

高等数学 习题解答

(上册)

王承中 主 编

李玉亚 刘俊英 杜文恩 编 写
戚兆德 周凤树 陈义元

吉林工学院高等教育研究室

责任编辑 吕耀春

013-44

4.8(2)

高等数学习题解答

出版 吉林工学院《高等教育研究》编辑部
印刷 长春市第五印刷厂
发行 吉林工学院高等教育研究室

吉林省内部报刊准印证第 039 号

(内部发行)

定价 (上、下册) 5.70

前 言

由中央广播电视大学编辑出版的《高等数学习题集》（理工版），内容丰富，选题新颖，并配有部分难度较大的习题，是目前国内已出版的习题集中较理想的一种。它包括函数、极限、连续、一元微积分、矢量代数、空间解析几何、多元微积分、场论、级数和微分方程等，共 2511 个习题。为满足我院广大师生及社会各方面读者的需要，我们将习题集中的全部习题做了详尽解答，汇编成《高等数学习题解答》。它可供广播电视大学、职工业余大学读者使用，也可供普通工科院校师生以及志在报考研究生的读者使用。

参加题解编写工作的有：李玉亚、刘俊英、杜文思、周凤树、戚兆德、陈义元、王承中。并由主编王承中进行统改定稿。

在编写过程中我们纠正了原习题集中印刷上的错误，对部分与原书所附答案不一致的习题解，进行了反复推敲，还对个别习题做了改动。

由于编写时间仓促和我们水平有限，解答中一定会有错误之处，诚恳地希望读者批评指正。

在本书编写出版过程中，我们得到了吉林工学院高教研究室、长春市第五印刷厂的大力支持，在此深表谢意。

编 者

一九八五年一月

目 录

第十章 多元函数微分法及其应用	453
多元函数	453
一阶偏导数	459
全微分及其应用	465
复合函数微分法	473
高阶偏导数	480
隐函数的微分法	492
空间曲线的切线及法平面	506
曲面的切平面及法线	512
多元函数的极值	517
泰勒公式	537
方向导数	541
第十一章 重积分	545
二重积分	545
三重积分	560
重积分的应用	572
第十二章 曲线积分与曲面积分	583
对弧长的曲线积分	583
对坐标的曲线积分	586
与路径无关的曲线积分	592
格林公式	598
曲线积分的应用	603
对面积的曲面积分	611
对坐标的曲面积分	613
奥-高公式	620
曲面积分的应用	626
斯托克斯公式	631
第十三章 场论初步	636
数量场与矢量场	645
梯度	637
散度	645
环量与旋度	649

有势场、管形场与调和场.....	655
杂题.....	660
第十四章 无穷级数	664
数项级数.....	664
函数项级数.....	683
富里叶级数.....	703
第十五章 微分方程	720
基本概念.....	720
可分离变量的微分方程.....	728
齐次方程.....	736
一阶线性方程.....	746
全微分方程.....	762
杂题.....	767
高阶可降阶的微分方程.....	779
常系数线性微分方程.....	794

目 录

第一章 函数及其图形	1
预备知识	1
求函数值	6
函数定义域	9
列函数表达	13
函数的初等性质	17
函数的图形表示	24
反函数及其图形	34
复合函数	37
双曲函数	39
第二章 极限与连续性	42
序列的极限	42
函数的极限	44
单侧极限	46
无穷大与无穷小	48
极限的求法	52
无穷小的比较	64
杂题	69
极限存在准则	81
函数的连续性	84
第三章 导数与微分	95
导数概念	95
运用四则运算法则求导	99
运用反函数及复合函数求导法则求导	103
隐函数求导	119
用参变量表示的函数求导	120
高阶导数	122
导数的应用	128
微分及其应用	133
第四章 中值定理	141
中值定理	1
洛必达法则	

泰勒公式	160
第五章 导数的应用	172
函数的单调性、极值、最值	172
曲线的凹凸性和拐点、渐近线	191
函数作图	202
平面曲线的曲率	222
极值应用题	226
第六章 不定积分	239
概念题	239
简单不定积分	240
换元积分法	242
分部积分法	255
分式有理式的积分	262
三角函数有理式的积分	266
简单代数无理式的积分	269
杂题	279
第七章 定积分	288
基本概念题	288
基本性质题	290
定积分计算	293
换元积分法	299
分部积分法	306
近似公式	310
广义积分	314
杂题	328
第八章 定积分的应用	339
几何应用	339
物理应用	364
第九章 矢量代数与空间解析几何	378
空间点的直角坐标	378
矢量代数初步	382
曲面方程	397
平面	402
空间直线	417
二次曲面	441

