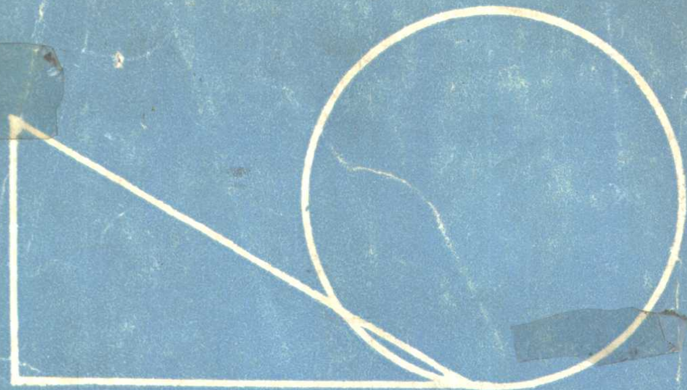

高等数学习题解答

（上册）

王承中 主编

李玉亚 刘俊英 杜文思
戚兆德 周凤树 陈义元 编写

吉林工学院高等教育研究室

责任编辑　吕耀春

高等数学习题解答

出　　版　吉林工学院《高等教育研究》编辑部
印　　刷　长春市第五印刷厂
发　　行　吉林工学院高等教育研究室

吉林省内部报刊准印证第 039 号
(内部发行)
定价（上、下册）5.70

前　　言

由中央广播电视大学编辑出版的《高等数学习题集》（理工版），内容丰富，选题新颖，并配有部分难度较大的习题，是目前国内已出版的习题集中较理想的一种。它包括函数、极限、连续、一元微积分、矢量代数、空间解析几何、多元微积分、场论、级数和微分方程等，共2511个习题。为满足我院广大师生及社会各方面读者的需要，我们将习题集中的全部习题做了详尽解答，汇编成《高等数学习题解答》。它可供广播电视大学、职工业余大学读者使用，也可供普通工科院校师生以及志在报考研究生的读者使用。

参加题解编写工作的有：李玉亚、刘俊英、杜文思、周凤树、戚兆德、陈义元、王承中。并由主编王承中进行统改定稿。

在编写过程中我们纠正了原习题集中印刷上的错误，对部分与原书所附答案不一致的习题解，进行了反复推敲，还对个别习题做了改动。

由于编写时间仓促和我们水平有限，解答中一定会有错误之处，诚恳地希望读者批评指正。

在本书编写出版过程中，我们得到了吉林工学院高教研究室、长春市第五印刷厂的大力支持，在此深表谢意。

编　　者

一九八五年一月

目　　录

目　　录

第一章　函数及其图形

预　备　知　识

1.1　对照写出等价的不等式与区间：

如　（1）$|x|<3$　$\Longleftrightarrow$　$2°$　$-3<x<3$

（1）$\lvert x\rvert<3$	$1°$　$4<x<6$
（2）$\lvert x-1\rvert<3$	$2°$　$-3<x<3$
（3）$\lvert 3-2x\rvert<1$	$3°$　$x>3$ 或 $x<-1$
（4）$\lvert 1+2x\rvert\leqslant 1$	$4°$　$x>2$
（5）$\lvert x-1\rvert>2$	$5°$　$-2<x<4$
（6）$\lvert x+2\rvert\geqslant 5$	$6°$　$-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1$ 或 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$
（7）$\lvert 5-x^{-1}\rvert<1$	$7°$　$1<x<2$
（8）$\lvert x-5\rvert<\lvert x+1\rvert$	$8°$　$x\leqslant -7$ 或 $x\geqslant 3$
（9）$\lvert x^2-2\rvert\leqslant 1$	$9°$　$\frac{1}{6}<x<\frac{1}{4}$
（10）$x<x^2-12<4x$	$10°$　$-1\leqslant x\leqslant 0$

