微積分問題詳解

（上）

J. A. 蒂爾尼　原著
駱效宗　譯著

曉園出版社
世界图书出版公司

微積分問題詳解

（上）

J. A. 蒂爾尼　原著

駱 效 宗　　譯著

曉 園 出 版 社

世界圖书出版公司

微积分问题详解

J. A. 蒂尔尼　原著

骆效宗　译著

*

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

1994 年 8 月第　一　版　　开本：850×1168 1/32

1994 年 8 月第一次印刷　　印张：23.5

印数：0001－1.100　　字数：56.4 万字

ISBN：7－5062－1902－6/O・121

定价：28.60 元（W_B9402/3）

世界图书出版公司向台湾晓园出版社购得重印权

限国内发行

前　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與舖路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精徽的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

微積分問題詳解

（下）

J. A. 蒂爾尼　原著
駱效宗　譯著

曉園出版社
世界图书出版公司

Tierney微積分問題詳解

（上冊目錄）

第一章　基本概念……………………………………… 1

第二章　平面解析幾何的基本性質……………………… 53

第三章　微　分………………………………………167

第四章　微分學的應用…………………………………305

第五章　積分學…………………………………………377

第六章　積分學的應用…………………………………449

第七章　方程式的圖形…………………………………523

第八章　圖形的方程式…………………………………587

第九章　三角函數和反三角函數………………………681

Tierney 微積分問題詳解

（下 冊 目 錄）

第 十 章　對數與指數函數 ………………………… 747

第十一章　積分技巧 …………………………………… 809

第十二章　參數方程式 ……………………………… 959

第十三章　極坐標 ……………………………………… 987

第十四章　雙曲函數 …………………………………… 1039

第十五章　不定型式 …………………………………… 1063

第十六章　向量處理之三維空間解析幾何 ……… 1087

第十七章　兩個或更多變數的函數 ………………… 1181

第十八章　重積分 ……………………………………… 1251

第十九章　無窮級數 …………………………………… 1329

第二十章　微分方程 ……………………………………… 1427

第一章　基本概念

習　題　1-1

1. 令$A=\{a, b, c, d, e\}$，$B=\{b, c, d\}$，$C=\{a, b, c, f\}$，下列敍述何者爲眞？(a) $b\in A$，(b) $d\notin B$，(c) $a\notin A\cap B$，(d) $f\in B\cup C$，(e) $d\in A\cap C$，(f) $A\subset B$，(g) $B\subset A$，(h) $B\subseteq A$，(i) $B\cap C=\phi$，(j) $A\cup B\subset A$，(k) $A\cup B\subseteq A$，(l) $B\cap A\subset B$

   解：(a)，(c)，(d)，(g)，(h)，(k)等敍述爲眞。

2. 寫出下列各集合的元素：(a) { x : x爲一新英格蘭州 }，(b) { x : x爲整數，且x爲方程式$x^2-x-6=0$之解 }，(c) { x : x爲英文字母中的母音 }

   解：(a) { 俄亥俄州，密西根州；…… }，(b) $\{3, -2\}$，
   (c) $\{a, e, i, o, u\}$

3. $A=\{2, 3, 5, 8, 9\}$，寫出下列各A的子集合的元素：
   (a) { x : x爲奇數 }，(b) { x : x爲偶數 }，(c) $\{x : x\geq 4\}$

   解：(a) $\{3, 5, 9\}$，(b) $\{2, 8\}$，(c) $\{5, 8, 9\}$

4. 令N表示正整數所成之集合，以集合的表示法表示下列各集合：
   (a)小於 100 的正整數所成的集合，(b)奇正整數所成的集合，
   (c)正整數的平方所成的集合

   解：(a) $\{x : x\in N, x<100\}$，(b) $\{x : x=2n+1, n\in N\}$，
   (c) $\{x : x=n^2, n\in N\}$

