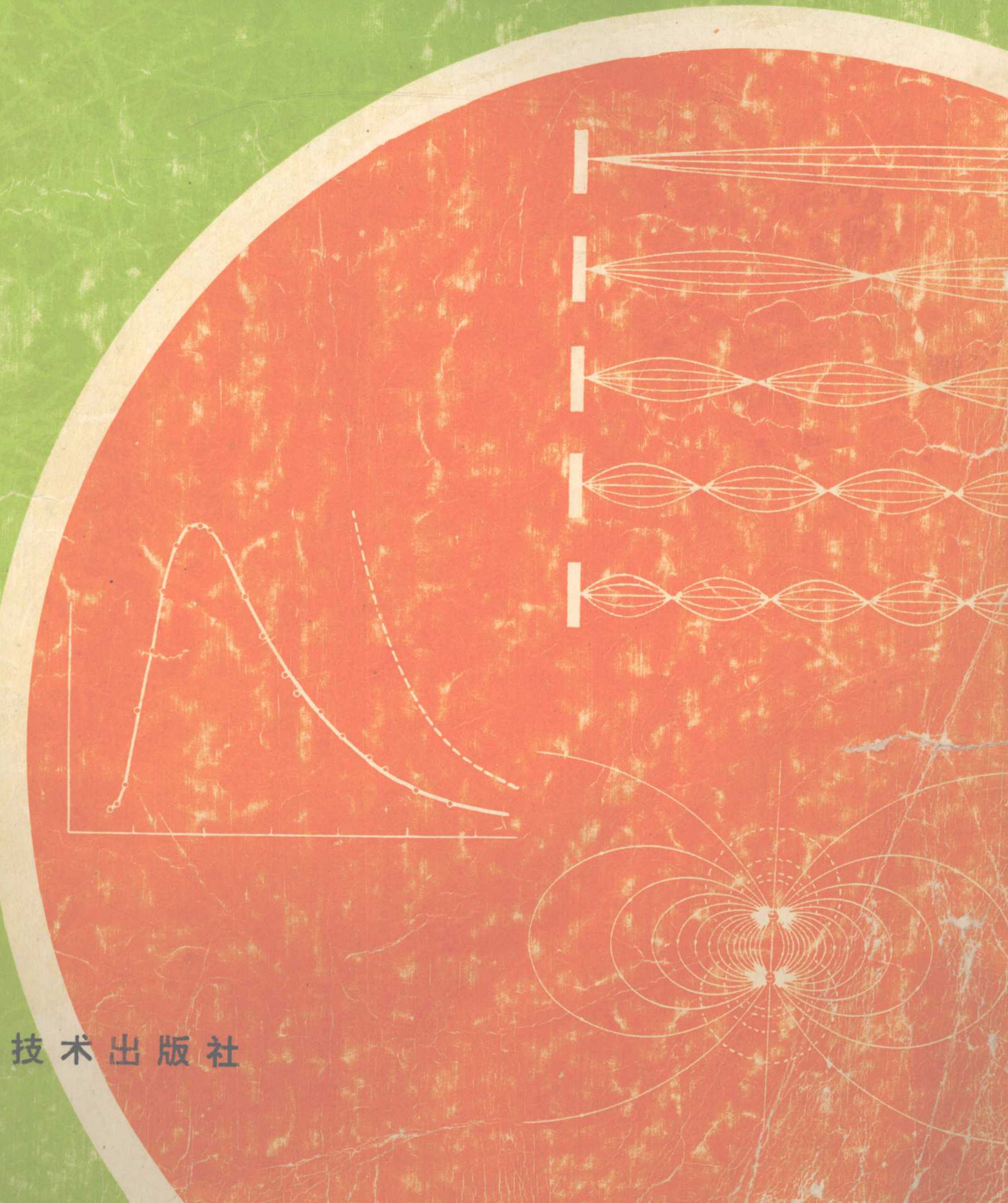
学校教学参考书

大学物理习题课教程

主编　胡其图



河南科学技术出版社

《大学物理习题课教程》编写人员名单

主　编　胡其图

副主编　吴明阳　艾宝勤　李淑敏

编　委　（以姓氏笔划为序）

艾宝勤　苏玉玲　吴明阳

李淑敏　李铜忠　张运强

张耀举　胡其图　薛运才

F8 月

前　言

大学物理课是高等工业学校各专业学生的一门重要的基础理论课程。大学物理习题课是整个大学物理课教学过程中的一个很重要的教学环节，国家教委高等学校工科物理课程教学指导委员会制定的《高等工业学校大学物理课程教学基本要求》中明确规定："为了保证必要的实践性教学环节，以小班形式进行的习题课、讨论课的教学时数目前不应少于总教学时数的10%，争取逐步做到不少于15%。"大学物理习题课是在教师的引导下，充分发挥学生个体因素的极好机会，可以达到复习、巩固所学知识，加深对教学内容的理解，培养学生分析问题和解决问题的能力等目的。然而，目前国内外尚无适用于一般工科院校大学物理习题课的教材。因此，我们编写了《大学物理习题课教程》，除了可供任课教师参考之外，同时也可作为学生习题课的教学用书。

本书是根据1987年国家教委颁布的《高等工业学校大学物理课程教学基本要求》，结合编者的教学经验，并借鉴国内外部分教材而编写的。教学内容的基本要求分为三级：掌握、理解和了解。所选题型一般分为选择题、填空题、计算题和证明题。选入的题目数量均超出习题课所需数量，其目的是为了便于教师根据学生实际情况和不同教学要求选择使用，特别是计算题，考虑到了与大学物理课中的讲课例题相配合。

在编写本书的过程中，我们努力做到选题的典型性和综合性；选题目的明确，难易层次分明，物理概念准确；解题思路清晰，方法简练。对于一些难度较大或者学生平时容易做错的计算题，我们均做了比较深入的分析和讨论，部分计算题还列举了几种不同的解法。做一定数量的习题是为了熟练掌握、灵活运用物理学的基本概念和基本规律，提高分析和解决问题的能力。长期坚持认真地做每一道习题，有助于培养严谨的科学作风，提高论证能力和表达能力。做习题时，要深入钻研，而不要片面地追求数量。每做一道习题时就要把它做透，对该题的物理内容要有透彻的理解，而不要满足于得出正确的答案。

