幾何作圖題

解法
及
其原理

目　次

幾何作圖題解法及其原理

引　論

幾何中的命題,有兩種形式:或是表示某種情形的圖適合某種條件,或是要求作一圖,使適合於某種條件.前者爲**定理** theorem,後者爲**作圖題** problem of construction.

解作圖題,必用數種器具,卽一直尺,可藉以作過二點的直線,及一圓規,以爲作已知中心同半徑的圓之用.任何問題的解決,都要歸於這兩種手續的.

在如此限制之下,有許多似乎極簡單的問題,竟不能解決(例如三等分任意角,和求一與已知圓等積的正方形等題);在一般情形,如由該題引出的方程式,不能歸於一次或二次方程式解決的,便可證明是不能解的問題.

如果題設的條件,多於解題所需要之數,則此題超過確定範圍以外;如題有一解或有限數解,則爲確定,有無限數解,則爲不定.

要解一確定問題,必須分爲三層,卽

作法的次序,

證明其正確與

討論, 卽述明已知件的限制, 以定解數的有無多寡.

各種不定問題中, 宜特加注意的, 是再加一條件, 卽可使問題確定的一種. 這種問題, 雖有無限數的解答,但不是任意圖形所能適合的; 一切的解答, 依已知各條件的情形, 自成一類. 譬如一點由兩條件確定;如只知一條件,問題便爲不定; 但是合於一條件的各點, 都在一直線或一曲線上面; 這種線便稱爲適合於該條件的**軌跡** locus. 同理,如有一圖形,因缺一條件,而不能使其確定; 則此圖形上任何點,在普通情形, 自有其軌跡.

在解析幾何裏, 我們有種普遍方法, 可解幾何問題. 但是如只以一法施於各種不同的問題, 則用此法時,不得不迂迴煩費, 這理是很顯然的. 譬如在解析幾

何裏,任何點均由其對於二軸的位置決定,這二軸每每不會和所論問題,有什麼關係;此外則方程式的幾何意義,總很覺得不易索解,且又甚繁,實際上常不能解.

爲避免直接應用笛氏幾何*的困難起見,便有種種特殊方法的產生(例如各種坐標系),有了這種方法,各個問題的解決,方能較爲流利而巧妙;但是困難之點,又移到如何選擇合用方法的一方面去了.由這種種方法,代數法藉以過渡到純然幾何方面去,因此我們求一問題的解,可就圖形已知件與求作件間所有關係,加以幾何的處理.

欲化簡這種關係的處理,首須作一圖,以表已解的問題,再行用幾何定理去研究這圖.

若在此時可見各事皆依一未知點的確定而解決(此爲多數問題的情形),則由前述的理,立知應用下法:

分別考察此點應適合的兩條件:對於每一條件,有一相當軌跡,如爲直線或圓,則問題可解;因此點既在二軌跡上,故必爲其交點.

---

*即用笛氏坐標系的幾何.

如二軌跡都是直線,則問題只能有一解,且只在二直線平行時,方爲不可能. 如軌跡爲二圓,或一圓一直線,則在相交時有二解,相切時有一解,無交點時則無解. 最後一種的不可能情形與平行線的不同,因那種不可能,只是一個極限的問題.

但如軌跡是他種曲線,便不能直接應用到作圖上去,這問題就當別論了. 有可注意的一事,即由一直線和一錐線 Conic section 所定的點,也能由一直線和一圓確定;* 若是這一點須由彼此獨立的二錐線確定,則作圖爲不可能.

上述方法,在此只應用到最簡單的問題上去,但對於複雜情形,也可推廣,其規則如下:

設想問題中圖形的一條件移去,而求圖中因此不定的諸點的各軌跡.

由此可見我們應知許多爲直線或圓的軌跡,此事顯甚重要. 在本書第一章內,即取其最重要的,一一述出,并將上述各規則,加以推展.

---

*見後 182, 183, 344, 345 各題.

如果軌跡不能直接應用,規則應如下:

對於已作圖形,試另作一圖,使其中已知同所求的元素有較利的關係. 這條規則的應用,在第二章內討論.

