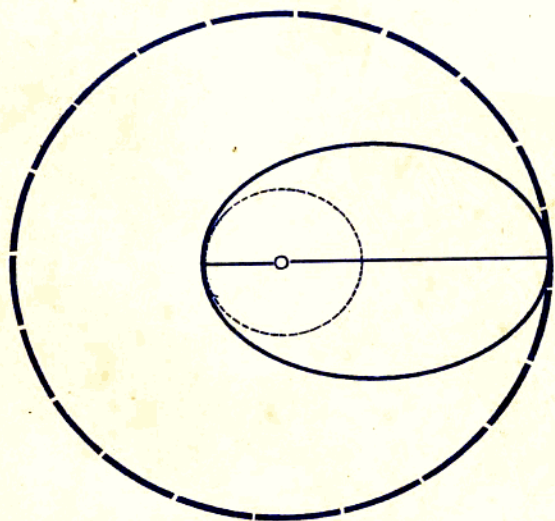


人造天体运行规律

吴榕生 编著



海南师范学院物理系本科生选修课教材

前 言

广袤无垠的宇宙,自古以来就引发人们产生无穷的遐想。随着科学技术的进步,生活在地球上的人类,更是向往能早日冲出大气层,到太空中去遨游。从本世纪五十年代起,航天技术获得飞速的发展,在第一颗人造地球卫星发射成功后,还不满四年时间,前苏联和美国就分别于1961年4月12日和5月5日,先后将宇航员送入太空,实现了载人宇宙航行。1969年7月21日,美国的“阿波罗”宇宙飞船成功抵达月球,实现了人类登月的壮举。应该看到,航天活动对人类社会的经济发展和文明进步将产生巨大深远的影响。今天,我们要培养适应21世纪诸多领域需要的人才,就应对高等学校在校学生,尤其是理工科大学生,进行宇航科学知识的教育。

宇航学科涉及面很广,它包含宇航动力

学、制导技术、星际电子通讯、遥测遥控技术、空间环境探测技术和生命保障技术等等。本书的内容,属于宇航动力学基础理论。此书主要提供给已具备数学分析和理论力学基础知识的理工科大学生阅读,也可供对宇航问题感兴趣的科技人员参考。书中的理论推导是严格的,但又尽量避免过于繁冗的公式推演。在叙述上保持严谨、简洁的特色,力求深入浅出,着重讲清物理概念,突出阐明本质问题,采用较精确的数据,注意内容的科学性和实用性。作者希望,本书能给读者提供一个窥视宇航理论的“窗口”,能在开发宇宙空间这门学问上帮助读者拓宽视野、启迪思维。

海南师范学院 物理学教授 吴榕生
写于 1994 年 12 月

目 录

第一章 火箭运动理论.....	(1)
§ 1.1 火箭发动机的推力	(1)
§ 1.2 齐奥尔科夫斯基公式	(4)
§ 1.3 多级运载火箭	(6)
§ 1.4 火箭的近地飞行轨道	(8)
§ 1.5 中心引力场中的运动轨道.....	(11)
§ 1.6 自由段初速与轨道类型的关系.....	(14)
§ 1.7 第一、第二、第三宇宙速度.....	(16)
§ 1.8 椭圆轨道上的运动速度.....	(19)
§ 1.9 发射卫星的最佳轨道.....	(21)
§ 1.10 双切椭圆转移轨道	(25)
§ 1.11 自由段初速偏差引起的轨道变化	(28)
第二章 人造地球卫星摄动轨道	(35)
§ 2.1 人造地球卫星的轨道参数.....	(35)
§ 2.2 地球质量分布非球性摄动.....	(39)
§ 2.3 大气阻力摄动.....	(45)
§ 2.4 卫星运动周期变率与寿命关系.....	(50)
§ 2.5 光压摄动.....	(54)
§ 2.6 日月引力摄动.....	(58)
§ 2.7 各种摄动加速度的比较.....	(61)