参加本书撰稿的都是在教学第一线工作的教师，具体分工如下：第一章，张耀举、李铜忠；第二章，胡其图、李淑敏；第三章，李淑敏、胡其图；第四章，艾宝勤、苏玉玲；第五章，吴明阳、苏玉玲；第六章，胡其图、李铜忠；第七章，薛运才、胡其图；第八章，艾宝勤、张耀举；第九章，艾宝勤、张耀举；第十章，张运强、苏玉玲；第十一章，吴明阳、张运强；第十二章，吴明阳、张运强；第十三章，苏玉玲、李淑敏；第十四章，李淑敏、苏玉玲；第十五章，胡其图、吴明阳；第十六章，胡其图、薛运才；第十七章，胡其图、薛运才；第十八章，胡其图、艾宝勤；第十九章，吴明阳、胡其图；第二十章，张耀举、胡其图。本书由胡其图主编，吴明阳、艾宝勤、李淑敏副主编。在本书编写过程中，郑州轻工业学院基础课部物理教研室的许多同志曾给予具体的支持和帮助，我们在此表示感谢。

国家教委高等学校工科物理课程教学指导委员会委员、东北大学王燕生教授和国家教委高等学校工科物理课程教学指导委员会委员、东南大学叶善专教授分别审阅了初稿，他们对原稿进行了详细的修改，并提供了许多宝贵的意见和具体建议，特在此深表感谢。

编写这样一本供高等工业学校各专业大学物理习题课使用的教学用书，是一种新的尝试，由于编者水平有限，兼之执笔时间匆促，错误和不足之处恳请读者批评指正。

编者

1994年8月

目　录

第一部分　力学

第一章　质点运动学

一、教学基本要求

1. 理解质点、参照系等概念.

2. 掌握位置矢量、位移、速度和加速度等描述质点运动和运动变化的物理量.

3. 能借助于直角坐标系熟练地计算质点在平面内运动时的速度和加速度;能熟练地计算质点作圆周运动时的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度.

二、内容提要

1. 参照系:为了描述物体的机械运动,需选取一个(或几个相对静止的)物体为参照物体,这个(些)参照物体即称为参照系,亦称参考系.参照系的选择依方便而定.

2. 坐标系:为了定量地描述物体相对于参照系的运动情况,需要选择一定的相对于参照系静止的坐标系.坐标系形式的选择依方便而定.

3. 质点:当不考虑物体的大小和形状时,或物体的大小和形状对所求问题不影响时,为了讨论问题的方便,可以把物体看作是一个点,且具有与物体相应的质量.这个“具有质量的几何点”,称为质点.质点是一个理想模型.

4. 位置矢量 $\boldsymbol{r}$:从坐标原点到质点位置的有向线段称为质点的位置矢量.它是一个矢量,因此又称矢径,用 $\boldsymbol{r}$ 表示.位置矢量是反映质点相对于参照物(原点)的空间位置的物理量.

5. 运动方程与轨道方程:物体的位置矢量与时间的依赖关系 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,称为物体的运动方程.在运动方程中消去时间参数 t 后给出的坐标分量间的关系,称为轨道方程.

6. 位移:在时间间隔 $[t_1,t_2]$ 内,物体位置发生了变化,那么从初始位置 $\boldsymbol{r}_1$ 到终止位置 $\boldsymbol{r}_2$ 的有向线段 $\Delta\boldsymbol{r}$,称为质点在 t_1 到 t_2 时间内的位移,即 $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$.它是一个矢量.

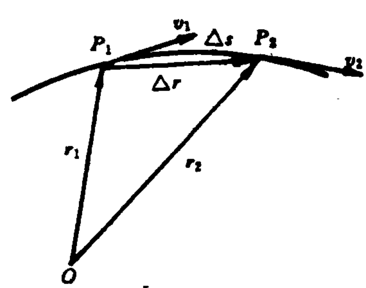


图 1—1

7. 速度与速率:是描述物体位置变化快慢和趋势的物理量.

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

称为质点在 t 时刻的瞬时速度,简称为速度,是一个矢量,方向沿轨道的切线方向.

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t}=\left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\right|=|\boldsymbol{v}|$$

称为质点在 t 时刻的瞬时速率.

在直角坐标系 $O—XYZ$ 中

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k},$$

则 $v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},$

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k},$$

而 $v=\sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t})^2}.$

8. 加速度：是反映质点速度随时间变化的物理量.

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

称为质点在 t 时刻的瞬时加速度，简称加速度，也是一个矢量. 在直角坐标系中

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k},$$

则 $a_x=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\quad a_y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\quad a_z=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}.$

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2})^2+(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2})^2+(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2})^2}.$$

9. 圆周运动的加速度：当质点作圆周运动时，质点的加速度又可表示为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{e}_t+\frac{v^2}{R}\hat{e}_n.$$

其中 $\hat{e}_t$、$\hat{e}_n$ 分别表示圆轨道切向和法向（垂直于轨道向内）的单位矢量，则

$$\boldsymbol{a}_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{e}_t,\qquad \boldsymbol{a}_n=\frac{v^2}{R}\hat{e}_n$$

分别称为质点的切向加速度和法向加速度.

10. 圆周运动的角量描述：

(1) 角位置 θ：t 时刻质点位置用 $\boldsymbol{r}$ 与 X 轴的夹角 θ 来描述，θ 即称为质点在 t 时刻的角位置.

(2) 角位移：$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$.

(3) 角速度(大小)：$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.

(4) 角加速度(大小)：$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$.

11. 圆周运动中线量与角量的关系：

$$\begin{cases} s=R\theta,\\ v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=R\omega,\\ a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\beta,\\ a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2.\end{cases}$$

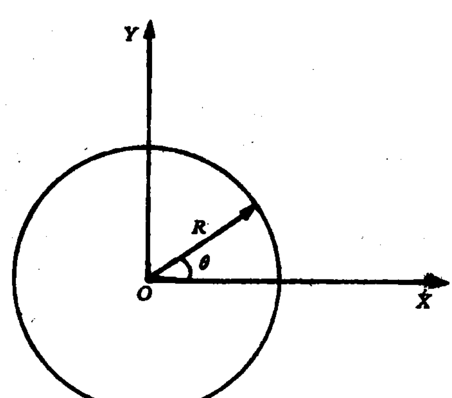


图 1—2

12. 运动的相对性：在不同的参照系中对同一质点运动规律的描述具有相对性. 设在两参照系中的物理量分别为相互对应的带撇与不带撇量（如图 1—3 所示），

则 $\quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_o + \boldsymbol{r}'$

$\boldsymbol{r}_0$ 为 S' 系原点相对于 S 系坐标原点的位置矢量，所以

$$\boldsymbol{v}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t},$$

则 $\quad \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0$

其中 $\boldsymbol{v}_0 = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}$ 为参照系 S' 相对于 S 系的速度. 同样

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_0$$

其中 $\boldsymbol{a}_0 = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}_0}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2}$ 为参照系 S' 相对于 S 系的加速度.