5. $A=\{a, b, d, f, g\}$，$B=\{a, c, d, f\}$，$C=\{b, c, d\}$，
   求：(a) $A\cup B$，(b) $B\cup C$，(c) $A\cap B$，(d) $A\cap C$

   解：(a) $A\cup B=\{a, b, c, d, f, g\}$，(b) $B\cup C=\{a, b, c, d, f\}$，
   (c) $A\cap B=\{a, d, f\}$，(d) $A\cap C=\{b, d\}$

6. $A=\{a, b, c, d, e\}$，$B=\{b, c, e, f\}$，
   $C=\{a, b, d, f, g\}$

   證明：(a) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
   (b) $A\cup(B\cap C)\neq(A\cup B)\cap C$

   解：(a) $A\cap(B\cup C)=\{a, b, c, d, e\}$

$=\{b, c, e\} \cup \{a, b, d\}$

$=(A \cap B) \cup (A \cap C)$

(b) $A \cup (B \cap C)=\{a, b, c, d, f, e\}$

但 $(A \cup B) \cap C=\{a, b, d, f\}$

故 $A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C$

7. 若 A 包含九個元素，B 包含六個元素，且 $A \cap B$ 有兩個元素，問 $A \cup B$ 有幾個元素？

解：$\because n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$

$\therefore A \cup B$ 有 $9+6-2=13$ 個元素。

8. 證明對所有的集合 S，$\phi \subseteq S$。

解：ϕ 不包含任何元素，故敘述：ϕ 中之元素均爲集合 S 之元素。恒眞，亦即 $\phi \subseteq S$。

另解：$\phi=\phi \cap S \subseteq S$。

9. 證明：若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$ 則 $A \subseteq C$。

解：令 $x \in A$，由 $A \subseteq B$ 知 $x \in B$，由 $B \subseteq C$ 知 $x \in C$。故對所有 $x \in A$，$x \in C$ 均成立，因此 $A \subseteq C$。

*10. A 和 B 爲宇集合 U 的子集合，證明：$\phi \subseteq A \cap B \subseteq A \cup B \subseteq U$。

解：由 8. 知 $\phi \subseteq A \cap B$，若 $x \in A \cap B$ 則 $x \in A$ 且 $x \in B$，故 x 必屬於 $A \cup B$，$\therefore A \cap B \subseteq A \cup B$，因 A、B 均爲 U 之子集合，故 $x \in A$ 或 $x \in B$ 均得 $x \in U$，故 $A \cup B \subseteq U$。$\therefore \phi \subseteq A \cap B \subseteq A \cup B \subseteq U$ 得證。

11. 舉一個元素是集合的集合的例子。

解：$\{\{a\}, \{a, b\}\}$

12. 如何把三角形的周界看成元素都是集合的集合？

解：令三角形的三邊爲 a，b，c，則 a，b，c，分別爲各邊上所有的點所成之集合。故 $\{a, b, c\}$ 爲三角形的周界，且 a，b，c，均爲集合。

13. 說明 t 和 $\{t\}$ 之間的區別。

解：t 爲一元素，或爲一符號，而 $\{t\}$ 則爲一以 t 爲其元素的集合。

14. 說明爲什麼 $\{a, b\} \notin \{a, b, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

解：$\{a, b, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$ 之元素分別爲：a，b，$\{a, c\}$ 和 $\{a, b, c\}$。$\{a, b\}$ 不是它的元素之一，故不屬於它。

15. 令 A、B、C 爲宇集合 U 之子集，證明下列各式：

(a) $A \cup B=B \cup A$、(b) $A \cap B=B \cap A$，(c) $A \cup (A \cap B)=A$，

(d) $A\cup\phi=A$ ，(e) $A\cap\phi=\phi$ ，(f) $A\cap A=A$，

(g) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

(h) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$,

(i) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(j) $A\cap(B\cup C)\neq(A\cap B)\cup C$

