



注册公用设备工程师考试 公共基础课精讲精练

给水排水 暖通空调及动力专业

刘燕 主编



中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS



**注册公用设备工程师考试
公共基础课精讲精练**

**给水排水
暖通空调及动力专业**

刘 燕 主编



中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

注册公用设备（给水排水、暖通空调及动力专业）工程师执业资格考试已经开始，为有效指导考生复习、应考而组织编写的本辅导教材，以中华人民共和国建设部 2009 年公布的《注册公用设备工程师基础考试大纲》为依据，以考试大纲中提供的参考书目为基础，集中了编者们的专业知识和多年丰富的教学、辅导经验，使其具有较强的指导性和实用性。

本教材力求简明扼要，联系实际，着重于对概念的理解和运用，特别是其中的例题结合考题的形式，注意突出重点概念的讲解。每章前附有考试大纲，每章后附有复习题以及复习题答案与提示，可作为考生检验复习效果和准备考试之用，最后有三套模拟试卷可作为考前冲刺的训练。书中将 2009~2011 年的考试真题穿插于全书之中，并进行了详细讲解，以供读者参考。

由于很多专业（如电气、结构、岩土、环保等）工程师执业资格公共基础部分的考试大纲完全相同，因此本书不仅是参加公用设备（给水排水、暖通空调及动力专业）工程师执业资格公共基础考试人员的必备参考书，也同样适用于其他与注册公用设备工程师公共基础考试大纲相同的专业。

图书在版编目（CIP）数据

2012 注册公用设备工程师考试公共基础课精讲精练·给水排水暖通空调及动力专业/刘燕主编. —北京：中国电力出版社，2012.2

ISBN 978-7-5123-2672-9

I. ①2… II. ①刘… III. ①城市公用设施—工程师—资格考试—自学参考资料②给排水系统—工程师—资格考试—自学参考资料③建筑工程—供热系统—工程师—资格考试—自学参考资料④建筑工程—通风系统—工程师—资格考试—自学参考资料⑤建筑工程—空气调节系统—工程师—资格考试—自学参考资料 IV. ①TU8

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 019245 号

中国电力出版社出版发行

北京市东城区北京站西街 19 号 100005 <http://www.cepp.sgcc.com.cn>

责任编辑：梁 瑶 电话：010-63412605

责任印制：蔺义舟 责任校对：李 亚

汇鑫印务有限公司印刷·各地新华书店经售

2012 年 3 月第 1 版·第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16·39.5 印张·964 千字

定价：88.00 元

敬告读者

本书封面贴有防伪标签，加热后中心图案消失

本书如有印装质量问题，我社发行部负责退换

版权专有 翻印必究

编委会成员

主 编 刘 燕

参 编 (以学科顺序为序)

李群高 程学平 岳冠华 刘 燕 张 英

王文海 叶安丽 刘辛国 陈志新 姜 军

章美芬

各章编写人员名单

数 学 (李群高)

流体力学 (王文海)

物 理 学 (程学平)

电气与信息 (叶安丽 刘辛国

化 学 (岳冠华)

陈志新)

理论力学 (刘 燕)

法律法规 (姜 军)

材料力学 (张 英)

工程经济 (章美芬)

前 言

原建设部和人事部决定自 2005 年起实施注册公用设备（给水排水、暖通空调及动力专业）工程师执业资格考试制度，这是为适应社会主义市场经济体制，使工程设计管理体制和人事管理制度尽快与国际接轨的一项配套改革措施。要想取得注册公用设备（给水排水、暖通空调及动力专业）工程师执业资格，必须通过全国统一考试取得证书后方可执业上岗。

为配合全国注册公用设备（给水排水、暖通空调及动力专业）工程师资格考试，也为有效指导考生复习和应考，特组织编写本辅导教材，以中华人民共和国建设部 2009 年公布的注册公用设备工程师公共基础考试大纲为依据，以考试大纲中提供的参考书目为基础，集中了编者们深厚的专业知识和多年丰富的教学、辅导经验，使其具有较强的指导性和实用性。本书包含了数学、物理学、化学、理论力学、材料力学、流体力学、电气与信息、法律法规和工程经济九门课程的基础知识。

本辅导教材自 2005 年出版以来，深受广大读者和考生的好评，已修订过多次。本次出版，主要是将 2009 年修订考试大纲后的三年考试真题（2009 ~ 2011 年）编入了本书中的例题、复习题和模拟试卷中，同时在内容上也进行了修改。

本次出版后教材的主要特点是：

- (1) 为方便考生了解考试内容，在每一章开始时附有该章的考试大纲。
- (2) 教材简明扼要，联系实际，着重于对概念的理解和运用。
- (3) 教材中的例题和复习题参考历年考试真题（特别是大纲修改后这三年的考试真题）的形式，注意突出重点概念的讲解。
- (4) 每章后均附有参考复习题以及习题的答案和提示，作为练习和检验复习效果之用。
- (5) 最后的三套模拟试卷可作为考前冲刺的训练。

由于很多专业（如电气、结构、岩土、环保等）工程师执业资格公共基础部分的考试大纲完全相同，因此本书不仅是参加公用设备（给水排水、暖通空调及动力专业）工程师执业资格公共基础考试人员的必备参考书，也同样适用于其他与注册公用设备工程师公共基础考试大纲相同的专业。