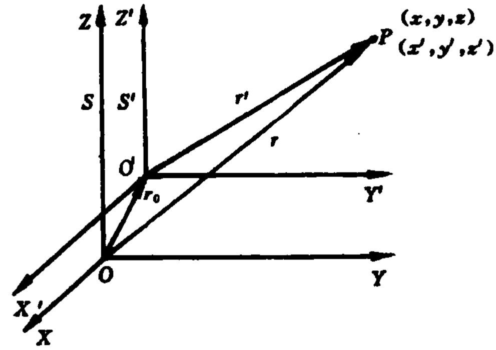


图 1—3

三、选择与填空

1. 在相对地面静止的坐标系内，A、B 二船都以 $2\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ 的速度匀速行驶，A 船沿 X 轴正向，B 船沿 Y 轴正向. 今在 A 船上设置与静止坐标系方向相同的坐标系（X,Y 方向单位矢量用 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$ 表示），那么从 A 船看 B 船，它对 A 船的速度（以 $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ 为单位）为

(A) $2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$； (B) $-2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$； (C) $-2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$； (D) $2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$.

2. 一质点作直线运动，某时刻的瞬时速度 $v = 2\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，瞬时加速度 $a = -2\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$，则一秒钟后质点的速度

(A) 等于零； (B) 等于 $-2\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$； (C) 等于 $2\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$； (D) 不能确定.

3. 一个质点在做匀速率圆周运动时

(A) 切向加速度改变，法向加速度也改变；

(B) 切向加速度不变，法向加速度改变；

(C) 切向加速度不变，法向加速度也不变；

(D) 切向加速度改变，法向加速度不变.

4. 一运动质点在某瞬时位于矢径 $\boldsymbol{r}(x,y)$ 的端点处，其速度大小为

(A) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$； (B) $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$； (C) $\dfrac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}$； (D) $\sqrt{(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2 + (\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2}$.

5. 质点作曲线运动，$\boldsymbol{r}$ 表示位置矢量，s 表示路程，a_t 表示切向加速度，下列表达式中，

(1) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a$； (2) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v$； (3) $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$； (4) $\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right| = a_t$

(A) 只有(1)、(4) 是对的； (B) 只有(2)、(4) 是对的；

(C) 只有(2) 是对的； (D) 只有(3) 是对的.

6. 下列说法中哪一条正确？

(A) 加速度恒定不变时，物体运动方向也不变；

(B) 平均速率等于平均速度的大小；

(C) 不管加速度如何，平均速率表达式总可以写成 $v = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$；

(D) 运动物体速率不变时，速度可以变化.

7. 一质点沿 X 轴作直线运动，其 v—t 曲线如图 1—4 所示，如 $t = 0$ 时，质点位于坐标原点，

则 $t = 4.5$ s 时，质点在 X 轴上的位置为

(A) 0；(B) 5m；(C) 2m；(D) $-$ 2m；

(E) $-$ 5m.

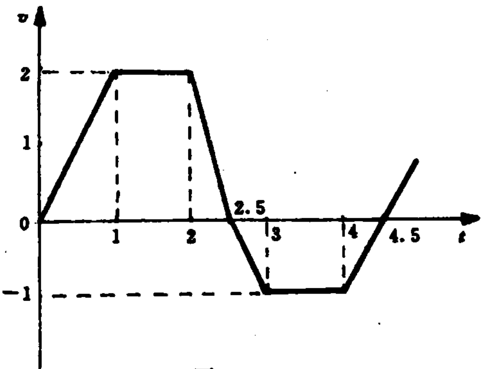


图 1—4

8. 如图 1—5 所示，湖中有一小船，有人在湖边有一定高度的岸上以匀速率 v_0 收绳子，小船即向岸边靠拢. 不考虑水流的速度，小船的运动是：

(A) 匀加速运动；(B) 匀减速运动；

(C) 变加速运动；(D) 变减速运动；

(E) 匀速直线运动.

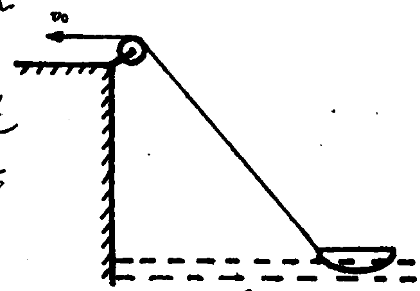


图 1—5

9. 一质点沿半径为 R 的圆周运动，其路程 s 随时间 t 变化的规律 $s = bt - \frac{1}{2}ct^2$ (SI)，式中 b, c 为大于零的常数，且 $b^2 < Rc$，当切向加速度与法向加速度大小相等时，质点运动所经历的时间为：

(A) $\frac{b}{c} - \sqrt{\frac{R}{c}}$；(B) $\frac{b}{c} + \sqrt{\frac{R}{c}}$；

(C) $\frac{c}{b} - \sqrt{\frac{c}{R}}$；(D) $\frac{c}{b} + \sqrt{\frac{c}{R}}$.

10. 一质点的运动方程为 $x = 6t - t^2$ (SI)，则在 t 由 0 到 4s 的时间间隔内，质点的位移大小为 ______，在 t 由 0 到 4s 的时间间隔内质点走过的路程为 ______.

11. 一物体作如图 1—6 所示的斜抛运动，测得在轨道 A 点处的速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小为 v，其方向与水平方向夹角成 30°，则物体在 A 点的切向加速度 $a_t =$ ______，轨道的曲率半径 $\rho =$ ______.

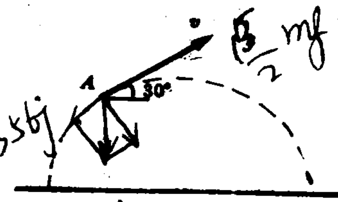


图 1—6

12. 在 XY 平面内有一运动的质点，其运动方程为 $\boldsymbol{r} = 10\cos 5t\boldsymbol{i} + 10\sin 5t\boldsymbol{j}$ (SI)，则 t 时刻其速度 $\boldsymbol{v} =$ ______；其切向加速度的大小 $a_t =$ ______；该质点运动的轨迹是 ______.