第一章 函数及其图形

预 备 知 识

1.1 对照写出等价的不等式与区间:

如 (1) $|x| < 3 \iff 2^\circ -3 < x < 3$

$$(1) |x| < 3 \quad 1^\circ 4 < x < 6$$

$$(2) |x-1| < 3 \quad 2^\circ -3 < x < 3$$

$$(3) |3-2x| < 1 \quad 3^\circ x > 3 \text{ 或 } x < -1$$

$$(4) |1+2x| \leq 1 \quad 4^\circ x > 2$$

$$(5) |x-1| > 2 \quad 5^\circ -2 < x < 4$$

$$(6) |x+2| \geq 5 \quad 6^\circ -\sqrt{3} \leq x \leq -1 \text{ 或 } 1 \leq x \leq \sqrt{3}$$

$$(7) |5-x^{-1}| < 1 \quad 7^\circ 1 < x < 2$$

$$(8) |x-5| < |x+1| \quad 8^\circ x \leq -7 \text{ 或 } x \geq 3$$

$$(9) |x^2-2| \leq 1 \quad 9^\circ \frac{1}{6} < x < \frac{1}{4}$$

$$(10) x < x^2-12 < 4x \quad 10^\circ -1 \leq x \leq 0$$

解: (1) $\iff 2^\circ$; (2) $\iff 5^\circ$; (3) $\iff 7^\circ$; (4) $\iff 10^\circ$; (5) $\iff 3^\circ$;

(6) $\iff 8^\circ$; (7) $\iff 9^\circ$; (8) $\iff 4^\circ$; (9) $\iff 6^\circ$; (10) $\iff 1^\circ$;

1.2 试讨论下述命题的真伪, 并申明理由:

$$(1) x < 5 \text{ 就是 } |x| < 5$$

解: 此命题不真. 因为 $|x| < 5$ 与 $-5 < x < 5$ 等价, 故与 $x < 5$ 不等价.

$$(2) |x-5| < 2 \text{ 就是 } 3 < x < 7$$

解: 此命题真. 因为 $|x-5| < 2$ 即 $-2 < x-5 < 2$, 所以 $3 < x < 7$,

$$(3) |1+3x| \leq 1 \text{ 即 } x \geq -\frac{2}{3}$$

解: 此命题不真. 因为 $-1 \leq 1+3x \leq 1$ 与 $-\frac{2}{3} < x \leq 0$ 等价, 故 x 不能大于零, 而

$x \geq -\frac{2}{3}$ 允许 x 大于零.

$$(4) \text{ 不存在实数 } x, \text{ 使得 } |x-1| = |x-2|.$$

解：此命题不真。由 $(x-1)^2 = (x-2)^2$ 得 $x = \frac{3}{2}$ 。所以存在实数 $\frac{3}{2}$ 能使等

$|x-1| = |x-2|$ 成立。

1.3 求下列不等式的公共部分，并在数轴上表示出来。

(1) $-11 \leq x \leq 8$ 或 $-6 \leq x < 11$ 。解：公共部分为 $-6 \leq x \leq 8$ 。

(2) $-8 \leq x < 6$ 或 $-4 < x \leq 2$ 。解：公共部分为 $-4 < x \leq 2$ 。

1.4 证明下列各式：

(1) $|-x| = |x|$ 。

证：由绝对值定义

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases} \quad |-x| = \begin{cases} -(-x) = x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

可知， $|x| = |-x|$ 。

(2) $|x-y| = |y-x|$ 。

证：由1.4 (1) 知， $|x-y| = |-(y-x)| = |y-x|$ 。

(3) $|x| = \sqrt{x^2}$ 。

证：因为 $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases} \quad \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

