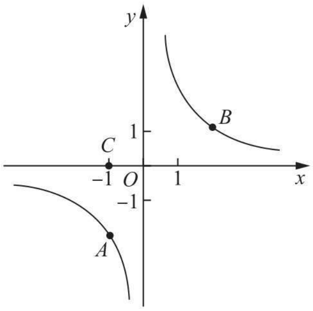

图 1.5.1

【解析】 对不同的图形位置进行分类，四点中已知三点构成三条线段，以一条线段为梯形的底分成三类，其中一类不符合，舍去.故 $D\left(6,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 或 $D(1,2\sqrt{3})$ 或 $D(-2,-\sqrt{3})$.

(☆☆☆)【1.5.3】 **如图 1.5.2 所示，梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，已知 $AB=15$，$DC=13$，**

梯形的高为 12，$AD=m$，其中 $m>0$.求梯形另一底 BC 的长，并就 m 的取值范围对问题解的个数进行讨论.

【解析】 本题中 BC 是上底还是下底不确定，高在梯形内还是梯形外不确定，故要分类讨论.

过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E，过点 D 作 $DF\perp BC$ 于点 F，则 $AE=DF=12$，$BE=9$，$CF=5$.当点 E，点 F 分别在线段 BC 上时，$BC=9+m+5=14+m$.

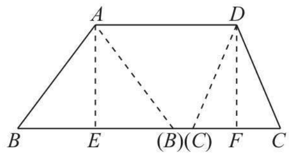

图 1.5.2

当点 E，点 F 分别在线段 BC 外时，$BC=m-9-5=m-14$.

当点 E 在线段 BC 上，点 F 在线段 BC 外时，

$BC=9+m-5=4+m$.

当点 E 在线段 BC 外，点 F 在线段 BC 上时，$BC=5+m-9=m-4$.

故当 $m>14$ 时，BC 的长有 4 个解；当 $4<m\leqslant 14$ 时，BC 的长有 3 个解；当 $0<m\leqslant 4$时，BC 的长有 2 个解.

(☆☆☆)【巩固练习 5】

如图 1.5.3 所示，在$\triangle ABC$ 中，分别以 AB，AC，BC 为边在 BC 的同侧作等边$\triangle ABD$，等边$\triangle ACE$，等边$\triangle BCF$.

(1) 求证：四边形 $DAEF$ 是平行四边形.

(2) $\triangle ABC$ 分别满足什么条件时，四边形 $DAEF$ 分别是①矩形，②菱形，③正方形？

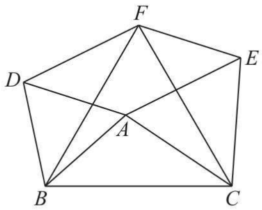

图 1.5.3

【典型应用 6】与圆有关的分类讨论

(☆)【1.6.1】 **已知点 P 到圆 O 最近的距离是 3 cm，最远的距离是 13 cm，求圆 O 的半径.**

【解析】 分点 P 在圆 O 外和在圆 O 内两种情况讨论. 圆 O 的半径为 8 cm 或 5 cm.

(☆☆)【1.6.2】 **已知圆 O 的半径为 2，在圆 O 中两条弦 AB、BC 的长分别为 $2\sqrt{3}$、2，则 $\angle ABC=$________.**

【解析】 根据 AB、BC 在圆心同侧还是异侧分两种情况讨论.所以,$\angle ABC=30°$或 $90°$.

(☆☆)【1.6.3】 **已知横截面直径为 100 cm 的圆形下水道,如果水面宽 AB 为 80 cm,求下水道中水的深度.**

【解析】 分弦所对的弧是优弧和劣弧两种情况讨论.所以,下水道中水的深度为 20 cm 或 80 cm.

(☆☆☆)【1.6.4】 **如图 1.6.1 所示,直线 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 与 x 轴,y 轴分别交于点 M,点 N.如果点 P 在 x 轴上,以点 P 为圆心,$\frac{12}{5}$ 为半径作圆,该圆与直线 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 相切,求点 P 的坐标.**

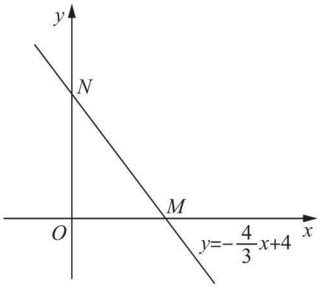

图 1.6.1

【解析】 由于直线与圆的位置不确定,所以根据圆心在直线的哪一侧分两类情况讨论,则 $P(0,0)$或 $P(6,0)$.

(☆☆☆)【1.6.5】 **如图 1.6.2 所示,在$\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=90°$,$AB=AC=2\sqrt{2}$,圆 A 的半径为 1,若点 O 在 BC 边上运动(与点 B、C 不重合),设 $BO=x$,$\triangle AOC$ 的面积为 y.**

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式,并写出函数的定义域.

(2) 以点 O 为圆心,BO 为半径作圆,求当圆 O 与圆 A 相切时,$\triangle AOC$ 的面积.

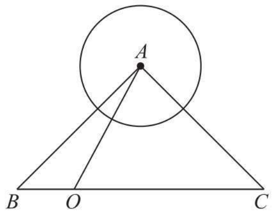

图 1.6.2

【解析】 (1) 如图 1.6.3 所示,过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H,根据$\angle BAC=90°$,$AB=AC=2\sqrt{2}$可得 $BC=4$,$AH=2$,$S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\times OC\times AH=4-x$,所以 $y=-x+4(0<x<4)$.