13. 一质点沿 X 方向运动，其加速度随时间变化关系为 $a = 3 + 2t$ (SI)，如果初始时质点的速度 v_0 为 $5\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，则当 t 为 3 s 时，质点的速度 $v =$ ______.

14. 一质点从静止 ($t = 0$) 出发，沿半径为 $R = 3$m 的圆周运动，切向加速度大小保持不变，$a_t = 3\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$，在 t 时刻，其总加速度 $\boldsymbol{a}$ 恰与半径方向成 45° 角，此时 $t =$ ______.

15. 距河岸(看成直线状)500m 处有一艘静止的船，船上探照灯以转速为 $n = 1\text{r}\cdot\text{min}^{-1}$ 转动，当光束与岸边成 60° 角时，光束沿岸边移动的速度大小为 $v =$ ______.

答案及分析

1. 选(B).

用相对运动公式得，B 船相对于 A 船的速度为 $\boldsymbol{v}_{BA} = \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A = 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{i} = -2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$.

2. 选(D).

由 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 得 $v=v_0+\int_0^t a\mathrm{d}t$，因为 v_0 和 a 的表达式均不知，因此无法确定任一时刻的速度.

3. 选(B).

匀速圆周运动，$v=$ 常数，$a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{e}_t=0$，而 $a_n=\dfrac{v^2}{R}\hat{e}_n\neq 0$，$\hat{e}_n$ 变，a_n 变，应选(B).

4. 选(D).

根据速度的定义 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 得速度大小

$$v=|\boldsymbol{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})\right|=\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}\right|=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}.$$

做此题时，一定要注意 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 是位置矢量大小的径向变化率(又称质点的径向速度)，$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\neq\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$.

5. 选(D).

$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 是切向加速度的大小；$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 是径向速率；$\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|$ 是实际加速度的大小，$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ 等于速度的大小.

对比

6. 选(D).

加速度方向与物体速度增量方向一致，与物体速度并没固定关系，因而(A)错；平均速率是路程与时间的比率，平均速度的大小是位移大小与时间的比率. 一般情况下路程不等于位移的大小，因而(B)错；只有对匀变速直线运动，才有 $\boldsymbol{v}=\dfrac{v_1+v_2}{2}$. 故(C)错；速度是个矢量，大小不变、方向变化时，速度也发生变化，故(D)对.

7. 选(C).

解一：利用 $v-t$ 图上的面积求位移.

$$\begin{aligned}x&=S_上+S_下\\&=\frac{1}{2}[(2-1)+(2.5-0)]\times 2+\frac{1}{2}[(4-3)+(4.5-2.5)]\times(-1)\\&=2(\mathrm{m}).\end{aligned}$$

解二：利用积分求位移.

首先由图像给出的条件求出各时间区间的速度表达式 v，然后由 $x=\int_0^{4.5}v\mathrm{d}t$ 计算而得 x. 即

$$v=\begin{cases}2t, & (0\leqslant t\leqslant 1)\\ 2, & (1\leqslant t\leqslant 2)\\ -4t+10, & (2\leqslant t\leqslant 2.5)\\ -2t+5, & (2.5\leqslant t\leqslant 3)\\ -1, & (3\leqslant t\leqslant 4)\\ 2t-9. & (4\leqslant t\leqslant 4.5)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}x=\int_0^{4.5}v\mathrm{d}t&=\int_0^1 2t\mathrm{d}t+\int_1^2 2\mathrm{d}t+\int_2^{2.5}(-4t+10)\mathrm{d}t+\int_{2.5}^3(-2t+5)\mathrm{d}t\\&+\int_3^4(-1)\mathrm{d}t+\int_4^{4.5}(2t-9)\mathrm{d}t=2(\mathrm{m}).\end{aligned}$$

8. 选(C).

解一:利用速度的分解法.

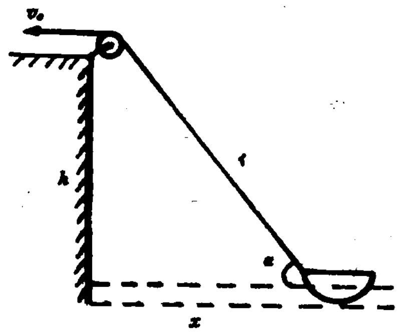


图 1—7

船的实际速度v沿水面指向岸,绳子的速度是船的速度的分速度,即$v_0 = v\cos\alpha$,则$v = \dfrac{v_0}{\cos\alpha}$. 当以不变的$v_0$收绳子,$\alpha$角渐大,那么$v$渐大,因此应选(C).

解二:利用几何关系和速度的定义.

由三角形关系知

$$r^2 = h^2 + x^2.$$

两边对t求导得

$$2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\text{则}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{x}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\cos\alpha}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}.$$

根据速度的定义知$v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $v_0 = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$,因此$v = \dfrac{v_0}{\cos\alpha}$.

显然不断收绳,α渐大,v渐大,应选(C).

9. 选(B).

依圆周运动规律$a_t = \dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = -c$, $a_n = \left(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\dfrac{1}{R} = \dfrac{(b-ct)^2}{R}$.

由题中条件$|a_t| = |a_n|$,即$c = \dfrac{(b-ct)^2}{R}$. 解得$t = \dfrac{b}{c} \pm \sqrt{\dfrac{R}{c}}$.

由于$b^2 < Rc$, $t > 0$,则$t = \dfrac{b}{c} + \sqrt{\dfrac{R}{c}}$.

10. 填 8m;10m.

$$x|_{t=4} - x|_{t=0} = (6\times 4 - 4^2) - 0 = 8(\mathrm{m}),$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 6 - 2t.$$

当$v = 0$时,$t = t_1 = 3\mathrm{s}$.

则 0 至 4s 内质点走的路程为$s_{0-4} = s_{0-3} + s_{3-4}$.

$$\begin{aligned} s_{0-4} &= |x_3 - x_0| + |x_4 - x_3| \\ &= |(6\times 3 - 3^2) - 0| + |(6\times 4 - 4^2) - (6\times 3 - 3^2)| \\ &= 9 + 1 = 10(\mathrm{m}). \end{aligned}$$

注意:路程是质点实际走过路径的长度,而位移只与起点位置和终点位置有关.

11. 填 $-\dfrac{g}{2}$;$\dfrac{2\sqrt{3}v^2}{3g}$.