所以， $|x| = \sqrt{x^2}$ 。

(4) $|x/y| = |x|/|y|$ ($y \neq 0$)。

证：由除法法则及绝对值定义，有

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \begin{cases} \frac{x}{y}, & x \cdot y > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -\frac{x}{y}, & x \cdot y < 0, \end{cases} \quad \frac{|x|}{|y|} = \begin{cases} \frac{x}{y}, & x > 0, y > 0 \\ \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}, & x < 0, y < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y}, & x > 0, y < 0, \\ \frac{-x}{y} = -\frac{x}{y}, & x < 0, y > 0. \end{cases}$$

综合上述，有 $|x/y| = |x|/|y|$ 。

(5) $|x+y| \leq |x| + |y|$

证：由绝对值的意义，有

$$-|x| \leq x \leq |x|, \quad -|y| \leq y \leq |y|, \quad \text{式相加得}$$

$$-(|x| + |y|) \leq x+y \leq |x| + |y|,$$

即 $|x+y| \leq |x| + |y|$ 。

(6) $||x| - |y|| \leq |x-y| \leq |x| + |y|$

证：将 $|x| - |y|$ 看做是一个数，第一个绝对值不等式 $||x| - |y|| \leq |x-y|$ 显

然成立。不论 x, y 是什么实数, 都有 $|x||y| \geq xy, |x|^2 = x^2, |y|^2 = y^2$.
不等式两端同乘 -2 , 得 $-2|x||y| \leq -2xy$,

$$|x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 \leq x^2 - 2xy + y^2, \quad (|x| - |y|)^2 \leq (x - y)^2,$$

$$\sqrt{(|x| - |y|)^2} \leq \sqrt{(x - y)^2}, \quad \therefore ||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

再证第三个不等式. $\because -|x| \leq x \leq |x|, \quad -|y| \leq -y \leq |y|,$

二不等式相加得 $-(|x| + |y|) \leq x - y \leq |x| + |y|.$

$$\therefore |x - y| \leq |x| + |y|.$$

综上所述, 有 $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|.$

$$(7) \text{ 已知 } a, b, m \text{ 为正数, 且 } a < b \text{ 则 } \frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$$

证: 将 $b > a$ 两端同乘以正数 m , 同时加上 ab 得

$$ab + bm > ab + am, \quad b(a+m) > a(b+m).$$

因 $b, b+m$ 都是正数, 用 $b(b+m)$ 同除不等式两端得 $\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}.$

$$(8) \text{ 若 } a > 0, b > 0, \text{ 则 } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

证: $\because a, b$ 都是正数, 故有 $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0, \quad a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \geq 0,$

$$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

$$(9) x > 0, \text{ 则 } x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ 当且仅当 } x = 1 \text{ 时, 等式成立}$$

证: 因 x 为正数, 显然有 $(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 \geq 0, \quad x - 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \geq 0,$

所以 $x + \frac{1}{x} \geq 2$ 当且仅当 $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ 时等号才成立, 即当且仅当 $x = 1$

时, 等号成立。

$$(10) |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

证: 用数学归纳法证明之. 当 $n = 2$ 时, 显然有 $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$

设当 $n = k-1$ 时不等式成立, 证明 $n = k$ 时不等式亦成立. *已知 $n=1$ 时不等式成立*

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1}| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_{k-1}|$$

$$|(x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1}) + x_k| \leq |x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1}| + |x_k|$$

$$\leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_{k-1}| + |x_k|$$

所以 $|x_1 + x_2 + \dots + x_k| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_k|.$

1.5 解不等式

$$(1) -2 < \frac{1}{x+2} < 2$$

解: 由题设知 $\left| \frac{1}{x+2} \right| < 2, \quad |x+2| > \frac{1}{2}$

假定 $x + 2 > 0$, 则 $x + 2 > \frac{1}{2}$ 有 $x > -\frac{3}{2}$

假定 $x + 2 < 0$, 则 $-(x + 2) > \frac{1}{2}$ $x + 2 < -\frac{1}{2}$, 有 $x < -\frac{5}{2}$

所以解为: $x < -\frac{5}{2}$ 或 $x > -\frac{3}{2}$

$$(2) \left| \frac{x-2}{x+1} \right| > \frac{x-2}{x+1}$$

解: 当 $\frac{x-2}{x+1} > 0$ 时, 有 $\left| \frac{x-2}{x+1} \right| = \frac{x-2}{x+1}$, $\frac{x-2}{x+1} > \frac{x-2}{x+1}$, 这是不可能的.