解：(a) $A\cup B=\{x\in U: x\in A$ 或 $x\in B\}=\{x\in U: x\in B$ 或 $x\in A\}$
$=B\cup A$

(b) $A\cap B=\{x\in U: x\in A$ 且 $x\in B\}=\{x\in U: x\in B$ 且 $x\in A\}$
$=B\cap A$

(c) $A\cup(A\cap B)=\{x\in U: x\in A$ 或（$x\in A$ 且 $x\in B$）$\}$
$=\{x\in U: x\in A\}=A$

(d) $A\cup\phi=\{x\in U: x\in A$ 或 $x\in\phi\}=\{x\in U: x\in A\}=A$

(e) $A\cap\phi=\{x\in U: x\in A$ 且 $x\in\phi\}=\phi$

(f) $A\cap A=\{x\in U: x\in A$ 且 $x\in A\}=A$

(g) $A\cup(B\cup C)=\{x\in U: x\in A$ 或（$x\in B$ 或 $x\in C$）$\}$
$=\{x\in U:$（$x\in A$ 或 $x\in B$）或 $x\in C$）$\}$
$=(A\cup B)\cup C$

(h) $A\cap(B\cap C)=\{x\in U: x\in A$ 且 $x\in B$ 且 $x\in C\}=(A\cap B)\cap C$

(i) $A\cap(B\cup C)=\{x\in U: x\in A$ 且（$x\in B$ 或 $x\in C$）$\}$
$=\{x\in U: x\in A$ 且 $x\in B$ 或 $x\in A$ 且 $x\in C\}$
$=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(j) 舉一反例說明：令 $U=N$，$A=\{0\}$，$B=\{1\}$，$C=\{0,1\}$
$A\cap(B\cup C)=\{0\}\cap\{0,1\}=\{0\}$，
但 $(A\cap B)\cup C=(\{0\}\cap\{1\})\cup\{0,1\}=\phi\cup\{0,1\}=\{0,1\}$
故 $A\cap(B\cup C)\neq(A\cap B)\cup C$

16. 令 A 爲宇集 U 之子集合，在 U 中不在 A 中之所有元素所成之集合稱爲 A 的補集，記爲 A，證明：(a) $A\cup A'=U$，(b) $A\cap A'=\phi$，(c) $\phi'=U$

解：(a) $A\cup A'=\{x\in U: x\in A$ or $x\in A'\}$
$=\{x\in U: x\in A$ or $x\in U\setminus A\}=U$

(b) $A\cap A'=\{x\in U: x\in A$ and $x\in A'\}=\phi$

(c) $\phi'=\{x\in U: x\notin\phi\}=\{x\in U: x\in U, x\notin\phi\}=U$

17. 令 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{a,c,f\}$ 爲宇集 $U=\{a,b,c,d,e,f\}$ 的子集合。寫出下列各集合之元素：(i) A'，(ii) B'，(iii) $A'\cup B$，