将重力加速度分解到切线方向和法线方向,得

$$a_t = \boldsymbol{g}\cdot\hat{\boldsymbol{v}} = g\cos(120^\circ) = -\frac{g}{2},\quad a_n = \sqrt{g^2 - a_t^2} = \sqrt{g^2 - \frac{1}{4}g^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}g.$$

由$a_n = \dfrac{1}{\rho}v^2$得 $\rho = \dfrac{v^2}{a_n} = \dfrac{2\sqrt{3}v^2}{3g}$.

12. 填 $50[-\sin 5t\boldsymbol{i} + \cos 5t\boldsymbol{j}](\mathrm{m\cdot s^{-1}})$;0;圆.

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[10\cos 5t\boldsymbol{i} + 10\sin 10t\boldsymbol{j}] = -50\sin 5t\boldsymbol{i} + 50\cos 5t\boldsymbol{j},$$

$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{(-50\sin 5t)^2 + (50\cos 5t)^2} = 50.$$

则$a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$,

从$x = 10\cos 5t$和$y = 10\sin 5t$二式中联立消去t得$x^2 + y^2 = 10^2$,此即质点的轨迹方程

$\frac{v^2}{a_n}$ an

—— 圆.

13. 填　$23\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

$$v = v_0 + \int_0^3 a(t)\mathrm{d}t = 5 + \int_0^3 (3 + 2t)\mathrm{d}t = 23(\mathrm{m\cdot s^{-1}}).$$

14. 填　1s.

$a_t = 3 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$,则 $\mathrm{d}v = 3\mathrm{d}t$. 两边积分得 $v = 3t$.

则 $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(3t)^2}{3} = 3t^2$,

$\frac{a_t}{a_n} = \mathrm{tg}45°, \frac{3}{3t^2} = 1$,则 $t = \pm 1(\mathrm{s})$,舍去负根即得.

15. 填　$69.8\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

如图 1—8 所示,$s = s_0 \mathrm{tg}\theta$,

光速沿岸边移动的速度的大小为

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = s_0 \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = s_0 \frac{\omega}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{500 \times (\frac{2\pi}{60})}{\cos^2(90° - 60°)} = 69.8(\mathrm{m\cdot s^{-1}}).$$

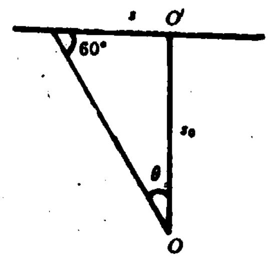


图 1—8

四、计算题

1. 一路灯距地面的高度为 H,一人(P) 身高为 h,在灯下以匀速率 v 行走,如图 1—9 所示. 求他的头在地上的影子 M 点沿地面移动的速率 v_M 和加速度大小 a_M.

选题目的:如何从速度、加速度的定义求“质点”速度与加速度的方法.

解:以地面为参考系,建立如图 1—9 所示坐标系 O—XY,则依几何关系得:

$$\frac{H}{h} = \frac{x_M}{x_M - x_P},\quad \left(\frac{H}{h} - 1\right)x_M = \frac{H}{h}x_P.$$

而　$v_人 = \frac{\mathrm{d}x_P}{\mathrm{d}t},\quad v_M = \frac{\mathrm{d}x_M}{\mathrm{d}t}$.

则有　$(\frac{H}{h} - 1)v_M = \frac{H}{h}v_人$,

$$v_M = \frac{H}{H - h}v_人 = \frac{H}{H - h}v.$$

$$(\frac{H}{h} - 1)a_M = \frac{H}{h}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},\quad a_M = 0.$$

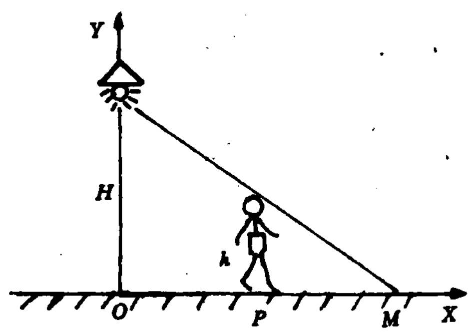


图 1—9

讨论:此题关键在于找出人足与人头影位置的几何关系.

2. 一支气枪竖直向上发射子弹,子弹出膛速度为 $50\mathrm{m\cdot s^{-1}}$,若连续发射两粒子弹的时间间隔为 4s. 求二粒子弹在空中相遇点到枪口的距离.

选题目的:利用已知加速度(或速度) 求运动方程的标准方法.

解:以地面为参照系,建立一维坐标系 O—X,原点设在枪口处,并以第一粒子弹出膛时为零点,则两粒子弹运动的初始条件分别为:

第一粒子弹$\begin{cases} x_1|_{t=0} = 0, \\ v_1|_{t=0} = 50(\mathrm{m \cdot s^{-1}}). \end{cases}$

第二粒子弹$\begin{cases} x_2|_{t=4s} = 0, \\ v_2|_{t=4s} = 50(\mathrm{m \cdot s^{-1}}). \end{cases}$

已知子弹出膛后相对地面的加速度为$a = -g = -10\mathrm{m \cdot s^{-1}}$,则在$t$时刻两粒子弹的速度分别为

$$v_1(t) = v_1|_{t=0} + \int_0^t a(t')\mathrm{d}t' = 50 + \int_0^t (-g)\mathrm{d}t' = 50 - 10t \qquad (t \geqslant 0).$$

$$v_2(t) = v_2|_{t=4} + \int_4^t a(t')\mathrm{d}t' = 50 - 9(t-4) = 90 - 10t \qquad (t \geqslant 4\mathrm{s}).$$

在t时刻两粒子弹的空间位置坐标分别为

$$x_1(t) = x_1|_{t=0} + \int_0^t v_1(t')\mathrm{d}t' = 0 + \int_0^t (50 - 10t')\mathrm{d}t' = 50t - 5t^2 \quad (t \geqslant 0).$$

$$x_2(t) = x_2|_{t=4} + \int_4^t v_2(t')\mathrm{d}t' = 0 + \int_4^t (90 - 10t')\mathrm{d}t' = 90t - 50t^2 - 280 \qquad (t \geqslant 4\mathrm{s}).$$

两粒子弹在空间相遇时($t = t_0$),两子弹的坐标必须相等,即$x_1(t_0) = x_2(t_0)$,

则 $\quad 50t_0 - 5t_0^2 = 90t_0 - 5t_0^2 - 280 \qquad (t \geqslant 4\mathrm{s})$,

得 $\quad t_0 = 7(\mathrm{s})$.