解：（1）$\Longleftrightarrow 2°$；（2）$\Longleftrightarrow 5°$；（3）$\Longleftrightarrow 7°$；（4）$\Longleftrightarrow 10°$；（5）$\Longleftrightarrow 3°$；（6）$\Longleftrightarrow 8°$；（7）$\Longleftrightarrow 9°$；（8）$\Longleftrightarrow 4°$；（9）$\Longleftrightarrow 6°$；（10）$\Longleftrightarrow 1°$；

1.2　试讨论下述命题的真伪，并申明理由：

（1）$x<5$ 就是 $|x|<5$

解：此命题不真。因为 $|x|<5$ 与 $-5<x<5$ 等价，故与 $x<5$ 不等价。

（2）$|x-5|<2$ 就是 $3<x<7$

解：此命题真。因为 $|x-5|<2$ 即 $-2<x-5<2$，所以 $3<x<7$，

（3）$|1+3x|\leqslant 1$ 即 $x\geqslant -\frac{2}{3}$

63/15-03

解：此命题不真。因为 $-1\leqslant 1+3x\leqslant 1$ 与 $-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 0$ 等价，故 x 不能大于零，而 $x\geqslant -\frac{2}{3}$ 允许 x 大于零。

（4）不存在实数 x，使得 $|x-1|=|x-2|$。

解：此命题不真。由$(x-1)^2=(x-2)^2$得$x=\frac{3}{2}$。所以存在实数$\frac{3}{2}$能使等$|x-1|=|x-2|$成立。

1.3 求下列不等式的公共部分，并在数轴上表示出来。

（1）$-11\leqslant x\leqslant 8$ 或 $-6\leqslant x<11$。 **解**：公共部分为 $-6\leqslant x\leqslant 8$。

（2）$-8\leqslant x<6$ 或 $-4<x\leqslant 2$。 **解**：公共部分为 $-4<x\leqslant 2$。

1.4证明下列各式：

（1）$|-x|=|x|$。

证：由绝对值定义

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}\qquad |-x|=\begin{cases}-(-x)=x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

可知，$|x|=|-x|$。

（2）$|x-y|=|y-x|$。

证：由1.4（1）知，$|x-y|=|-(y-x)|=|y-x|$。

（3）$|x|=\sqrt{x^2}$。

证：因为$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}\qquad \sqrt{x^2}=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$

所以，$|x|=\sqrt{x^2}$

（4）$|x/y|=|x|/|y|$ $(y\neq 0)$。

证：由除法法则及绝对值定义，有

$$\left|\frac{x}{y}\right|=\begin{cases}\frac{x}{y}, & x\cdot y>0,\\ 0, & x=0,\\ -\frac{x}{y}, & x\cdot y<0;\end{cases}\qquad \frac{|x|}{|y|}=\begin{cases}\frac{x}{y}, & x>0,\ y>0\\ \frac{-x}{-y}=\frac{x}{y}, & x<0,\ y<0\\ 0, & x=0\\ \frac{x}{-y}=-\frac{x}{y}, & x>0,\ y<0,\\ \frac{-x}{y}=-\frac{x}{y}, & x<0,\ y>0.\end{cases}$$

综合上述，有$|x/y|=|x|/|y|$。

（5）$|x+y|\leqslant|x|+|y|$

证：由绝对值的意义，有

$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$， $-|y|\leqslant y\leqslant|y|$， 式相加得

$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant|x|+|y|$，

即 $|x+y|\leqslant|x|+|y|$。

*（6）$|x|-|y|\leqslant\big||x|-|y|\big|\leqslant|x-y|\leqslant|x|+|y|$

证：将$|x|-|y|$看做是一个数，第一个绝对值不等式 $|x|-|y|\leqslant\big||x|-|y|\big|$显

然成立。不论 x，y 是什么实数，都有 $|x||y|\geqslant xy$，$|x|^2=x^2$，$|y|^2=y^2$．

不等式两端同乘 -2，得 $-2|x||y|\leqslant -2xy$，

$|x|^2-2|x||y|+|y|^2\leqslant x^2-2xy+y^2$，　$(|x|-|y|)^2\leqslant (x-y)^2$，

$\sqrt{(|x|-|y|)^2}\leqslant \sqrt{(x-y)^2}$，　$\therefore$ $||x|-|y||\leqslant |x-y|$，