在本書中,一三角形,以 ABC 來表,各邊則記爲 a, b,c,在底線 a 上的高爲 h_a,過 A 的中線,卽過 A 而平分 a 的線,爲 m_a, v_a 則用以指平分 $\angle A$ 的線段*的長. 外接圓同內切圓的半徑,各記爲 R, r, 而 r_a, r_b 和 r_c,則表諸旁切圓的半徑(r_a 爲與 b,c 延長線相切的圓半徑).

在四邊形 ABCD 中,各頂點卽依所標出的次序爲次.

$\angle(a,b)$是表示 a 和 b 二線所成的角.

【註】 引論內所說的理,須習過解析幾何,方能了解.又所說「作圖能不能」的意義,更爲深奧,容當譯林鶴一"初等幾何學作圖不能問題"一書,以便互爲闡發. 又譯者曾譯克萊因 Klein 幾何三大問題 Famous Problems of Elementary geometry(在萬有文庫第一集內),也是討論這問題的,不過比林氏的書,要簡略些. 　　重譯者識.

*卽 $\angle A$ 平分線 從頂點到對邊的一段.

第一章

軌跡

A. 點的軌跡

***a*. 凡距已知點等遠的一切點,所成軌跡爲圓,其中心卽爲該已知點,半徑爲此已知長.**

應用一. 一已知圓上等長切線的端點,所成軌跡爲一圓,與此圓同心.

應用二. 一已知圓上含已知角二切線的交點,所成軌跡爲一圓,與此圓同心.

應用三. 半徑爲已知長而與一已知圓相切的諸圓,其心所成軌跡爲與該已知圓同心的二圓.

***b*. 凡距一已知線等遠的一切點,所成軌跡爲二直線,與已知線平行,相隔距離,卽爲該等遠的長.**

應用一. 三角形有已知底同等積者,其頂點所成軌跡爲與底平行的直線,因這種三角形的高,必爲一定也

c. **凡距二已知點等遠的一切點，所成軌跡為聯二點線段的垂直平分線.**

d. **凡距二已知線*等遠的一切點，所成軌跡為二直線，互相垂直，而各平分二已知線所成的角.**

e. **自一已知線段兩端至另一點，聯成二線段，如交角為已知量，則此點的軌跡為一圓弧，而以已知線段為弦.** 這弧稱為**容有**該已知角，并謂從弧上一切點，依已知角**下視**該弦.

如弧上一點能合於這已知條件，則其上一切點，都應當能合，因為一切的角，皆是立於同弧上的圓周角.因為對這線段的角，等於已知角，所以此題的作法可如下:在弦的一端，作出那已知角；則其一邊應為切線；過切點而與這邊垂直的線必含所求弧的圓心，但這圓心又應在弦線的垂直平分線上.

如已知角為直角，則所得弧為一半圓.

【註】 若是不指示所求點在已知線段的那一邊，則可作二圓弧，各在線段一側，均含那已知角.這二圓上所餘二弧，含有已知角的補角.

---

*此二已知線設為相交的，如為平行線，則此種軌跡為距此二線等遠的一平行線.

假使角的定義,依下述的說法,則全圓均是頂點的軌跡. 設二已知點爲 A 及 B,我們不說過這二點的二線間夾角,而說從過 A 點的線到過 B 點的線,所成的角,意卽過 A 點的線,依已知方向旋轉,所經過的角. 如此則任在圓上取一點 C,從 AC 到 BC 的角,均等於從在 A 點切線到 AB 的角.

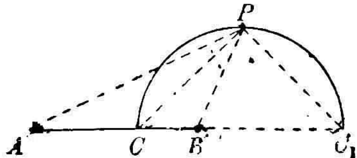
應用一. 過一已知點的一切弦,其上中點的軌跡爲一圓;因從中點到定點的線,與到圓心的線,其夾角爲直角也.

應用二. 在一圓內,作有公共底的一切內接三角形.更在這些三角形內,作內切圓,則諸圓心的軌跡,爲立於 AB 上的一弧,其心爲 AB 弧的中點;含此弧的圓的他一部份,是和 AB 以及 BC 同 AC 二者延長線相切的圓 心軌跡. 因爲從所求各圓心,下視 AB 的角,各爲 $R+\frac{1}{2}C$ 和 $R-\frac{1}{2}C$,而從 AB 弧中點下視 AB 的角爲 $2R-C$.