(2) 当点 O 与点 H 重合时,圆 O 与圆 A 相交,不符合题意,当点 O 与点 H 不重合时,在 $\mathrm{Rt}\triangle AOH$ 中,$AO^2=AH^2+OH^2=x^2-4x+8$;圆 O 与圆 A 外切时,$AO=x+1$,$(x+1)^2=x^2-4x+8$,$x=\frac{7}{6}$,$S=4-\frac{7}{6}=\frac{17}{6}$,圆 O 与圆 A 内切时,$AO=x-1$,$(x-1)^2=x^2-4x+8$,$x=\frac{7}{2}$,$S=4-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}$.

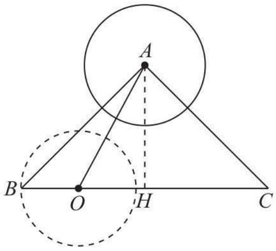

图 1.6.3

(☆☆☆)【巩固练习 6】

(2014·上海嘉定区·期末)圆 O 的半径长为 5,点 A、点 B、点 C 在圆 O 上,$AB=BC=6$,点 E 在射线 BO 上.

(1) 如图 1.6.4 所示,连接 AE、CE,求证:$AE=CE$.

(2) 如图 1.6.5 所示,以点 C 为圆心,CO 为半径画弧交半径 OB 于点 D,求 BD 的长.

(3) 当 $OE=\dfrac{11}{5}$时,求线段 AE 的长.

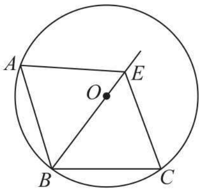

图 1.6.4

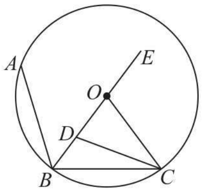

图 1.6.5

【典型应用 7】综合应用

(☆☆☆)【1.7.1】

直角三角板 ABC 中,$\angle A=30°$,$BC=1$,将其绕直角顶点 C 逆时针旋转角 α($0°<\alpha<120°$ 且 $\alpha\neq 90°$),得到 $Rt\triangle A'B'C$.

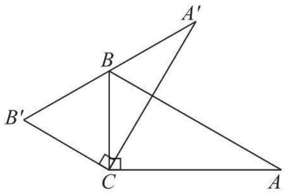

图 1.7.1

(1) 如图 1.7.1 所示,当 $A'B'$ 边经过点 B 时,求旋转角 α 的度数.

(2) 在三角板旋转的过程中,边 $A'C$ 与 AB 所在直线交于点 D,过点 D 作 $DE\parallel A'B'$ 交 CB' 边于点 E,连接 BE.

① 当 $0°<\alpha<90°$时,设 $AD=x$,$BE=y$,求 y 与 x 之间的函数解析式及自变量取值范围;

② 当 $S_{\triangle BDE}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}$时,求 AD 的长.

【解析】

(1) $\alpha=60°$.

(2) ① 易证$\triangle CAD\backsim\triangle CBE$,得$\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ $(0<x<2)$.

② 当 $0°<\alpha<90°$,点 D 在 AB 边上,$S_{\triangle BDE}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$,$AD=1$;

当 $90^\circ<\alpha<120^\circ$，点 D 在 AB 延长线上，$AD=\sqrt{2}+1$.

(☆☆☆)【1.7.2】

如图 1.7.2 所示，在直角坐标平面内，O 为原点，点 A 的坐标为 $(1,0)$，点 C 的坐标为 $(0,4)$，直线 $CM\parallel x$ 轴. 点 B 与点 A 关于原点对称，直线 $y=x+b$（b 为常数）经过点 B，且与直线 CM 相交于点 D，连接 OD.

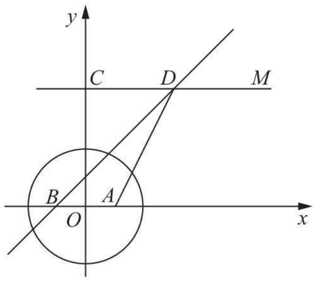

图 1.7.2

(1) 求 b 的值和点 D 的坐标.

(2) 设点 P 在 x 轴的正半轴上，若 $\triangle POD$ 是等腰三角形，求点 P 的坐标.

(3) 在(2) 的条件下，如果以 PD 为半径的圆 P 与圆 Q 外切，求圆 O 的半径.

【解析】

(1) $b=1$，$D(3,4)$.

(2) 当 $PO=PD$，$P\left(\frac{25}{6},0\right)$；当 $PO=OD$，$P(5,0)$；当 $PD=OD$，$P(6,0)$.

(3) 当 $P\left(\frac{25}{6},0\right)$ 时，圆 O 与圆 P 外切，圆 O 不存在；当 $P(5,0)$ 时，$PD=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，所以圆 O 半径为 $5-2\sqrt{5}$；当 $P(6,0)$ 时，圆 O 半径为 1.

(☆☆☆)【巩固练习 7】

如图 1.7.3 所示，在等边 $\triangle ABC$ 中，线段 AM 为 BC 边上的中线，动点 D 在直线 AM 上时，以 CD 为一边且在 CD 的下方作等边 $\triangle CDE$，连接 BE.

(1) 填空：$\angle ACB=$________度.

(2) 当点 D 在线段 AM 上（点 D 不运动到点 A）时，试求出 $\frac{AD}{BE}$ 的值.

(3) 若 $AB=8$，以点 C 为圆心，以 5 为半径作圆 C 与直线 BE 相交于 P、Q 两点，在点 D 运动的过程中（点 D 与点 A 重合除外），试求 PQ 的长.

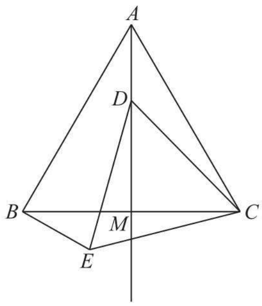

图 1.7.3