再证第三个不等式。$\because -|x|\leqslant x\leqslant |x|$，　$-|y|\leqslant -y\leqslant |y|$，

二不等式相加得 $-(|x|+|y|)\leqslant x-y\leqslant |x|+|y|$．

$\therefore$ $|x-y|\leqslant |x|+|y|$．

综上所述，有 $|x|-|y|\leqslant ||x|-|y||\leqslant |x-y|\leqslant |x|+|y|$．

（7）已知 a，b，m 为正数，且 $a<b$ 则 $\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$

证： 将 $b>a$ 两端同乘以正数 m，同时加上 ab 得

$ab+bm>ab+am$，　$b(a+m)>a(b+m)$．

因 b，$b+m$ 都是正数，用 $b(b+m)$ 同除不等式两端得 $\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$．

（8）若 $a>0$，$b>0$，则 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$

证： $\because$ a，b 都是正数，故有 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$，$a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b\geqslant 0$，

$\therefore$ $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$．

（9）$x>0$，则 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$ 当且仅当 $x=1$ 时，等式成立

证： 因 x 为正数，显然有 $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\geqslant 0$，$x-2\sqrt{x}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}\geqslant 0$，

所以 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$ 当且仅当 $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ 时等号才成立，即当且仅当 $x=1$ 时，等号成立。

（10）$|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$

证： 用数学为归纳法证明之。当 $n=2$ 时，显然有 $|x_1+x_2|\leqslant |x_1|+|x_2|$

设当 $n=k-1$ 时不等式成立，证明 $n=k$ 时不等式亦成立。先证n=1时不等式成立

$|x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}|\leqslant |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_{k-1}|$

$|(x_1+x_2+\cdots+x_{k-1})+x_k|\leqslant |x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}|+|x_k|$

$\leqslant |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_{k-1}|+|x_k|$

所以 $|x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n|\leqslant |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$．

1.5 解不等式

（1）$-2<\dfrac{1}{x+2}<2$

解： 由题设知 $\left|\dfrac{1}{x+2}\right|<2$，$|x+2|>\dfrac{1}{2}$

假定 $x+2>0$， 则 $x+2>\frac{1}{2}$ 有 $x>-\frac{3}{2}$

假定 $x+2<0$， 则 $-(x+2)>\frac{1}{2}$ $x+2<-\frac{1}{2}$， 有 $x<-\frac{5}{2}$

所以解为：$x<-\frac{5}{2}$ 或 $x>-\frac{3}{2}$

（2） $\left|\frac{x-2}{x+1}\right|>\frac{x-2}{x+1}$

解：当 $\frac{x-2}{x+1}>0$ 时，有 $\left|\frac{x-2}{x+1}\right|=\frac{x-2}{x+1}$，$\frac{x-2}{x+1}>\frac{x-2}{x+1}$，**这是不可能的。**

当 $\frac{x-2}{x+1}<0$ 时，$\left|\frac{x-2}{x+1}\right|=-\frac{x-2}{x+1}$ 不等式为 $-\frac{x-2}{x+1}>\frac{x-2}{x+1}$

即 $\frac{x-2}{x+1}<0$ 因此，$\begin{cases}x-2>0\\x+1<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-2<0\\x+1>0\end{cases}$

即 或 $\begin{cases}x>2\\x<-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<2\\x>-1\end{cases}$

∵第一个不等式组无解，∴原不等式之解为：$-1<x<2$

（3）$|x-A|<\varepsilon$ （$\varepsilon>0$ 为常数）

解：由绝对值不等式知

$-\varepsilon<x-A<\varepsilon$ ， 从而解得 $A-\varepsilon<x<A+\varepsilon$

（4） $\frac{2(x+1)(x-2)}{3x-1}>0$

解：当 $x=-1$，$x=2$ 时，题给分式的值是0，当 $x=\frac{1}{3}$ 时，题给分式失去意义。我们以这三个数 -1，$\frac{1}{3}$，2 为界把全体实数划分成4个部分，列成下表来考察：