§ 2.8 同步卫星的轨道·····	(65)
§ 2.9 同步卫星的发射·····	(68)
§ 2.10 同步卫星的仰角与方位角·····	(72)
附录·····	(75)
第三章 地月航行轨道·····	(77)
§ 3.1 月球火箭运动方程·····	(78)
§ 3.2 月球火箭的可运动区与禁区·····	(81)
§ 3.3 月球火箭的最小速度轨道·····	(86)
§ 3.4 月球作用范围外的火箭轨道·····	(89)
§ 3.5 进入月心引力场的火箭轨道·····	(94)
§ 3.6 非共面奔月轨道·····	(98)
§ 3.7 人造月球卫星轨道·····	(101)
附录·····	(106)
第四章 行星际航行轨道·····	(107)
§ 4.1 行星的作用范围概念·····	(108)
§ 4.2 行星际飞行三阶段·····	(112)
§ 4.3 双曲线剩余速度·····	(115)
§ 4.4 往返飞行与星体会合的讨论·····	(118)
§ 4.5 抛物线转移轨道·····	(123)
§ 4.6 其它节能省时轨道方案·····	(127)
附录·····	(132)

第一章 火箭运动理论

早在一千多年前,我们的祖先已发明了原始火箭。到宋真宗咸平三年(公元 1000 年),已将这种原始火箭制成战争武器。后来,这类火箭武器才逐渐传到外国,并得到改进。

现代火箭理论的研究和技术的发展始于十九世纪末二十世纪初,尤其在第二次世界大战前后,各国竞相投入大量的人力物力,制成现代的火箭武器,通常称之为导弹。第二次世界大战期间,德国制成的 V—2 导弹,射程可达 300 公里之远。

火箭技术的发展为人类实现宇宙航行创造了条件。从事这方面研究的先驱是俄国的科学家 K. 9. 齐奥尔科夫斯基。他在本世纪初提出了用液体推进剂使火箭获得更高的能量以及利用多级火箭飞向太空的设想,从而奠定了宇宙航行的理论基础。

1957 年 10 月 4 日,苏联成功地发射了世界上第一颗人造地球卫星,开创了人类星际航行时代的新纪元。

§ 1.1 火箭发动机的推力

火箭发动机属于喷气式发动机的一种。它与空气喷气发动机的区别在于,它不利用周围空气中的氧作为氧化剂,而是自身同时携带着燃烧剂和氧化剂(合称为推进剂),并使二者在燃烧室中燃烧,生成高温高压气体,然后让这些气体通过喷管喷出,形成喷射气流,从而产生推力推动火箭向前运动。因此,它不仅在大气中可以工作,而且在没有空气存在的太空里也可以工作。由此可见,火箭发动机是星际航行中理想的动力

装置。

火箭的燃烧室和喷管组成推力室。火箭发动机的推力,是指所有作用在发动机推力室上的压力沿轴向的合力,包括推力室内壁上的燃气压力和外壁上的大气压力沿轴向的合力。

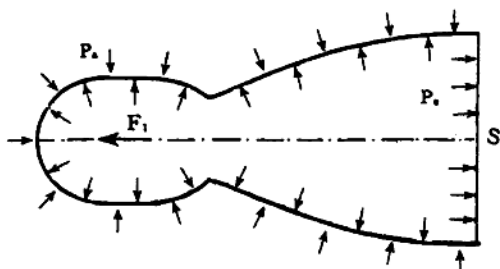


图 1.1 压力分布图

图 1.1 是作用在推力室上的压力分布示意图。我们先讨论内壁上压力的合力。如果对内壁上燃气压力分布进行积分,求得轴向的合力为 F_1 , 根据牛顿第三定律, 内壁反过来对燃气团作用的合力应为 $-F_1$, 负号表示此合力的方向与推力的方向相反。上面尚未计及喷管出口处对燃气团的作用力, 可是为了计算整个燃气团的动量变化, 还应把喷管出口截面处外界对燃气团作用的轴向合力考虑进去。如果设在这截面处燃气的压强为 p_e , 并设这截面的面积为 S , 则反过来在整个截面上外界对燃气团作用的轴向合力 F_2 的量值应为 $p_e S$, 方向应与推力方向相同。由此可见, 作用在整个燃气团上的总外力应为 $-F_1 + F_2$, 也即 $-F_1 + p_e S$ 。

推力室中的燃气团在这总外力的作用下, 如以速度 u 从

喷口喷出,并设单位时间内燃气质量流量为 $\dot{m}$,则根据牛顿第二定律(动量定律),可写出

$$-F_1 + p_e S = -\dot{m}u \quad (\text{见34页注1})$$

式中右端取负号,是由于排气方向与推力方向相反。将上式移项,得

$$F_1 = \dot{m}u + p_e S \quad (1.1)$$

我们接着讨论推力室外壁的压力合力。推力室无论其形状如何,外壁的压力沿轴向的合力总是等于大气压强 p_a 乘以喷管出口截面的面积 S ,轴向合力方向与推力方向相反,因此可将外壁压力的轴向合力表达为 $-p_a S$ 。