当 $\frac{x-2}{x+1} < 0$ 时, $\left| \frac{x-2}{x+1} \right| = -\frac{x-2}{x+1}$ 不等式为 $-\frac{x-2}{x+1} > \frac{x-2}{x+1}$

即 $\frac{x-2}{x+1} < 0$ 因此, $\begin{cases} x-2 > 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$

即 或 $\begin{cases} x > 2 \\ x < -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < 2 \\ x > -1 \end{cases}$

$\therefore$ 第一个不等式组无解, $\therefore$ 原不等式之解为: $-1 < x < 2$

(3) $|x-A| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ 为常数)

解: 由绝对值不等式知

$$-\varepsilon < x-A < \varepsilon, \quad \text{从而解得 } A-\varepsilon < x < A+\varepsilon$$

$$(4) \frac{2(x+1)(x-2)}{3x-1} > 0$$

解: 当 $x = -1$, $x = 2$ 时, 题给分式的值是 0, 当 $x = \frac{1}{3}$ 时, 题给分式失去意

义。我们以这三个数 -1 , $\frac{1}{3}$, 2 为界把全体实数划分成 4 个部分, 列成下表来考察:

	$x < -1$	$-1 < x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 2$	$x > 2$
$x+1$	-	+	+	+
$x-2$	-	-	-	+
$3x-1$	-	-	+	+
$\frac{2(x+1)(x-2)}{3x-1}$	-	+	-	+

由表可看出, 原不等式的解是 $-1 < x < \frac{1}{3}$ 或 $x > 2$

1.6 解高次不等式

• (1) $|x^2 - 3x + 2| \geq x^2 - 3x + 2$

— 4 —

解：由绝对值性质知， x 为一切实数时，不等式皆真。不等式的解为 $-\infty < x < \infty$

(2) $x^2 - 7x + 12 > 0$ 解： $(x-3)(x-4) > 0$

由 $\begin{cases} x-3 > 0 \\ x-4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x > 4 \end{cases} \Rightarrow x > 4$ 或 $\begin{cases} x-3 < 0 \\ x-4 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x < 4 \end{cases} \Rightarrow x < 3$

即不等式的解是 $x < 3$ 或 $x > 4$

(3) $|x(1-x)| \leq 0.5$

解：可将不等式写成 $|x(x-1)| \leq \frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2} \leq x^2 - x \leq \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$ $-\frac{1}{4} \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{4}$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{4}$ $\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{1-\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

故不等式解为 $\frac{1-\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

(4) $-2x^2 + 4x - 7 > 0$

解： $2x^2 - 4x + 7 < 0$ $x^2 - 2x + 1 + \frac{5}{2} < 0$ $(x-1)^2 + \frac{5}{2} < 0$

不等式左端恒大于0，故不等式无解。

(5) $x^3 + x^2 - 30x < 0$ 解： $x(x+6)(x-5) < 0$

	$x < -6$	$-6 < x < 0$	$0 < x < 5$	$x > 5$
x	-	-	+	+
$x+6$	-	+	+	+
$x-5$	-	-	-	+
$x(x+6)(x-5)$	-	+	-	+

不等式的解为 $x < -6$ 或 $0 < x < 5$

1.7 解不等式组

(1) $\begin{cases} x - 2(x-3) > 4 \\ \frac{x}{2} - (x-3) > \frac{1}{4} \end{cases}$

解： $\begin{cases} x - 2x + 6 > 4 \\ x - 2x + 6 > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x < 5\frac{1}{2} \end{cases}$ 不等式组的解为 $x < 2$

(2) $\begin{cases} x+5 \leq (x+1)(x+2) \\ x(x+1) + x(x+2) > (2x-1)(x+3) \end{cases}$

解： $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\ 2x < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+3)(x-1) \geq 0 \\ 2x < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -3 \\ x < 3/2 \end{cases}$

不等式组的解为 $x \leq -3$ 或 $1 \leq x < \frac{3}{2}$

求函数值

1.8 已知函数 $f(x) = x + 1$ 求: $f(2)$, $f(-2)$, $-f(2)$, $f(\frac{1}{2})$, $\frac{1}{f(2)}$, $f(a+b)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: } f(2) &= 2 + 1 = 3 & f(-2) &= -2 + 1 = -1 \\ -f(2) &= -(2 + 1) = -3 & f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{f(2)} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \quad f(a+b) = a+b+1$$