	$x<-1$	$-1<x<\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}<x<2$	$x>2$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$3x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{2(x+1)(x-2)}{3x-1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

由表可看出，**原不等式的解是** $-1<x<\frac{1}{3}$ **或** $x>2$

1.6 解高次不等式

（1） $|x^2-3x+2|\geqslant x^2-3x+2$

解：由绝对值性质知，x为一切实数时，不等式皆真。不等式的解为 $-\infty < x < \infty$

（2）$x^2-7x+12>0$　　解：$(x-3)(x-4)>0$

由 $\begin{cases} x-3>0 \\ x-4>0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x>4 \end{cases} \Longrightarrow x>4$ 或 $\begin{cases} x-3<0 \\ x-4<0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x<4 \end{cases} \Longrightarrow x<3$

即不等式的解是 $x<3$ 或 $x>4$

（3）$|x(1-x)| \leqslant 0.5$

解：可将不等式写成 $|x(x-1)| \leqslant \frac{1}{2}$　　$-\frac{1}{2} \leqslant x^2-x \leqslant \frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2} \leqslant \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2} \qquad -\frac{1}{4} \leqslant \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{3}{4}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{3}{4} \qquad \left|x-\frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant x-\frac{1}{2} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{1-\sqrt{3}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

故不等式解为 $\frac{1-\sqrt{3}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

（4）$-2x^2+4x-7>0$

解：$2x^2-4x+7<0$　　$x^2-2x+1+\frac{5}{2}<0$　　$(x-1)^2+\frac{5}{2}<0$

不等式左端恒大于0，故不等式无解。

（5）$x^3+x^2-30x<0$　　解：$x(x+6)(x-5)<0$

	$x<-6$	$-6<x<0$	$0<x<5$	$x>5$
x	−	−	+	+
$x+6$	−	+	+	+
$x-5$	−	−	−	+
$x(x+6)(x-5)$	−	+	−	+

不等式的解为 $x<-6$ 或 $0<x<5$

1.7 解不等式组

（1）$\begin{cases} x-2(x-3)>4 \\ \frac{x}{2}-(x-3)>\frac{1}{4} \end{cases}$

解：$\begin{cases} x-2x+6>4 \\ x-2x+6>\frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x<5\frac{1}{2} \end{cases}$　不等式组的解为 $x<2$

（2）$\begin{cases} x+5 \leqslant (x+1)(x+2) \\ x(x+1)+x(x+2)>(2x-1)(x+3) \end{cases}$

解：$\begin{cases} x^2+2x-3 \geqslant 0 \\ 2x<3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-1) \geqslant 0 \\ 2x<3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \text{ 或 } x \leqslant -3 \\ x<3/2 \end{cases}$

不等式组的解为 $x \leqslant -3$ 或 $1 \leqslant x < \frac{3}{2}$

求 函 数 值

1.8 已知函数 $f(x)=x+1$ 求：$f(2)$，$f(-2)$，$-f(2)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$\frac{1}{f(2)}$，$f(a+b)$。

解： $f(2)=2+1=3$　　$f(-2)=-2+1=-1$

$-f(2)=-(2+1)=-3$　　$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+1=1\frac{1}{2}$

$\frac{1}{f(2)}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$　　$f(a+b)=a+b+1$

1.9 设 $\varphi(t)=|t-3|+|t-1|$ 求：$\varphi(0)$，$\varphi(1)$，$\varphi(-1)$，$\varphi(-2)$。

解： $\varphi(0)=|0-3|+|0-1|=3+1=4$；

$\varphi(1)=|1-3|+|1-1|=|-2|+0=2$；

$\varphi(-1)=|-1-3|+|-1-1|=4+2=6$；

$\varphi(-2)=|-2-3|+|-2-1|=5+3=8$。

1.10 求 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 设：

(1) $f(x)=ax+b$

解： $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{a(x+h)+b-ax-b}{h}=a$

(2) $f(x)=x^2+4x+1$

解： $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2+4(x+h)+1-x^2-4x-1}{h}$