把推力室内外壁的压力轴向合力相加,就得到推力室的推力 P 的公式

$$P = F_1 - p_a S$$

将式(1.1)代入,得出

$$P = \dot{m}u + (p_e - p_a)S \quad (1.2)$$

从式(1.2)可看出,大气压强 p_a 越小,则推力越大。随着飞行高度的增加,大气压强逐渐减小,推力随之逐渐增大。在远离大气层的真空中, $p_a = 0$,这时的推力最大,称为“真空推力”。

推力公式(1.2)又可写成如下形式:

$$P = \dot{m} \left[u + \frac{S}{\dot{m}} (p_e - p_a) \right] = \dot{m}C \quad (1.3)$$

式中

$$C = u + \frac{S}{\dot{m}} (p_e - p_a),$$

称为有效喷气速度。它包含了推力室排气速度 u ,又反映了喷管的排气效率和高空效应。式(1.3)表明,要保持一定的推力 P ,若有效喷气速度 C 越大,则单位时间内所消耗的推进剂越少。因此,有效喷气速度是衡量火箭发动机效率的基本指标之

§ 1.2 齐奥尔科夫斯基公式

我们先讨论,在没有地球引力和空气阻力的理想情况下,由发动机推力给火箭提供的飞行速度。

设某时刻,火箭的质量为 M , 速度为 v 。在微小时间内,火箭因喷出燃气而引起质量 M 减少,也即 $dM < 0$ 。在这个过程中,火箭的质量变为 $M + dM$, 并受到推力 $P = \dot{m}C = -\frac{dM}{dt}C$ 的作用。根据动量定律,可写出下面形式的火箭运动方程

$$(M + dM) \frac{dv}{dt} = -\frac{dM}{dt}C \quad (1.4)$$

将上式二阶微量项略去,并分离变量,得

$$\frac{dv}{C} = -\frac{dM}{M} \quad (\text{见34页注2})$$

在理想情况下,一般可假设有效喷气速度 C 为不变量,因而有下面的积分式

$$\frac{1}{C} \int_{v_0}^{v_k} dv = - \int_{M_0}^{M_k} \frac{dM}{M}$$

式中 v_0 、 M_0 是火箭开始点火时的初始速度和初始质量, v_k 、 M_k 是火箭熄火时的末速度和末质量。上式积分后,得

$$v_k = v_0 + C \ln \frac{M_0}{M_k} \quad (1.5)$$

当初始速度 $v_0 = 0$ 时,式(1.5)写成

$$v_k = C \ln \frac{M_0}{M_k} \quad (1.6)$$

或

$$\frac{M_0}{M_k} = e^{v_k/C} \quad (1.7)$$

这里需强调一下,以上各式中的 C , 指的是有效喷气速

度,并且是将推力 $P = \dot{m}C$ 代入动量定律进行推导的。只有当忽略压差推力 $S(p_e - p_a)$,把发动机推力 P 看成等于喷气反作用力 $\dot{m}u$ 时,才可将燃气流从喷口喷出的排气速度 u 取代 C ,并将式(1.6)和式(1.7)改写成

$$v_k = u \ln \frac{M_0}{M_k} \quad (1.8)$$

和

$$\frac{M_0}{M_k} = e^{v_k/u} \quad (1.9)$$

人们称式(1.8)或式(1.9)为齐奥尔科夫斯基公式,因为它是 K. Э. 齐奥尔科夫斯基于 1903 年首先提出来的。由齐氏公式求得的所谓火箭的理想速度,是在忽略地球引力、空气阻力和压差的情况下推导出来的。

有些文献在推导齐氏公式时,往往依据质点动力学中的系统动量守恒定律,所建立的方程式中只引入相对于火箭的喷气速度 u (有的书将此速度也用字母 C 表示,但含意并非有效喷气速度)阅读时须注意比较。