1.9 设 $\varphi(t) = |t-3| + |t-1|$ 求: $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(-1)$, $\varphi(-2)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: } \varphi(0) &= |0-3| + |0-1| = 3+1=4; \\ \varphi(1) &= |1-3| + |1-1| = |-2| + 0 = 2; \\ \varphi(-1) &= |-1-3| + |-1-1| = 4+2=6; \\ \varphi(-2) &= |-2-3| + |-2-1| = 5+3=8. \end{aligned}$$

1.10 求 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 设:

$$(1) f(x) = ax + b$$

$$\text{解: } \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{a(x+h)+b-ax-b}{h} = a$$

$$(2) f(x) = x^2 + 4x + 1$$

$$\begin{aligned} \text{解: } \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 + 4(x+h) + 1 - x^2 - 4x - 1}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 4x + 4h + 1 - x^2 - 4x - 1}{h} = 2x + 4 + h \end{aligned}$$

$$(3) f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{解: } \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-x-h}{h(x+h)x}}{h} = \frac{-1}{x(x+h)}$$

1.11 已知 $G(u) = 3$ 求 $G(0)$, $G(u+\Delta u) - G(u)$ 。

$$\text{解: } G(0) = 3, \quad G(u+\Delta u) - G(u) = 3 - 3 = 0.$$

1.12 设 $\Psi(x) = e^x - 1$, 求 $\Psi(0)$, $\Psi(e)$, $\Psi(\ln 2)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: } \Psi(0) &= e^0 - 1 = 1 - 1 = 0 & \Psi(e) &= e^e - 1 \\ \Psi(\ln 2) &= e^{\ln 2} - 1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

1.13 设 $f(x) = \lg x^2$, 求 $f(10^3)$, $f(-0.001)$ 。

$$\text{解: } f(10^3) = \lg(10^3)^2 = \lg 10^6 = 6$$

$$f(-0.001) = \lg(-0.001)^2 = \lg(0.000001) = -6$$

1.14 设 $\varphi(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 求 $\varphi(-x)$, $\varphi(x)+1$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{\varphi(x)}$.

解: $\varphi(-x) = \frac{1-(-x)}{1+(-x)} = \frac{1+x}{1-x}$ $\varphi(x)+1 = \frac{1-x}{1+x} + 1 = \frac{2}{1+x}$

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{x-1}{x+1} \quad \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1+x}{1-x}$$

1.15 设 $f(t) = \begin{cases} \sin t & -2 < t < 0 \\ 1+t^2 & 0 \leq t < 2 \end{cases}$ 求 $f(1)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $f(4)$

解: $f(1) = 1+1^2 = 2$ $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1 + \frac{\pi^2}{4}$

$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 当 $t=4$ 时, $f(t)$ 没有定义.

1.16 若 $G(x) = \begin{cases} |x| & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$ 求 $G(-1)$, $G(5)$, $G\left(-\frac{1}{4}\right)$

解: $G(-1) = 0$ $G\left(\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ $G(5) = 0$

$G\left(-\frac{1}{4}\right) = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$

1.17 设 $y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

(该函数称为符号函数, 记为 $\operatorname{sgn} x$), 求 $y(0)$, $y(-2)$, $y(100)$.

解: $y(0) = 0$ $y(-2) = -1$ $y(100) = 1$

1.18 已知 (1) $f(x) = ax$ ($a \neq 0$), (2) $f(x) = \frac{1}{x}$,

(3) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ 且 $f(x)+f(y)=f(z)$, 求 z

解: (1) $f(z) = f(x) + f(y) = ax + ay = az$ $z = x + y$

(2) $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ $z = \frac{xy}{x+y}$

(3) $f(z) = \ln \frac{1+z}{1-z} = \ln \frac{1+x}{1-x} + \ln \frac{1+y}{1-y} = \ln \frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}$

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}$$

$$(1-x)(1-y) + z(1-x)(1-y) = (1+x)(1+y) - z(1+x)(1+y)$$

$$z = \frac{(1+x)(1+y) - (1-x)(1-y)}{(1-x)(1-y) + (1+x)(1+y)} = \frac{x+y}{1+xy}$$