$=\frac{x^2+2xh+h^2+4x+4h+1-x^2-4x-1}{h}=2x+4+h$

(3) $f(x)=\frac{1}{x}$

解： $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\frac{x-x-h}{h(x+h)x}=\frac{-1}{x(x+h)}$

1.11 已知 $G(u)=3$ 求 $G(0)$，$G(u+\Delta u)-G(u)$。

解： $G(0)=3$，　$G(u+\Delta u)-G(u)=3-3=0$。

1.12 设 $\Psi(x)=e^x-1$，求 $\Psi(0)$，$\Psi(\varepsilon)$，$\Psi(\ln 2)$。

解： $\Psi(0)=e^0-1=1-1=0$　　$\Psi(\varepsilon)=e^\varepsilon-1$

$\Psi(\ln 2)=e^{\ln 2}-1=2-1=1$

1.13 设 $f(x)=\lg x^2$，求 $f(10^3)$，$f(-0.001)$。

解： $f(10^3)=\lg(10^3)^2=\lg 10^6=6$

$f(-0.001)=\lg(-0.001)^2=\lg(0.000001)=-6$

1.14 设 $\varphi(x)=\frac{1-x}{1+x}$，求$\varphi(-x)$，$\varphi(x)+1$，$\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$，$\frac{1}{\varphi(x)}$。

解：$\varphi(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x}$ $\qquad \varphi(x)+1=\frac{1-x}{1+x}+1=\frac{2}{1+x}$

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{x-1}{x+1} \qquad \frac{1}{\varphi(x)}=\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1+x}{1-x}$$

1.15 设$f(t)=\begin{cases}\sin t & -2<t<0\\ 1+t^2 & 0\leqslant t<2\end{cases}$ 求$f(1)$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，$f(4)$

解：$f(1)=1+1^2=2$ $\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=1+\frac{\pi^2}{4}$

$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ 当 $t=4$时，$f(t)$设有定义。

1.16 若 $G(x)=\begin{cases}|x| & |x|<1\\ 0 & |x|\geqslant 1\end{cases}$ 求$G(-1)$，$G(5)$，$G\left(-\frac{1}{4}\right)$

解：$G(-1)=0$ $\qquad G\left(\frac{1}{2}\right)=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ $\qquad G(5)=0$

$G\left(-\frac{1}{4}\right)=\left|-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$

1.17 设

$$y=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

（该函数称为符号函数，记为 sgnx），求 $y(0)$，$y(-2)$，$y(100)$。

解：$y(0)=0$ $\qquad y(-2)=-1$ $\qquad y(100)=1$

1.18 已知（1）$f(x)=ax$ $(a\neq 0)$，（2）$f(x)=\frac{1}{x}$，

（3）$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ 且 $f(x)+f(y)=f(z)$，求z

解：（1）$f(z)=f(x)+f(y)=ax+ay=az$ $\qquad z=x+y$

（2）$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ $\qquad z=\frac{xy}{x+y}$

（3）$f(z)=\ln\frac{1+z}{1-z}=\ln\frac{1+x}{1-x}+\ln\frac{1+y}{1-y}=\ln\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}$

$$\frac{1+z}{1-z}=\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}$$

$$(1-x)(1-y)+z(1-x)(1-y)=(1+x)(1+y)-z(1+x)(1+y)$$

$$z=\frac{(1+x)(1+y)-(1-x)(1-y)}{(1-x)(1-y)+(1+x)(1+y)}=\frac{x+y}{1+xy}$$

1.19 设$f(u)=\lg u$ 求证：

（1）$f(u)+f(u+1)=f[u(u+1)]$

证：$f(u)+f(u+1)=\lg u+\lg(u+1)=\lg[u(u+1)]=f[u(u+1)]$

（2）$f(x)-f(y)=f(x/y)$

证：$f(x)-f(y)=\lg x-\lg y=\lg(x/y)=f(x/y)$

1.20 设 $\varphi(x)=e^x$，求证：$\varphi(x)\varphi(y)=\varphi(x+y)$ $\varphi(x)/\varphi(y)=\varphi(x-y)$