则相遇点离枪口的距离为

$$h = |x_1(t_0) - 0| = x_1(t_0) = 50 \times 7 - 5 \times 7^2 = 105(\mathrm{m}).$$

讨论:质点运动学问题分两类:一类是从已知运动规律或轨道方程按定义求质点的运动速度、加速度等;另一类问题是已知加速度(或速度)随时间的变化反过来求质点的运动方程或轨道方程.此题化为解决第二类问题的"标准方法".

3. 质点A以$v_{10} = 2\mathrm{m \cdot s^{-1}}$的初速作直线运动,加速度为$a$,10s后,质点$B$从同一点以初速$v_{20} = 12\mathrm{m \cdot s^{-1}}$开始向同一方向运动,加速度也为$a$.问要使质点$B$能赶上$A$,加速度$a$的最大值不能超过多少?

选题目的:已知初始条件求运动方程,再根据题中条件求加速度.

解:两质点的加速度(一维运动用代数量表示)都为a,两质点出发时间间隔为$\Delta t = 10\mathrm{s}$,以质点A出发时为计时原点($t = 0$),则有以下初始条件

$$\begin{cases} v_1|_{t=0} = v_{10} = 2\mathrm{m \cdot s^{-1}}, \\ x_1|_{t=0} = 0\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2|_{t=10s} = v_{20} = 12\mathrm{m \cdot s^{-1}}, \\ x_2|_{t=10s} = 0\,. \end{cases}$$

如同上题求解程序,可得两质点在t时刻的速度和位置坐标为

$$\begin{cases} v_1(t) = 2 + at, \\ x_1(t) = 2t + \dfrac{1}{2}at^2; \qquad (t \geqslant 0). \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2(t) = (12 - 10a) + at, \\ x_2(t) = (12 - 10a)t + \dfrac{1}{2}at^2 - (120 - 50a) \qquad (t \geqslant 10). \end{cases}$$

要求出a的最大值(即满足B能赶上A这个条件的最大值),就要求至少在某一时刻t_0($10 < t_0 \leqslant \infty$)时两质点的位置坐标相同,即

$$x_1(t_0) = x_2(t_0), \tag{1}$$

同时必须有 $v_2(t_0)\geqslant v_1(t_0)$. (2)

从(2)式我们可以得到

$$(12-10a)+at_0\geqslant 2+at_0.$$

则 $a\leqslant 1$.

所以 a 的最大取值为

$$a_{\max}=1(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}).$$

讨论：

(1) 对于 $a=a_{\max}=1(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})$：

$$\begin{cases}x_1(t)=2t+\dfrac{1}{2}t^2 & (t\geqslant 0),\\ x_2(t)=2t+\dfrac{1}{2}t^2-70 & (t\geqslant 10).\end{cases}$$

可以看出：$x_2(t)$ 总比 $x_1(t)$ 小，即 B 总赶不上 A.

(2) 对于 $a<1(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})$：

譬如 $a=(1-\varepsilon)$，ε 为一正的小量，我们看在什么时刻$(t_0)B$ 能赶上 A.

令 $x_2(t_0)=x_1(t_0)$，

则 $$(2+10\varepsilon)t_0+\frac{(1-\varepsilon)}{2}t_0^2-(70+50\varepsilon)=2t_0+\frac{(1-\varepsilon)}{2}t_0^2,$$

$$t_0=\frac{70+50\varepsilon}{10\varepsilon}=5+\frac{7}{\varepsilon}.$$

由此可以看出，当 ε 为有限小时$(a<1)$，t_0 为有限大，即我们总可以找到一个 t_0(有限大)，在 $t\geqslant t_0$ 时赶上和超过 A.

对于 $\varepsilon\to 0(\neq 0)$，$t_0\to\infty$ 时，则 B 在 $t\to\infty$ 时，还能赶上 A.

由以上分析，我们得出更为恰当的结论

$$a_{\max}=\lim_{\varepsilon\to 0}(1-\varepsilon)(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}).$$

[注] 这里我们不考虑相对约束，质点的速度可以大于真空中的光速 c.

4. 滑雪运动员在离开水平滑雪道腾空时的速度为 $v_0=90\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$，沿水平方向，着陆的斜坡与水平面夹角 $\theta=45°$(如图 1—10 所示)，

(1) 计算滑雪运动员着陆时沿斜坡的位移 L 是多大?

(2) 在实际的跳跃中滑雪运动员所能飞越过的斜面距离 l 不足 100m，这与理论结果相比如何?为什么?

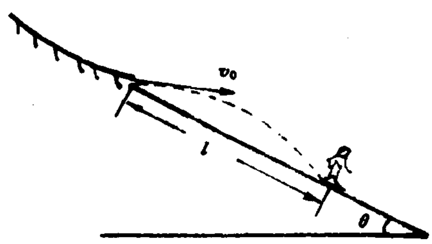


图 1—10

选题目的：对同一问题在确定的参照系中可选取不同的坐标系来解决.

解一：以地面为参照系，建立如图 1—11 所示的参照系，使 Y 轴垂直于地面，X 轴平行于地面，而原点设在运动员起飞点并以腾空之时作为记时原点$(t=0)$.

这样运动员运动的初始条件为

$$v_x|_{t=0}=v_0=90\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1},\qquad v_y|_{t=0}=0;$$

$$x|_{t=0}=0,\qquad y|_{t=0}=0.$$

运动员在飞行过程中的加速度为 $\boldsymbol{a}=-g\boldsymbol{j}$，沿 Y 轴负方向$(a_y=-g, a_x=0)$.