1.19 设 $f(u) = \lg u$ 求证:

$$(1) f(u) + f(u+1) = f[u(u+1)]$$

$$\text{证: } f(u) + f(u+1) = \lg u + \lg(u+1) = \lg[u(u+1)] = f[u(u+1)]$$

$$(2) f(x) - f(y) = f(x/y)$$

$$\text{证: } f(x) - f(y) = \lg x - \lg y = \lg(x/y) = f(x/y)$$

1.20 设 $\varphi(x) = e^x$, 求证: $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y)$ $\varphi(x)/\varphi(y) = \varphi(x-y)$

$$\text{证: } \varphi(x) \cdot \varphi(y) = e^x \cdot e^y = e^{x+y} = \varphi(x+y)$$

$$\varphi(x)/\varphi(y) = e^x/e^y = e^{x-y} = \varphi(x-y)$$

1.21 设 $f(t) = t^2 - 2\cos t$, 求证: $f(-a) = f(a)$

$$\text{证: } f(-a) = (-t)^2 - 2\cos(-t) = t^2 - 2\cos t = f(a)$$

1.22 设 $f(x) = 2x - \sin x$ 求证: $f(-t) = -f(t)$

$$\text{证: } f(-t) = 2(-t) - \sin(-t) = -2t + \sin t = -f(t)$$

1.23 设 $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ ($a > 0$) 求证: $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$

$$\begin{aligned} \text{证: } f(x+y) + f(x-y) &= \frac{1}{2} [a^{x+y} + a^{-(x+y)}] + \frac{1}{2} [a^{x-y} + a^{-(x-y)}] \\ &= \frac{1}{2} [a^x \cdot a^y + a^{-x} a^{-y} + a^x a^{-y} + a^{-x} a^y] = \frac{1}{2} [(a^x + a^{-x})a^y + (a^x + a^{-x})a^{-y}] \\ &= \frac{1}{2} (a^x + a^{-x}) (a^y + a^{-y}) = 2f(x)f(y) \end{aligned}$$

1.24 设 $f(x) = ax + b$ 且有 $f(0) = -2$, $f(3) = 5$ 求 $f(2)$ 。

$$\text{解: } f(0) = b = -2, f(3) = 3a - 2 = 5, \quad a = \frac{7}{3}$$

$$f(x) = \frac{7}{3}x - 2, \quad f(2) = \frac{7}{3} \times 2 - 2 = \frac{8}{3}$$

1.25 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 且 $f(-2) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 5$,

求 $f(-1)$, $f(\frac{1}{2})$ 。

$$\text{解: } f(-2) = 4a - 2b + c = 0 \quad f(0) = c = 1 \quad f(1) = a + b + c = 5$$

$$\text{解方程组, 得 } a = \frac{7}{6}, \quad b = \frac{17}{6}, \quad c = 1 \quad f(x) = \frac{7}{6}x^2 + \frac{17}{6}x + 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{17}{6} \times \frac{1}{2} + 1 = \frac{65}{24}$$

$$f(-1) = \frac{7}{6}(-1)^2 + \frac{17}{6}(-1) + 1 = -\frac{2}{3}$$

1.26 (1) 设 $f(n) = \frac{2^n - 1}{2^n}$ 求 $f(2)$, $f(5)$

$$\text{解: } f(2) = \frac{2^2 - 1}{2^2} = \frac{2 - 1}{4} = \frac{1}{4}, \quad f(5) = \frac{2^5 - 1}{2^5} = \frac{15}{32}$$

(2) 若 $u_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$ ($n \geq 2$) 求 u_4, u_8, u_{11} .

解: $u_4 = \frac{(-1)^4 \sqrt{4}}{4-1} = \frac{2}{3}$ $u_8 = \frac{(-1)^8 \sqrt{8}}{8-1} = \frac{2}{7} \sqrt{2}$

$u_{11} = \frac{(-1)^{11} \sqrt{11}}{11-1} = -\frac{\sqrt{11}}{10}$

(3) 若 $y = \frac{n-2}{n^2+1}$ 求 $y(2), y(5)$.