证：$\varphi(x)\cdot\varphi(y)=e^x\cdot e^y=e^{x+y}=\varphi(x+y)$

$\varphi(x)/\varphi(y)=e^x/e^y=e^{x-y}=\varphi(x-y)$

1.21 设$f(t)=t^2-2\cos t$，求证：$f(-a)=f(a)$

证：$f(-a)=(-t)^2-2\cos(-t)=t^2-2\cos t=f(a)$

1.22 设$f(x)=2x-\sin x$ 求证：$f(-t)=-f(t)$

证：$f(-t)=2(-t)-\sin(-t)=-2t+\sin t=-f(t)$

1.23 设 $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$ $(a>0)$ 求证：$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$

证：$f(x+y)+f(x-y)=\frac{1}{2}\left[a^{x+y}+a^{-(x+y)}\right]+\frac{1}{2}\left[a^{x-y}+a^{-(x-y)}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[a^x\cdot a^y+a^{-x}a^{-y}+a^xa^{-y}+a^{-x}a^y\right]=\frac{1}{2}\left[(a^x+a^{-x})a^y+(a^x+a^{-x})a^{-y}\right]$

$=\frac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)\left(a^y+a^{-y}\right)=2f(x)f(y)$

1.24 设 $f(x)=ax+b$ 且有 $f(0)=-2$，$f(3)=5$ 求$f(2)$。

解：$f(0)=b=-2$，$f(3)=3a-2=5$ ， $a=\frac{7}{3}$

$f(x)=\frac{7}{3}x-2$ ， $f(2)=\frac{7}{3}\times 2-2=\frac{8}{3}$

1.25 设 $f(x)=ax^2+bx+c$，且 $f(-2)=0$，$f(0)=1$，$f(1)=5$，

求$f(-1)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$。

解：$f(-2)=4a-2b+c=0$ $f(0)=c=1$ $f(1)=a+b+c=5$

解方程组，得 $a=\frac{7}{6}$， $b=\frac{17}{6}$， $c=1$ $f(x)=\frac{7}{6}x^2+\frac{17}{6}x+1$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{17}{6}\times\frac{1}{2}+1=\frac{65}{24}$$

$$f(-1)=\frac{7}{6}(-1)^2+\frac{17}{6}(-1)+1=-\frac{2}{3}$$

1.26 （1）设 $f(n)=\frac{2^{n-1}-1}{2^n}$求 $f(2)$，$f(5)$

解：$f(2)=\frac{2^{2-1}-1}{2^2}=\frac{2-1}{4}=\frac{1}{4}$ ， $f(5)=\frac{2^4-1}{2^5}=\frac{15}{32}$。

（2）若$u_n=\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ （$n\geqslant 2$）求 u_4，u_8，u_{11}。

解：$u_4=\dfrac{(-1)^4\sqrt{4}}{4-1}=\dfrac{2}{3}$　　$u_8=\dfrac{(-1)^8\sqrt{8}}{8-1}=\dfrac{2}{7}\sqrt{2}$

$u_{11}=\dfrac{(-1)^{11}\sqrt{11}}{11-1}=-\dfrac{\sqrt{11}}{10}$

（3）若 $y=\dfrac{n-2}{n^2+1}$ 求$y(2)$，$y(5)$。

解：$y(2)=\dfrac{2-2}{2^2+1}=0$　　$y(5)=\dfrac{5-2}{5^2+1}=\dfrac{3}{26}$

1.27（1）已知数列1，-1，1，-1，…，试求$f(n)$的表达式

解：$f(n)=(-1)^{n+1}$，　$n=1, 2, \cdots$

（2）已知数列$\dfrac{1}{1\cdot 2}$，$\dfrac{1}{2\cdot 3}$，$\dfrac{1}{3\cdot 4}$，…试求$f(n)$的表达式。