(iv) $A\cup B'$ ，(v) $A'\cup B'$ ，(vi) $A'\cap B'$

解：(i) $A'=\{d,e,f\}$，(ii) $B'=\{b,d,e\}$

(iii) $A'\cup B=\{a,c,d,e,f\}$，(iv) $A\cup B'=\{a,b,c,d,e\}$

(v) $A'\cup B'=\{b,d,e,f\}$，(vi) $A'\cap B'=\{d,e\}$

18. A、B為宇集合U之子集，證明(I) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

(II) $(A\cap B)'=A'\cup B'$（此二式稱為廸摩根定律）

解：(I) $(A\cup B)'=\{x\in U:x\notin A\cup B\}=\{x\in U:x\notin A$ 且 $x\notin B\}$

$=\{x\in U:x\notin A\}\cap\{x\in U:x\notin B\}=A'\cap B'$

(II) $(A\cap B')=\{x\in U:x\notin(A\cap B)\}=\{x\in U:x\notin A$ 或 $x\notin$

$B\}$

$=\{x\in U:x\notin A\}\cup\{x\in U:x\notin B\}$

$=A'\cup B'$

19. 利用廸摩根定律證明：若A,B,C為宇集U之子集合則：

(I) $(A\cup B\cup C)'=A'\cap B'\cap C'$，(II) $(A\cap B\cap C)'=A'\cup B'\cup C'$

解：$(A\cup B\cup C)'=(A\cup B)'\cap C'=A'\cap B'\cap C'$

$(A\cap B\cap C)'=(A\cap B)'\cup C'=A'\cup B'\cup C'$。

令S表所有可能之結果，使得A，B兩隊作積分相等的最後決賽（ray off）試決定S元素之個數，(a)在一個五戰三勝的最後決賽，(b)在一個七戰四勝的最後決賽。

解：(a)欲使兩隊積分相等，即前四場兩隊各勝2場，共有 $C^4_2=6$種可能，而最後結果可能A勝亦可能B勝，故共有$6\times2=12$種可能，即 $n(s)=12$

(b)同理 $n(s)=C^7_3\times2=70$

21. 所有A之子集合所成之集合叫做冪集合，記為$P(A)$，若$A=\{b,c,d\}$，求$P(A)$，〔注意：$\phi\in P(A)$，$A\in P(A)$〕，若集合S包含n個元素，試證$P(S)$有2^n個元素。

解：$A=\{b,c,d\}$ ∴

$$P(A)=\left\{\begin{array}{l}\{b\},\{c\},\{d\}\\ \{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}\\ \{b,c,d\},\phi\end{array}\right\}$$

若S有n個元素，則其子集可分類為無元素者，包含一個元素者，兩個元素者，……，n個元素者，

無元素者有$1=c(n,0)$個，即ϕ，

包含一元素者有：$c(n, 1)=n$ 個

…………

…………

⋮

包含 k 元素者有：$c(n, k)$ 個

⋮　………

⋮　………

包含 n 元素者有：$c(n, n)=1$ 個，即 S，

故 $P(A)$ 之元素個數共有 $c(n, 0)+c(n, 1)+\cdots\cdots+c(n, k)+\cdots\cdots+c(n, n)=2^n$ 個

$(\because c(n, 0)+c(n, 1)+\cdots\cdots+c(n, n)=(1+1)^n=2^n)$

習　題 1-2

1. 在 x－軸上標出下列各點的位置：(a) 3　(b) -2　(c) $\frac{4}{5}$　(d) $\frac{13}{4}$　(e) $-\frac{8}{3}$

   解：略

2. 在 x－軸上標出下列各點的位置：(a) 2　(b) -4　(c) $\frac{3}{5}$　(d) $\frac{15}{4}$　(e) $-\frac{7}{3}$

   解：略

3. 在 x 軸上標出下列各點的大略位置：(a) $\sqrt{5}$　(b) $\sqrt{6}$　(c) $\sqrt[3]{-9}$　(d) $\frac{\pi}{3}$　(e) $\sqrt{2}+\pi$

   解：略

4. 在 x 軸上標出下列各點的大略位置：(a) $\sqrt{3}$　(b) $\sqrt{10}$　(c) $\sqrt[3]{-10}$　(d) π　(e) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

   解：略

5. 令 $\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$ 爲有理數，試證明其和、差、乘積，均爲有理數。其商：$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$ 是否仍爲有理數？

   解：$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$ 爲有理數，$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{bd}$ 爲有理數

   若 $\frac{c}{d}\neq 0$ 即 $c\neq 0$ 則 $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$ 爲有理數

6. 證明下列各數爲無理數：(a) $\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{6}$ (c) $\sqrt[3]{3}$ (d) $1-\sqrt{2}$
(e) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (f) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$