解: $y(2) = \frac{2-2}{2^2+1} = 0$ $y(5) = \frac{5-2}{5^2+1} = \frac{3}{26}$

1.27 (1) 已知数列 $1, -1, 1, -1, \dots$, 试求 $f(n)$ 的表达式

解: $f(n) = (-1)^{n+1}, n = 1, 2, \dots$

(2) 已知数列 $\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots$ 试求 $f(n)$ 的表达式.

解: $f(n) = \frac{1}{n(n+1)}, n = 1, 2, \dots$

1.28 求下列函数的值域:

(1) $f(x) = \frac{1}{1-x} (0 \leq x < 1)$ 解: 值域为 $1 \leq f(x) < +\infty$

(2) $y = \ln(1-x) (x \leq 0)$

解: $x = 0$ 时 $\ln(1-x) = 0$ 故值域为 $0 \leq y < +\infty$

(3) $\varphi(x) = 5^x (-\infty < x < +\infty)$ 解: 值域为 $0 < \varphi(x) < +\infty$

(4) $y = \sqrt{x-x^2}$ 解: 函数的最小值是 0。下面求被开方式 $x-x^2$ 的最大值

$$x-x^2 = \frac{1}{4} - x^2 + x - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

当 $x = \frac{1}{2}$ 时 $x-x^2$ 有最大值 $\frac{1}{4}$, 故函数的值域为 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

(5) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+5x+6}}$

解: $\because x^2+5x+6 \rightarrow +\infty (x \rightarrow \infty)$, 并且有两个零点. $\therefore y$ 的值域是 $0 < y < +\infty$

1.29 函数 $f(x)$ 满足什么条件, 以下各式才有意义:

(1) $y = \sqrt[n]{f(x)}$ (n 为正整数) 解: 当 n 为偶数时, $f(x) \geq 0$, 函数

才有意义. n 为奇数时, 对 $-\infty < f(x) < \infty$ 函数都有意义

(2) $\varphi(x) = \log_a f(x) (a > 0)$ 解: $f(x) > 0$ 时函数才有意义.

函数定义域

1.30 求下列各函数的定义域, 并表示在数轴上:

(1) $y = x^3 - 3x + 2$ 解: 定义域为 $-\infty < x < +\infty$

$$(2) f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

解: $\because x^2 + 1 > 0$, $\therefore$ 定义域为 $-\infty < x < +\infty$

$$(3) F(u) = \frac{|u|}{u}$$

解: $\because$ 分母不能是 0 $\therefore$ 定义域为 $-\infty < u < 0, 0 < u < +\infty$.

$$(4) g(t) = \frac{2t-1}{t^2-3t+2}$$

解: $t^2 - 3t + 2 \neq 0 \quad (t-2)(t-1) \neq 0 \quad t \neq 2 \quad t \neq 1$

故定义域为 $-\infty < t < 1, 1 < t < 2, 2 < t < +\infty$.

$$(5) y = \sqrt{2+x-x^2} \quad \text{解: } 2+x-x^2 \geq 0$$

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -1 \end{cases} \quad \text{无解}$$

或 $\begin{cases} x-2 \leq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x \leq 2 \quad \text{故定义域为 } -1 \leq x \leq 2$

$$(6) \varphi(r) = \frac{r-4}{\sqrt{r^2-r-2}}$$

解: $r^2 - r - 2 > 0, (r-2)(r+1) > 0$

$$\begin{cases} r-2 > 0 \\ r+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r > 2 \\ r > -1 \end{cases} \Rightarrow r > 2$$

或 $\begin{cases} r-2 < 0 \\ r+1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r < 2 \\ r < -1 \end{cases} \Rightarrow r < -1 \quad \text{故定义域为 } r < -1 \text{ 或 } r > 2$

$$(7) f(x) = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1}$$

解: $x^2 + 1 > 0$, $\therefore$ 要 $x-1 \geq 0$, 即 $x \geq 1$, 又要 $1-x \geq 0$, 即 $x \leq 1$. 公共部分为 $x = 1$. 故定义域为 $x = 1$.

$$(8) y = \lg \frac{1}{1-x} + \sqrt{x+2}$$

解: $\begin{cases} 1-x > 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq -2 \end{cases} \quad \text{故定义为 } -$