人们有时用字母

$$Z = \frac{M_0}{M_k} \quad (1.10)$$

表示火箭的质量比,并称它为齐奥尔科夫斯基数。由式(1.6)或(1.7)可知,当质量比按几何级数增加时,火箭的速度则按算术级数增加。由此得出一个有实际意义的重要结论:若要尽量增大火箭有效载荷的最终速度,用提高有效喷气速度 C 的办法比用增加燃料的相对储备(即提高质量比)的办法更为有效。不过,提高 C 值也会受到一定条件的限制。

最后要指出,齐氏公式是建立在牛顿力学基础上的。当火箭作恒星际间飞行时,需其速度接近光速。此时用齐氏公式来

计算就不准确了,会得出过小的质量比。在这种情况下,必须用建立在相对论力学基础上的阿克来(J. Ackeret)公式进行计算。限于篇幅,本书不作进一步的介绍。

§ 1.3 多级运载火箭

目前通常使用的化学推进剂,能达到的有效喷气速度只有 2.5 公里/秒到 3 公里/秒;即使采用性能最好的液氢和液氧组合,其有效喷气速度也只能达到 4 公里/秒。而火箭的质量比 M_0/M_k ,限于当前的科技水平,很难超过 10(一般为 5~8)。再说,火箭从地面起飞,要穿越稠密的大气层,地球引力和空气阻力对火箭的速度会造成损失(约减少 1.5~2 公里/秒)。因此,单级火箭的最终速度达不到第一宇宙速度(7.91 公里/秒)。这说明用单级火箭不足以发射人造地球卫星,更谈不上实现星际航行了。

为了解决这一问题,人们采用多级运载火箭。多级运载火箭是由结构相似、大小不同的几个火箭沿轴向串接而成的,图 1.2 是一枚三级运载火箭的示意图。每一级是一个独立的工作单位,其内装有自己的推进剂、发动机和一切输送控制系统。当第一级火箭发动机开始工作时,整个多级火箭就起飞了。第一级火箭的推进剂烧完后,这级火箭便自动脱离火箭组合系统,与此同时,第二级火箭发动机自动点火开始工作,继续给余下的火箭组合系统加速。每一级都按这样的程序继续下去,直到最后一级火箭完成推动任务为止。由此可见, n 级火箭的最终速度应为

$$\begin{aligned}
 V &= v_1 + v_2 + \cdots + v_n \\
 &= C_1 \ln \frac{M_{01}}{M_{k1}} + C_2 \ln \frac{M_{02}}{M_{k2}} + \cdots + C_n \ln \frac{M_{0n}}{M_{kn}} \\
 &= \sum_{i=1}^n C_i \ln \frac{M_{0i}}{M_{ki}}
 \end{aligned} \quad (1.11)$$

式中 C_i 为第 i 级火箭的有效喷气速度; $\frac{M_{0i}}{M_{ki}}$ 为第 i 级火箭的质量比, 即第 i 级火箭点火时组合系统质量与熄火时组合系统质量之比。显然不仅包括了第 i 级火箭本身的质量, 而且包括了第 i 级以上各级火箭的质量和有效负载质量。

应用多级运载火箭有很多优点: 首先, 各级火箭完成推动任务后能自动脱离, 这就减少了飞行重量, 从而降低了推进剂的消耗量 and 提高了速度。其次, 可根据各级火箭工作高度范围的环境条件 (如气压大小和点火时的难易)。担负载荷的大小, 选用

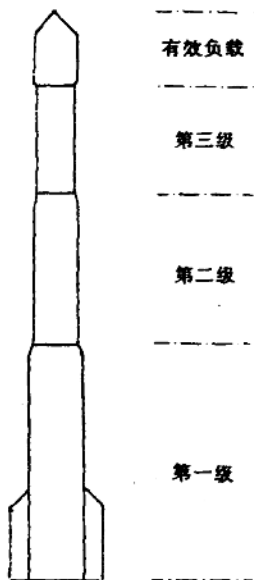


图 1.2 三级火箭示意图

不同性能的发动机, 提高了飞行性能与设计效果。还有, 推进剂不断消耗引起火箭质量不断减少, 飞行高度增加引起发动机推力微有增加, 这两个因素使得火箭的加速度越来越大, 由开始不到一个 g (重力加速度) 逐渐上升到第一级熄火时的 5