解：(a)若 $\sqrt{3}$ 爲有理數，則 $\exists$ 互質之整數 p，q，使得 $\sqrt{3}=\dfrac{p}{q}$

$\therefore 3q^2=p^2$ ……① $\therefore 3 \mid p^2$ 因 3 爲質數，故 $3 \mid p$，
$\therefore$ 存在一 p_1 使得 $p=3p_1$ 代入①得 $3q^2=3^2p_1^2$，即 $q^2=3p_1^2$，
同理可知 $q=3q_1$，故 3 爲 p，q 之共同因子，此和 p，q 互質之假設矛盾，故 $\sqrt{3}$ 必爲無理數。

(b)和(a)之作法相同。

(c)若 $\sqrt[3]{3}$ 爲有理數，則存在互質之 p，q 使得 $\sqrt[3]{3}=\dfrac{p}{q}$，即 $3q^3=p^3$

$\therefore 3 \mid p^3$，3 爲質數，故 $3 \mid p$，$p=3p_1$，同理可知 $\exists p_2$ 使得 $q=3p_2$ 和 p，q 互質之假定矛盾，故 $\sqrt[3]{3}$ 爲無理數。

(d)若 $r=1-\sqrt{2}$ 爲有理數，則 $\sqrt{2}=1-r$ 爲有理數，此爲矛盾，故知 $1-\sqrt{2}$ 爲無理數。

(e)若 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 爲有理數，則 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}=r$ 爲有理數，故 $\sqrt{6}=\dfrac{1}{2}(r-5)$ 爲有理數，和(b)矛盾，故知 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 爲無理數。

(f) 同上。

7. 證明 $n\sqrt{2}$ 爲無理數，$n=2$，3，4，……

解：若 $n\sqrt{2}$ 爲有理數，則 $n\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$，p，q 爲互質之整數。$n=2$，3，4…… $\therefore \sqrt{2}=\dfrac{p}{nq}$ 爲有理數，矛盾，故 $n\sqrt{2}$ 爲無理數。

8. 已知 π 爲無理數，證明 $n+\pi$ 爲無理數，$n \in N$

解：若 $r=n+\pi$ 爲有理數，則 $\pi=r-n$ 爲有理數。($n \in N$) 和已知矛盾，故 $n+\pi$ 爲無理數。

9. 證明若非空的實數集 S 有最小上界 b，則 b 爲唯一。

解：設 b' 爲另一最小上界，由定義知 $b \leq b'$，$b' \leq b$，故 $b'=b$，最小上界唯一。

10. 若 a，x，$b \in R$，且 $a+x=b$，證明：$x=b+(-a)$

解：$a+x=b$ $\therefore a+x+(-a)=b+(-a)$
$a+(-a)+x=b+(-a)$ （公設 3）

$0+x=b+(-a)$　　　　（公設6）

$x=b+(-a)$　　　　（公設4）

11. 若 a，x，b，$\in R$，$a\neq 0$，且 $ax=b$，證明 $x=ba^{-1}$

解：$ax=b$　$\therefore axa^{-1}=ba^{-1}$

$\therefore aa^{-1}x=ba^{-1}$　　　　（公設3）

$1\cdot x=ba^{-1}$　　　　（公設7）

$x=ba^{-1}$　　　　（公設5）

12. 證明若 $a\in R$ 則 $a\cdot 0=0$

解：$a\cdot 0=a\cdot(1+(-1))=a+(-a)=0$

13 證明若 a，$b\in R$ 且 $a\cdot b=0$ 則 $a=0$ 或 $b=0$

解：若 $a,b\in R$，$a\neq 0$，$a\cdot b=0$ 則 $a^{-1}\cdot a\cdot b=a^{-1}\cdot 0=0$

$\therefore b=0$。同理若 $b\neq 0$ 則 $a=0$

14 若 a 爲有理數，b 爲無理數，證明 $a+b$ 爲無理數，而 $a\cdot b$ 可能爲有理數，亦可能爲無理數。

解：若 $r=a+b$ 爲有理數，則 $b=r-a$ 爲有理數，已知矛盾，故 $a+b$ 爲無理數。

若 $a=2$，$b=\sqrt{2}$，則 $a\cdot b=2\sqrt{2}$ 爲無理數

若 $a=0$，$b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 則 $a\cdot b=0$ 爲有理數