利用2题结果可得到在$t(>0)$时刻运动员的位置坐标为

$$\begin{cases}x(t)=v_0t,\\ y(t)=-\dfrac{1}{2}gt^2.\end{cases}$$

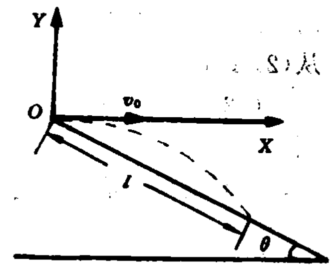


图 1—11

(1) 按题意，设着陆时刻 t_0，则运动员着陆点的坐标必须满足

$$\left|\frac{y(t_0)}{x(t_0)}\right|=\mathrm{tg}\theta,$$

即 $$\left|\frac{-\dfrac{1}{2}yt_0^2}{v_0(t_0)}\right|=\mathrm{tg}\theta.$$

$$t_0=\frac{2v_0\mathrm{tg}\theta}{g}.$$

则运动员飞越的距离为

$$l=\sqrt{[x(t_0)-0]^2+[y(t_0)-0]^2}=\sqrt{x^2(t_0)+y^2(t_0)}$$

$$=\sqrt{(v_0t_0)^2+(\frac{1}{2}gt_0^2)^2}=\frac{2v_0^2\mathrm{tg}\theta}{g\cos\theta}\approx 180(\mathrm{m}).$$

(2) 实际上，在飞行过程中，由于空气阻力的作用，运动员的加速度还与其速度等量有关，很复杂，但总的影响是使运动员的飞行速度要比理想情况小，所以飞越的距离要小得多.

解二：仍选地面为参照系，但选择如图1—12所示的平面直角坐标系. 原点仍设在起跳处，并以起跳之时作为记时原点.

则有如下初始条件：

$$\begin{cases}v_x|_{t=0}=v_0\cos\theta,\\ v_y|_{t=0}=v_0\sin\theta;\end{cases}\qquad \begin{cases}x|_{t=0}=0,\\ y|_{t=0}=0.\end{cases}$$

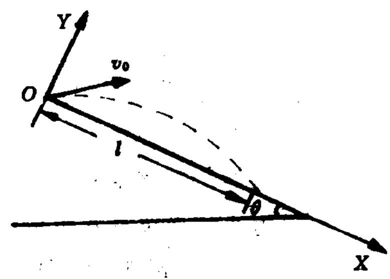


图 1—12

运动员在飞过程的加速度为：

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}=(g\sin\theta\boldsymbol{i}-g\cos\theta\boldsymbol{j}),$$

即 $$\begin{cases}a_x=g\sin\theta,\\ a_y=-g\cos\theta.\end{cases}$$

则在 $t(t>0)$ 时刻，运动员的位置坐标为 $$\begin{cases}x(t)=v_0\cos\theta_t+\dfrac{1}{2}g\sin\theta_{t^2},\\ y(t)=v_0\sin\theta_t-\dfrac{1}{2}g\cos\theta_{t^2}.\end{cases}$$

依题意，运动员着陆点时($t=t_0$ 时刻)，必须满足

$$y(t_0)=0\qquad(t_0>0).$$

则 $$y_0\sin\theta t_0-\frac{1}{2}g\cos\theta t_0=0,$$

$$t_0=\frac{2v_0\mathrm{tg}\theta}{g}.$$

沿斜面飞行的距离为：

$$l=|x(t_0)-0|=x(t_0)=v_0\cos\theta t_0+\frac{1}{2}gt_0^2=\frac{2v_0^2\mathrm{tg}\theta}{g\cos\theta}.$$

讨论：通过上述分析讨论，可以看出，在运动学问题中，当参照系选定后，坐标系还可以任

意选择，所得结果完全一样.

5. 已知一质点沿圆周以 $v = 50\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ 匀速率运动，其速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 的方向在 2s 之内改变了 $\Delta\theta = 30°$，求质点运动的法向加速度.

选题目的：圆周运动描述的线量与角量的关系，以及圆运动问题的解法.

解：在质点运动过程中，速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 总是沿轨道切线方向，且总是垂直于质点的位置矢量 $\boldsymbol{r}$（如图 1—13 所示）. 这样，在相同的时间内 $\boldsymbol{v}$ 的方向改变量与 $\boldsymbol{r}$ 的方向改变量相同，由此我们可以根据已知条件给出质点圆运动中的角速度的大小.

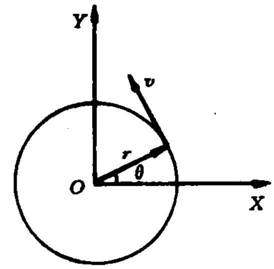


图 1—13

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\pi}{12}(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}),$$

则质点运动的法向加速度为

$$a_n = \frac{v^2}{R} = v\cdot\omega = 0.13(\text{m}\cdot\text{s}^{-2}).$$

6. 一质点沿半径为 R 的圆周按规律 $s = v_0 t - \frac{1}{2}bt^2$ 运动，其中 v_0、b 都是常数，求：(1) t 时刻质点的加速度；(2) t 为何值时加速度在数值上等于 b；(3) 此时质点沿圆周走了多少圈？

选题目的：同上题.

解：按照题中所给质点的运动规律，可得到质点在 t 时刻的速率

$$v(t) = \frac{\text{d}s}{\text{d}t} = v_0 - bt.$$

(1) t 时刻质点的加速度为

$$\begin{cases} a_t = \dfrac{\text{d}v}{\text{d}t} = -b, \\ a_n = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{(v_0 - bt)^2}{R}. \end{cases}$$

而 $$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(-b)^2 + \frac{(v_0 - bt)^2}{R^2}} = \frac{\sqrt{b^2R^2 + (v_0 - bt)^2}}{R}.$$

其方向与切向加速度的夹角为

$$\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{a_n}{a_t}\right) = \text{tg}^{-1}\left[\frac{(v_0 - bt)^2}{-bR}\right].$$

(2) 设 $t = t_0$ 时，$a(t_0) = b$，

则 $$\frac{\sqrt{b^2R^2 + (v_0 - bt_0)^2}}{R} = b,$$

得 $$t_0 = \frac{v_0}{b_0}.$$

(3) 此时 $(t = t_0)$，质点已转过的圈数为

$$n = \frac{s(t_0)}{2\pi R} = \frac{v_0 t_0 - \frac{1}{2}bt_0^2}{2\pi R} = \frac{v_0^2}{4\pi Rb}.$$

7. 一艘船以速率 u 驶向码头，另一艘船以速率 v 自码头离去（如图 1—14），试证当两船的距离最短时，两船与码头的距离之比为：

$(v + u\cos\alpha) : (u + v\cos\alpha)$（设航路均为直线，$\alpha$ 为两直线的夹角）.