---

*卽對∠ACB 的旁切圓.

f. 凡一切點,距二定點的距離成定比(m:n),其所成軌跡爲一圓.



設A,B爲定點,P爲所求點之一. 作PC和PC_1平分∠APB及其補隣角,

則 $$\frac{AC}{CB}=\frac{AC_1}{BC_1}=\frac{m}{n};\angle CPC_1=R.$$

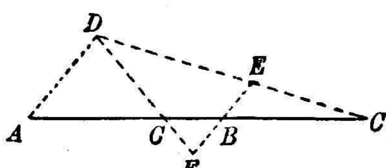
故C,C_1二點分線段AB爲已知的定比,且對於任一P點,都是如此. 今從P點下視線段CC_1所成的角爲一直角,故按e可知P的軌跡爲一圓,而以CC_1爲直徑.

C和C_1二點謂爲依定比m:n調分 divide harmonically 線段AB,故問題變爲:

按一已知比,以調分 線段.

其作法如下圖所示. AD與BE爲平行的二線,且

$$\frac{AD}{BE}=\frac{m}{n}.$$

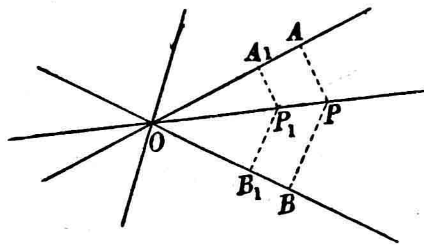


作BF=BE;聯DF及DE二線,與AB相交的點,

即為所求者.

c 為 **f** 的特例,即 $m=n$ 時的情形.

g. **凡一切點,距二定線*的距離成定比($m:n$),則所成軌跡為過定線交點的二直線.**



設二已知線為OA及OB. 如一點P,有題設的性質,則在 OP 上一切點,都有這性質;因

$$\frac{OP_1}{OP}=\frac{A_1P_1}{AP}=\frac{B_1P_1}{BP}$$

或
$$\frac{A_1P_1}{B_1P_1}=\frac{AP}{BP}$$

故也.

所以如果知道這線上一點,這線便能求得;設與二距離,其比值合於題設者,即可按 **b** 求得該點.

同法又可作AOB的隣角內一線,如此四條過O點的線,稱為**調和束線** harmonical rays. 任何直線與這種

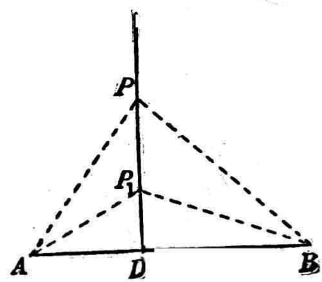
*此二定線設為相交的,如為平行線,則此種軌跡為一平行線,其隔二定線距離的比等於已知比.

線束相交的四點,必爲四調和列點 harmonical points.

d 是 g 的特例,此時 $m=n$.

應用一. 已知 AB 同 CD 二線段, 又一點 P, 使 △PAB 與 △PCD 面積的比爲一定, 則 P 的軌跡和 g 相同,因其二高的比爲一常數也.

h. 凡一切點, 距二定點的距離平方差爲一定值 a^2,則所成軌跡爲一直線,與聯二已知點的線垂直.



設 A,B 爲已知點,P 爲所求點之一,則在 AB 的垂線PD 上任何點,必適合於題設的關係;例如取 P_1,便得

$$\overline{AP_1}^2=\overline{AD}^2+\overline{P_1D}^2;$$

$$\overline{BP_1}^2=\overline{BD}^2+\overline{P_1D}^2;$$

是以 $\overline{P_1B}^2-\overline{P_1A}^2=\overline{BD}^2-\overline{AD}^2$

又按同理

$$\overline{PB}^2-\overline{PA}^2=\overline{BD}^2-\overline{AD}^2.$$

如作一直角三角形,以 a 爲其一腰,再各以 B, A 爲

中心，此三角形的斜邊同他一腰爲半徑，而作二圓，則所求直線，必過二圓的交點．這直角三角形的他一腰，應取其長至相當程度，使二圓能相交．此處所論的情形，設從 P 到 A 的距離較近．