15 一正方形，對角線長 d，邊長爲 x，證明不存在實數 k，使得 $d=mk$ 且 $x=nk$，其中 m，n 爲正整數。也就是說，不論一線段的長度 k 有多短，都沒法把 d 和 x 分成 k 的整數倍。

解：若存在一 $k\in R$，使得 $d=mk$ 且 $x=nk$，則由 $d^2=2x^2$ 得：

$m^2k^2=2n^2k^2$　$\therefore 2=\dfrac{m^2}{n^2}$　$\therefore \sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$，（$m$，$n$ 爲正整數），得

$\sqrt{2}$ 爲有理數，此爲矛盾之結果，故不可能存在這樣的 k

16 令 $\dfrac{p}{q}$ 爲方程式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的有理根，其中 a_0，$a_1\cdots\cdots a_n$ 爲整數，$a_0\neq 0$ 且 p，q 互質，證明，p 是 a_n 的因數，q 是 a_0 的因數。

解：$\dfrac{p}{q}$ 爲 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$ 之根，

故 $a_0\dfrac{p^n}{q^n}+a_1\dfrac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+\cdots\cdots+a_n=0$，兩邊乘 q^n

$\therefore a_0p^n + a_1p^{n-1}q + a_2q^{n-2}q^2 + \cdots\cdots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0$

$\therefore p\,[\,a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + \cdots\cdots + a_{n-1}q^{n-1}\,] = -a_nq^n \Rightarrow p \mid a_nq^n$

p，q 互質，$\therefore p \nmid q^n$ $\quad\therefore p \mid a_n$，

$a_0p^n = -q\,[\,a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2}q + \cdots\cdots + a_nq^{n-1}\,] \Rightarrow q \mid a_0p^n$

p，q 互質，故 $q \nmid p^n$ $\quad\therefore q \mid a$

習　題 1-3

1. 9的方根爲何？$\sqrt{9}$的值爲何？

   解：9之方根爲± 3，而$\sqrt{9}$之值爲3

2. 計算：(a) $\sqrt{4}$，(b) $-\sqrt{9}$，(c) $\sqrt{(-3)^2}$，(d) $\sqrt{0}$

   解：(a) $\sqrt{4} = 2$，(b) $-\sqrt{9} = -3$，(c) $\sqrt{(-3)^2} = 3$，(d) $\sqrt{0} = 0$

3. 證明 $-k \le u \le k$，若且唯若 $|u| \le k$

   解：$-k \le u \le k$，若 $u \ge 0$，則 $|u| = u \le k$

   若 $u \le 0$，因 $-k \le u$，故 $-u \le k$，$\therefore |u| = -u \le k$

   反之若 $|u| \le k$，則由定義知 $-k \le u \le k$

4. 計算：(a) $|-3|$，(b) $|3|$，(c) $|0|$，(d) $|-3+4|$，(e) $|-4-5|$，(f) $|-x|-|x|$，(g) $|x|^2 + x^2$

   解：(a) $|-3| = 3$，(b) $|3| = 3$，(c) $|0| = 0$，(d) $|-3+4| = 1$，

   (e) $|-4-5| = 9$，(f) $|-x|-|x| = |x|-|x| = 0$，

   (g) $|x|^2 + x^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$

5. 證明：(a) $|x-y| \le |x| + |y|$，(b) $|x| - |y| \le |x+y|$，(c) $|x| - |y| \le |x-y|$