证：设任一时刻船与码头的距离为 x、y，两船的距离为 l，则有

$$l^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha.$$

对 t 求导，得

$$2l\frac{dl}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} - 2(\cos\alpha)x\frac{dy}{dt} - 2(\cos\alpha)y\frac{dx}{dt}.$$

将 $\frac{dx}{dt} = -u, \frac{dy}{dt} = v$ 代入上式得

$$2l\frac{dl}{dt} = -2xu + 2yv - 2(\cos\alpha)xv + 2(\cos\alpha)yu.$$

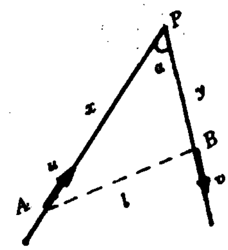


图 1—14

利用求极值的条件 $\frac{dl}{dt} = 0$ 得

$$0 = -ux + vy - vx\cos\alpha + uy\cos\alpha$$
$$= -x(u + v\cos\alpha) + y(v + u\cos\alpha).$$

由此可得

$$\frac{x}{y} = \frac{v + u\cos\alpha}{u + v\cos\alpha}.$$

即当两船的距离最短时，两般与码头的距离之比为

$$(v + u\cos\alpha) : (u + v\cos\alpha).$$

五、常见错误的分析

1. 如图 1—15 所示，质点作曲线运动，质点的加速度 $\boldsymbol{a}$ 是恒矢量($\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_3$)，问质点是否能作匀变速率运动？试判断下面的回答是否正确，并简述理由.

答：由于质点的加速度为恒矢量，根据速度与加速度的关系知，速度一定是均匀变化的. 速度的大小为速率，速度均匀变化，速率也均匀变化，因此质点作匀变速率运动.

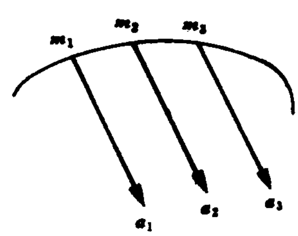


图 1—15

分析：上述回答是错误的. 这是因为速率虽然是速度的大小，但速度是一个矢量，速度均匀变化，速率并不一定也是均匀变化的. 实际上，质点若作匀变速率运动，其切向加速度大小 a_t 必为常数，即 $a_{1t} = a_{2t} = a_{3t}$，现在虽然 $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_3$，但由于总加速度与轨道各处的切线间夹角不同，使得总加速度在各处切线方向的投影并不相等，即 $a_{1t} \neq a_{2t} \neq a_{3t}$，故该质点不作匀变速率运动.

2. 已知质点的加速度 $\boldsymbol{a} = [4\boldsymbol{i} - 24t^2\boldsymbol{j}]\mathrm{m \cdot s^{-2}}$，初始条件为：$t = 0$ 时，$\boldsymbol{r}_0 = 0, \boldsymbol{v}_0 = 5\boldsymbol{i}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. 有一同学采用下述方法求出了运动方程，试判断该解法是否正确. 若不正确，请给出正确的解法.

解：根据 $a = \frac{dv}{dt}$ 得

$$v = v_0 + \int_0^t a\,dt = 5 + \int_0^t (4 - 24t^2)dt = 5 + 4t - 8t^2.$$

由 $v = \frac{dr}{dt}$ 得

$$r = r_0 + \int_0^t v\,dt = 0 + \int_0^t (5 + 4t - 8t^3)dt = 5t + 2t^2 - 2t^4$$

则质点的运动方程为 $r = 2t^2 - 2t^4 + 5t(\mathrm{m})$.

分析：上述解法是错误的. 发生上述错误的原因是没有正确地理解位移、速度、加速度的矢量性及其矢量关系，没有掌握求解矢量（方式）的一般方法. 正确解法如下：

解一：利用分量法.

加速度 $\boldsymbol{a}$ 在 x、y 轴上的分量的大小分别为

$$a_x = 4 \text{ 和 } a_y = -24t^2.$$

由 $a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 4$ 和 $a_y = \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -24t^2$ 得

$$v_x = v_{x0} + \int_0^t 4\mathrm{d}t = v_{x0} + 4t,$$

$$v_y = v_{y0} + \int_0^t (-24t^2)\mathrm{d}t = v_{y0} - 8t^3.$$

将初始条件 $\boldsymbol{v}|_{t=0} = 5\boldsymbol{i}$ 代入上述两式可得

$$v_x = 5 + 4t, \qquad v_y = -8t^3.$$

再由 $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$\quad v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 得

$$x = x_0 + \int_0^t v_x\mathrm{d}t = x_0 + \int_0^t (5 + 4t)\mathrm{d}t = x_0 + 5t + 2t^2,$$

$$y = y_0 + \int_0^t v_y\mathrm{d}t = y_0 + \int_0^t (-8t^3)\mathrm{d}t = y_0 - 2t^4.$$

利用初始条件 $\boldsymbol{r}_0|_{t=0} = 0$ 得 $x_0 = y_0 = 0$.

因此质点运动方程的分量形式为

$$\begin{cases} x = 5t + 2t^2(\mathrm{m}), \\ y = -2t^4(\mathrm{m}). \end{cases}$$

写成矢量形式为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = (5t + 2t^2)\boldsymbol{i} - 2t^4\boldsymbol{j}(\mathrm{m}).$$

解二：直接求解矢量方程

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\mathrm{d}t = (4\boldsymbol{i} - 24t^2\boldsymbol{j})\mathrm{d}t,$$

上式两边对 t 积分得

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0 = \int_0^t (4\boldsymbol{i} - 24t\boldsymbol{j})\mathrm{d}t,$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + 4t\boldsymbol{i} - 8\mathrm{t}^3\boldsymbol{j}.$$

代入初始条件 $\boldsymbol{v}|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0 = 5\boldsymbol{i}$ 得

$$\boldsymbol{v} = (5 + 4t)\boldsymbol{i} - 8\mathrm{t}^3\boldsymbol{j}.$$

由 $\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t.$$

两边积分得

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = \int_0^t [(5 + 4t)\boldsymbol{i} - 8t^3\boldsymbol{j}]\mathrm{d}t,$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + (5t + 2t^2)\boldsymbol{i} - 2t^4\boldsymbol{j}.$$

代入初始条件 $\boldsymbol{r}|_{t=0} = \boldsymbol{r}_0 = 0$ 后得质点的运动方程

$$\boldsymbol{r} = (2t^2 + 5t)\boldsymbol{i} - 2t^4\boldsymbol{j}(\mathrm{m}).$$

注意：求解有关矢量的问题时，一般先求分量，但对某些简单的问题也可直接根据矢量关系式求解.

六、习题

1. 一质点在 xy 平面内运动，运动方程为 $x = 2t(\mathrm{m})$， $y = (19 - 2t^2)(\mathrm{m})$.