應用一． 凡一切點，從此所作到二圓上切線有等長的，其軌跡爲一直線，與二圓聯心線垂直，而稱爲二圓的**等冪軸** radical axis；作此圖時，卽易見從此等點到圓心距離的平方差，等於二半徑的平方差．如二圓相交，則等冪軸，必經過交點．三圓的三等冪軸*共過一點，稱爲其**等冪心** radical center． 如二圓不相交，可另作一圓與這二者都相交，則易定其等冪軸．

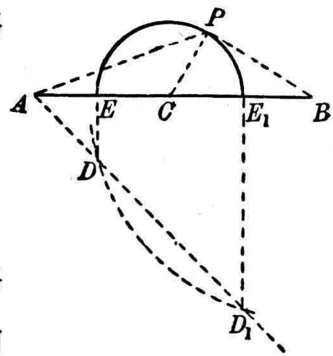
應用二． 凡一切圓，與二已知圓相交，交點各在直徑上者，其中心的軌跡，爲與聯心線垂直的直線，其隔一圓心的距離，與等冪軸隔他一圓心的距離相等．

應用三． 凡一切圓，與二已知圓直交者(卽在交點的二切線互相垂直)，其中心的軌跡爲這二圓的等冪軸．

---

*每二圓有一等冪軸．

i. 凡一切點，距二定點的距離平方和為一定值a^2,則所成軌跡為一圓,其心為聯二已知線段的中點.



設A,B為二已知點，P為所求點之一。作中線PC,則

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2\overline{PC}^2+\tfrac{1}{2}\overline{AB}^2$$

或 $$\overline{PC}^2=\tfrac{1}{2}a^2-\tfrac{1}{4}\overline{AB}^2.$$

故所求點，隔C的距離為一定.欲求這圓經過AB上的點,可作$\angle BAD=45°$. 以B為心，a為半徑,作一圓,與AD交於D及D_1. 從這二點,作至AB上的垂線,其交點E,E_1卽係所求的點;因

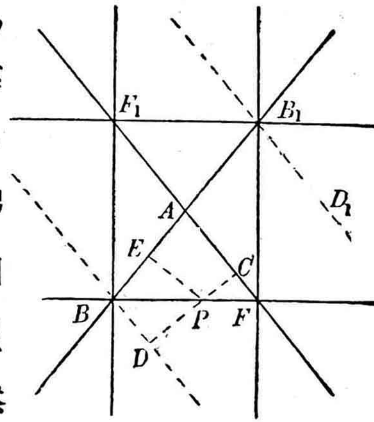
$$a^2=\overline{DE}^2+\overline{EB}^2 \text{ 且 } a^2=\overline{D_1E_1}^2+\overline{E_1B}^2$$

但 $DE=AE$ 而 $D_1E_1=AE_1$.

k. 凡一切點，距二已知線*的距離，其和或差為一定,則所成軌跡為一組四直線.**

*此二已知線,設為相交者. 如係平行,則當已知的和或差,等於二已知線距離時,問題為不定,不等時,問題為不能.

**本條原應改為j,但如此則p.53各條,亦需照次序推動,甚為不便,且於後文引用處,易生紊亂,故仍之.



設已知直線爲AB及AC，P爲所求點之一，PC＋PE等於a．延長CP至D，使PD＝PE，則D點的軌跡應爲與AC平行的二直線，而與AC相隔的距離爲a．這二線便是BD和B_1D_1．所求的點，既然距AE和這二線之一等遠；所以這些點必在過其交點而平分其所成角的四直線上．以距離的差爲a，所成問題的解，也是如此解決；考驗上圖，易見BF，FB_1，B_1F_1．同F_1B四條有限線段是對於和爲a一問題的軌跡，其餘無限長各部份，是對於較爲a一問題的軌跡．

【註】　如將CP值，依P點在已知直線AF的異側，而定爲一正一負，并將P點，依在對於AB的異側，分EP的正負，則可得全直線皆爲一軌跡；因對於此四線，各有

$$CP+EP=a;\qquad CP-EP=a;$$

$$-CP+EP=a;\qquad -CP-EP=a$$

也．