   解：(a) $|x-y| \le |x| + |-y|$（三角不等式）

   $= |x| + |y|$

   (b) $|x| = |x+y-y| \le |x+y| + |-y| = |x+y| + |y|$

   移項得 $|x| - |y| \le |x+y|$

   (c) $|x| = |x-y+y| \le |x-y| + |y|$

   移項得 $|x| - |y| \le |x-y|$

6. 計算：(a) $0+0$，(b) $0 \cdot 0$，(c) $\frac{6}{0}$，(d) $\frac{0}{7}$，(e) $\frac{0}{0}$

   解：(a) $0+0=0$，(b) $0 \cdot 0 = 0$，(c) $\frac{6}{0}$無意義，(d) $\frac{0}{7} = 0$，(e) $\frac{0}{0}$無意義。

7. 試求$\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x+4)}$之值，當 $x=$(a) 1，(b) 2，(c) 3，(d) -2，(e) -4

解：(a) $x=1$　$\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x+4)}=\dfrac{0}{(-2)\cdot 5}=0$

(b) $x=2$　$\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x+4)}=\dfrac{1\cdot 4}{(-1)\cdot 6}=-\dfrac{2}{3}$

(c) $x=3$　$\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x+4)}=\dfrac{2\cdot 5}{0\cdot 7}=\dfrac{10}{0}$ 無意義

(d) $x=-2$　$\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x+4)}=\dfrac{(-3)\cdot 0}{(-5)\cdot 2}=0$

(e) $x=-4$　$\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x+4)}=\dfrac{(-5)\cdot(-2)}{(-7)\cdot 0}=\dfrac{10}{0}$ 無意義

8. 求$\dfrac{(x^2-4)}{(x-2)}$ 之值當 $x=$(a) 1，(b) 2，(c) 3，(d) 4，(e) -2

解：(a) $x=1$　$\dfrac{(x^2-4)}{(x-2)}=\dfrac{-3}{-1}=3$

(b) $x=2$　$\dfrac{(x^2-4)}{(x-2)}=\dfrac{0}{0}$ 無意義

(c) $x=3$　$\dfrac{(x^2-4)}{(x-2)}=\dfrac{5}{1}=5$

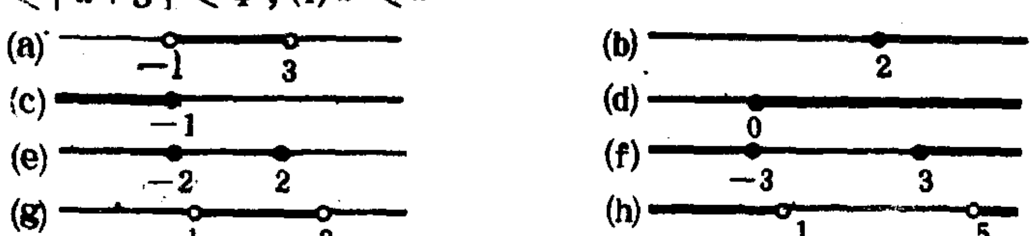
(d) $x=4$　$\dfrac{(x^2-4)}{(x-2)}=\dfrac{12}{2}=6$

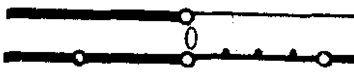
(e) $x=-2$　$\dfrac{(x^2-4)}{(x-2)}=\dfrac{0}{-4}=0$

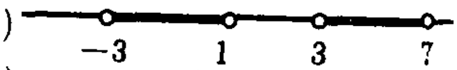
9. 下列何者爲眞？(a) $3<2$，(b) $-3>-5$，(c) $0<-4$，(d) $2>-3$
(e) $|x|>x$，(f) $-3\geq-3$