解：$f(n)=\dfrac{1}{n(n+1)}$，$n=1, 2\cdots\cdots$

1.28 求下列函数的值域：

（1）$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ （$0\leqslant x<1$）　　解：　值域为 $1\leqslant f(x)<+\infty$

（2）$y=\ln(1-x)$　（$x\leqslant 0$）

解：$x=0$时　$\ln(1-x)=0$　　故值域为　$0\leqslant y<+\infty$

（3）$\varphi(x)=5^x$　　（$-\infty<x<+\infty$）　　解：值域为　$0<\varphi(x)<+\infty$

（4）$y=\sqrt{x-x^2}$　　解：函数的最小值是0。下面求被开方式　$x-x^2$的最大值

$$x-x^2=\frac{1}{4}-x^2+x-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

当$x=\dfrac{1}{2}$时$x-x^2$有最大值$\dfrac{1}{4}$，故函数的值域为　$0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$

（5）　$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+5x+6}}$

解：$\because x^2+5x+6\to+\infty(x\to\infty)$，并且有两个零点。$\therefore y$ 的值域是 $0<y<+\infty$

1.29 函数 $f(x)$ 满足什么条件，以下各式才有意义：

（1）　$y=\sqrt[n]{f(x)}$　（n为正整数）　　解：当n为偶数时，$f(x)\geqslant 0$，函数才有意义。n为奇数时，对$-\infty<f(x)<\infty$函数都有意义

（2）$\varphi(x)=\log_a f(x)$ （$a>0$）　　解：$f(x)>0$时函数才有意义。

函 数 定 义 域

1.30 求下列各函数的定义域，并表示在数轴上：

（1）$y=x^3-3x+2$　　解：定义域为$-\infty<x<+\infty$

（2） $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

解：∵ $x^2+1>0$， ∴定义域为 $-\infty<x<+\infty$

（3） $F(u)=\dfrac{|u|}{u}$

解：∵分母不能是0 ∴定义域为 $-\infty<u<0$，$0<u<+\infty$。

（4） $g(t)=\dfrac{2t-1}{t^2-3t+2}$

解：$t^2-3t+2\neq0$ $(t-2)(t-1)\neq0$ $t\neq2$ $t\neq1$

故定义域为 $-\infty<t<1$，$1<t<2$，$2<t<+\infty$。

（5） $y=\sqrt{2+x-x^2}$ 解：$2+x-x^2\geqslant0$

$\begin{cases}x-2\geqslant0\\x+1\leqslant0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\geqslant2\\x\leqslant-1\end{cases}$ 无解

或 $\begin{cases}x-2\leqslant0\\x+1\geqslant0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\leqslant2\\x\geqslant-1\end{cases}\Longrightarrow -1\leqslant x\leqslant2$ 故定义域为 $-1\leqslant x\leqslant2$

（6） $\varphi(r)=\dfrac{r-4}{\sqrt{r^2-r-2}}$

解：$r^2-r-2>0$，$(r-2)(r+1)>0$

$\begin{cases}r-2>0\\r+1>0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}r>2\\r>-1\end{cases}\Longrightarrow r>2$

或 $\begin{cases}r-2<0\\r+1<0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}r<2\\r<-1\end{cases}\Longrightarrow r<-1$ 故定义域为 $r<-1$ 或 $r>2$

（7） $f(x)=\sqrt{x-1}+2\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+1}$

解：$x^2+1>0$，∵要 $x-1\geqslant0$，即 $x\geqslant1$，又要 $1-x\geqslant0$，即 $x\leqslant1$。公共部分为 $x=1$。 故定义域为 $x=1$。

（8） $y=\lg\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$

解： $\begin{cases}1-x>0\\x+2\geqslant0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x<1\\x\geqslant-2\end{cases}$. 故定义为 -