~6g。这时人还能勉强适应，再增大就受不了。采用多级火箭，每级熄火时停止加速，下一级开动时调整了一次加速度，使其从1g左右开始，以后再逐渐上升。这样，整个加速度随时间的变化是形成锯齿形曲线变化，不至于一直上升，才适宜于进行载人的宇宙航行。

然而，并非火箭的级数越多越好。因为级数增多，会引起结构和控制的复杂化。这不但给设计和制造带来了困难，而且还会使多级火箭的工作可靠性降低。

按目前的技术条件，发射低轨道（几百公里高的轨道）卫星，用目前通用的推进剂，只需二级或三级运载火箭就行了。若要发射高轨道卫星或要达到第二宇宙速度（11.19公里/秒），则需采用三级或四级运载火箭。

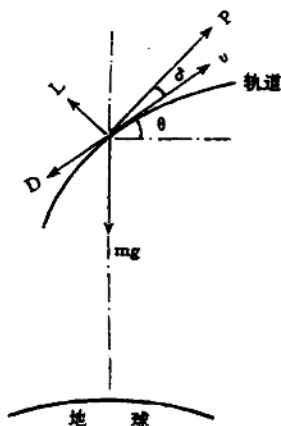
§ 1.4 火箭的近地飞行轨道

运送卫星的多级火箭和洲际导弹，都是从地面垂直向上发射的。这是因为低空的空气密度大，火箭受到的空气阻力大，在大气层中飞行的路径长了，不仅耗费燃料多，而且摩擦升温的现象也严重。这就需要尽快飞离大气层，故而采取垂直向上起飞的办法以缩短在大气层中的飞行路径。

当火箭到达空气较稀薄的高空后，为了要火箭具有水平速度分量，就必须控制火箭使其逐渐弯曲飞行。

人们把火箭发动机一直在工作获得推力的飞行阶段称为主动段，而把熄火后靠惯性飞行的阶段称为被动段或自由段。火箭升空在邻近地面的大气中飞行，发动机一直处于工作状态，属主动段飞行，我们现在就来讨论这一阶段火箭的受力情况。

在图 1.3 中, v 为火箭的飞行速度, θ 为速度方向与水平线的夹角, m 为火箭瞬时质量, mg 为作用在火箭上的重力, D 为空气阻力, P 为发动机产生的轴向推力, δ 为推力与火箭飞行方向的夹角 (亦称飞行攻角), L 为火箭在迎面气流作用下产生的升力, C 为火箭发动机的有效喷气速度。我们把作用在火箭上所有的力都投影到速度方向上, 写出火箭切向运动的微分方程:



$$m \frac{dv}{dt} = P \cos \delta - D - mg \sin \theta$$

$$= -C \frac{dm}{dt} \cos \delta - D - mg \sin \theta \quad (1.12)$$

式中的 $-\frac{dm}{dt}$ 为喷气流量, 火

图 1.3 近地飞行火箭受力图

箭由于喷出气体, 质量在减少, 质量变量 dm 为负值。

另外, 设 ds 为 dt 时间内火箭运动的距离, R 为轨道的曲率半径, 因轨道的曲率为 $\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds}$, 故火箭飞行的向心加速度应为

$$\frac{v^2}{R} = v^2 \frac{d\theta}{ds} = v \frac{ds}{dt} \frac{d\theta}{ds} = v \frac{d\theta}{dt}$$

由此可写出火箭径向运动的微分方程:

$$mv \frac{d\theta}{dt} = L - mg \cos \theta - C \frac{dm}{dt} \sin \delta \quad (1.13)$$

式(1.12)和式(1.13)的联立方程组,描述了火箭在近地主动段飞行的运动状况。

这里说明一下,最初火箭从地面垂直起飞,推力 P 也垂直向上, $\delta=0$; 由于这段时间里火箭对轨道不倾斜,所以 $L=0$; 从式(1.13)可看出,右边各项均为零,因而有 $\frac{d\theta}{dt}=0$, 即原来的 θ 角(90°)应保持不变,火箭将继续垂直上飞。要想使火箭的轨道弯斜,必须使 $\theta \neq 90^\circ$, 这就要通过程序控制使舵机调节推力的方向,让 P 的方向与 v 的方向成一个很小的 δ 角,导致 $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$, 从而使 θ 角改变到给定值。