解：(b)，(d)，(f)爲眞。

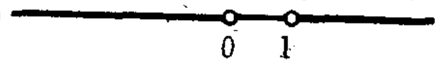
10 作出下列各點集合在 x 軸上之圖。(a) $-1<x<3$，(b) $x\geq 2$，
(c) $x\leq-1$，(d) $x\geq 0$，(e) $|x|\leq 2$，(f) $|x|\geq 3$，(g) $|x-2|<1$，
(h) $|x-3|>2$，(i) $-\infty<x<0$，(j) $1<|x-2|<5$，
(k) $2<|x+3|<4$，(l) $x<x^2$

解：


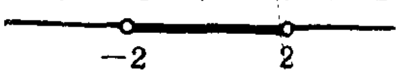
(i) 

(j) 

(k) 

(l) 

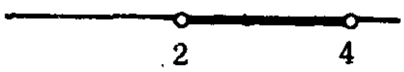
11. 作出下列各集合在X軸上之圖。(a) $\{x : |x| < 2\}$，
(b) $\{x : -1 < x \leq 3\}$，(c) $\{x : |x| \geq 1\}$，(d) $\{x : (x-4)(x+1)=0\}$，
(e) $\{x : |x-3| < 1\}$，(f) $\{x : |x+2| \geq 3\}$，(g) $\{x : 0 \leq x\}$，
(h) $\{x : x(x-1)(x-2) > 2\}$

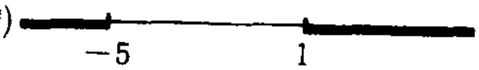
解：(a) 

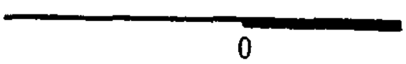
(b) 

(c) 

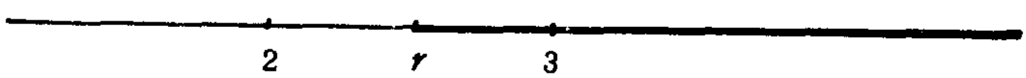
(d) 

(e) 

(f) 

(g) 

(h) $x(x-1)(x-2) > 2$
當 $x \leq 0$ 時，$x(x-1)(x-2) < 0$ 不合，
當 $0 < x \leq 1$ 時，$x(x-1)(x-2) > 2$ 無解，因
$(x-1)(x-2) < 2$，$x(x-1)(x-2) < 2$ 故也
故知 $x \leq 2$ 時均不合條件。
又當 $x_1 > x_2 > 2$ 時，$x_1(x_1-1)(x_1-2) > x_2(x_2-1)(x_2-2)$
亦即其值爲遞增，$x = 2$ 時代入得 0，$x = 3$ 時代入得
$x(x-1)(x-2) = 6 > 2$。由上之討論知必有一實數 r 介於 2 和 3
之間，使得 $x > r$ 時 $x(x-1)(x-2) > 2$ 成立。



12. 若有理數$\frac{a}{b}$大於有理數$\frac{c}{d}$，證明其算數平均數m是有理數，且$\frac{c}{d} < m < \frac{a}{b}$

解：$m = \dfrac{\frac{c}{d} + \frac{a}{b}}{2} = \dfrac{bc + ad}{2bd}$ 爲有理數，

$$\frac{c}{d} < \frac{a}{b} \quad \therefore \quad \left.\begin{aligned} m &= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{d} + \frac{a}{b}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} \\ m &= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{d} + \frac{a}{b}\right) > \frac{1}{2}\left(\frac{c}{d} + \frac{c}{d}\right) = \frac{c}{d} \end{aligned}\right\} \text{故} \frac{c}{d} < m < \frac{a}{b}$$

13. 找出下列各等式的解集合。(a) $x^2 + 4x - 12 = 0$，(b) $4x^2 = 1$，
(c) $x^2 + 3x + 1 = 0$，(d) $x^2 + x + 1 = 0$，(e) $|x-3| = 2$，
(f) $|x+4|\,|x-3| = 0$，(g) $|2x| = |x-2|$，(h) $|x-2| = |x+3|$
(i) $|3x + 4| = x + 1$，(j) $|x - 6| = 3x + 1$