现在我们将式(1.12)变化一下,写成

$$dv = -C \frac{dm}{m} \cos \delta - \frac{D}{m} dt - g \sin \theta dt$$

由于火箭发动机产生的推力很大,只需使推力方向改变一很小的 δ 角,即可改变火箭的飞行方向。因此,可令 $\cos \delta = 1$, 由此引起的误差很小,可以忽略。这样,对上式进行积分,就可得出

$$\int_0^{v_k} dv = -C \int_{m_0}^{m_k} \frac{dm}{m} - \int_0^{t_k} \frac{D}{m} dt - g \int_0^{t_k} \sin \theta dt$$

因而有

$$v_k = C \ln \frac{m_0}{m_k} - \int_0^{t_k} \frac{D}{m} dt - g \int_0^{t_k} \sin \theta dt \quad (1.14)$$

如果在这主动段飞行中有 n 级火箭接力推动,则应将式(1.14)改写成

$$v = \sum_{i=1}^n C_i \ln \frac{m_{oi}}{m_{ki}} - \int_0^{t_k} \frac{D}{m} dt - \int_0^{t_k} g(h) \sin \theta dt \quad (1.15)$$

在式(1.15)中,我们将重力加速度写成 $g(h)$, 并没有将它抽出于积分符号前,是考虑到多级火箭在高度差异较大的范围内飞行,重力加速度量值会随高度 h 的差异发生明显的变

化。

式(1.14)和式(1.15)表明,火箭在大气层中运动时,除了推力产生的速度外,还需计及空气阻力和重力引起的速度损失。火箭由地面向上,虽在密度大的大气层中飞行,但最初的速度是较低的;在高空中速度虽已加快,但大气的密度已渐稀薄。另外,火箭躯体基本上似长圆柱形,其横截面面积与质量之比也不大。因此,由于空气阻力造成的速度损失不会很大。可是在上升阶段, θ 角由 90° 开始,以后慢慢减小,为了达到一定的爬升高度, θ 角不会很快减小到零。因而在上升阶段,由重力造成的速度损失比空气阻力造成的速度损失要大得多。据大量计算统计,空气阻力引起的速度损失约为0.1公里/秒至0.2公里/秒;而重力引起的速度损失却大约为1.3公里/秒至1.8公里/秒。

§ 1.5 中心引力场中的运动轨道

人们要将人造地球卫星送入绕地球运行的轨道,为了节省能量,往往采用这样的方案发射运载火箭:在离地面高度约一百公里以下的大气层中,让火箭作加速飞行(主动段轨道),使火箭所喷的燃气留在势能低的地方,这样所消耗的能量比把燃气留在离地面较远即势能高的地方要小。当火箭加足了它飞行时所需要的大部分能量后,便熄火让推力为零,以后靠其本身的惯性继续爬升,也即进入自由段飞行。最后当自由段轨道与预定的卫星轨道相切时,再开动最后一级小火箭,作一小段加速飞行(小主动段),使卫星在入轨地点达到入轨的速度要求。

火箭飞行的自由段,一般都在大气外区,空气已很稀薄,

空气的阻力可忽略不计。因此,火箭的自由飞行段的运动,实际上是质点在地球中心引力场中的运动。我们现在就来讨论质点在中心引力场中的运动轨道。

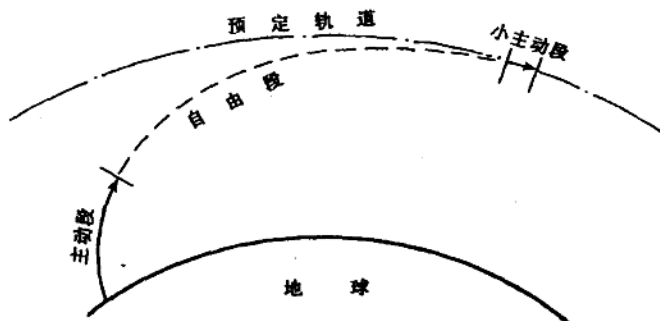


图 1.4 发射运载火箭的合理方案

设质点的质量为 m , 作用在质点上的地心引力为 F_c 。采用极坐标系, 并把极坐标原点选在地球中心, 就可对质点写出下列动力学方程:

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F_c \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

将此方程组的第二式改写成

$$\frac{m}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = 0$$

便可得到

$$r^2 \dot{\varphi} = h \quad (1.17)$$

h 为积分常数, 它等于矢径 r 单位时间扫过的面积 (即面积速度) σ 的 2 倍。