由于时间仓促，在编写过程中难免有疏漏之处，恳请读者指正。

编者
2012 年 1 月

目 录

前言

第一篇 工程科学基础

第 1 章 数学 1	1.5.6 二阶线性微分方程 49
考试大纲 1	1.6 线性代数 50
1.1 空间解析几何 2	1.6.1 行列式 50
1.1.1 向量代数 2	1.6.2 矩阵 53
1.1.2 平面 4	1.6.3 n 维向量的线性相关性 60
1.1.3 直线 6	1.6.4 线性方程组 61
1.1.4 曲面 8	1.6.5 矩阵的特征值与特征向量 65
1.1.5 空间曲线 9	1.6.6 二次型 67
1.2 微分学 10	1.7 概率与数理统计 69
1.2.1 极限与函数的连续性 10	1.7.1 随机事件的概率 69
1.2.2 导数与微分 15	1.7.2 一维随机变量及其分布 76
1.2.3 偏导数与全微分 18	1.7.3 数理统计的基本概念 82
1.2.4 导数与微分应用 19	1.7.4 参数估计 86
1.3 积分学 23	1.7.5 假设检验 89
1.3.1 不定积分 23	复习题 92
1.3.2 定积分 27	复习题答案与提示 107
1.3.3 广义积分 30	第 2 章 物理学 117
1.3.4 重积分 31	考试大纲 117
1.3.5 平面曲线积分 36	2.1 热学 117
1.3.6 定积分应用 37	2.1.1 复习指导 117
1.4 无穷级数 39	2.1.2 气体状态参量 平衡态 117
1.4.1 常数项级数 39	2.1.3 理想气体状态方程 118
1.4.2 幂级数 42	2.1.4 理想气体的压强和温度的 统计解释 118
1.4.3 傅里叶级数 45	2.1.5 能量按自由度均分原理 119
1.5 常微分方程 46	2.1.6 理想气体内能 120
1.5.1 微分方程的基本概念 46	2.1.7 麦克斯韦速率分布定律 120
1.5.2 可分离变量方程 47	2.1.8 平均碰撞次数和平均自由程 122
1.5.3 一阶线性微分方程 47	2.1.9 内能、功和热量 123
1.5.4 全微分方程 47	2.1.10 热力学第一定律 123
1.5.5 可降阶微分方程 49	

2.1.11 热力学第一定律在理想气体等效过程和绝热过程中的应用	124	3.3.1 反应热与热化学方程式	184
2.1.12 气体摩尔热容	125	3.3.2 化学反应速率	186
2.1.13 循环过程和卡诺循环	126	3.3.3 化学反应方向判断	189
2.1.14 热力学第二定律及其统计意义	127	3.3.4 化学平衡	190
2.1.15 可逆过程和不可逆过程	128	3.3.5 化学平衡移动的原理	192
2.2 波动学	128	3.4 氧化还原反应与电化学	193
2.2.1 复习指导	128	3.4.1 氧化还原反应的概念	193
2.2.2 机械波的产生与传播	128	3.4.2 原电池	194
2.2.3 简谐波的表达式	130	3.4.3 电极电势	195
2.2.4 波的能量	131	3.4.4 电极电势的应用	197
2.2.5 波的干涉、驻波	132	3.4.5 金属的腐蚀及防护	198
2.2.6 声波、声强、声强级	134	3.5 有机化学	199
2.2.7 多普勒效应	134	3.5.1 有机物的特点及分类	199
2.3 光学	134	3.5.2 烃及烃的衍生物的分类及结构特征	200
2.3.1 复习指导	134	3.5.3 有机化合物的命名	202
2.3.2 概述	135	3.5.4 有机物的重要化学反应	204
2.3.3 光的衍射	140	3.5.5 聚合反应	209
2.3.4 光的偏振	143	3.5.6 高分子材料	210
复习题	145	3.5.7 基本有机化合物的结构、基本性质及用途	213
复习题答案与提示	155	复习题	214
第3章 化学	160	复习题答案与提示	224
考试大纲	160	第4章 理论力学	233
3.1 物质的结构和物质状态	160	考试大纲	233
3.1.1 原子结构的近代概念	160	4.1 静力学	233
3.1.2 原子结构和元素周期律	165	4.1.1 静力学的基本概念及基本原理	233
3.1.3 氧化物及其水合物的酸碱性递变规律	167	4.1.2 力系的简化	239
3.1.4 化学键和分子结构	168	4.1.3 力系的平衡	240
3.1.5 晶体结构和性质	172	4.2 运动学	247
3.1.6 物质状态	174	4.2.1 点的运动学	247
3.2 溶液	175	4.2.2 刚体的基本运动	249
3.2.1 溶液浓度	175	4.2.3 点的合成运动	252
3.2.2 稀溶液的通性	176	4.2.4 刚体的平面运动	254
3.2.3 弱电解质溶液的解离平衡	178	4.3 动力学	257
3.2.4 难溶电解质的多相解离平衡	182	4.3.1 动力学基本定律及质点运动微分方程	257
3.3 化学反应速率及化学平衡	184		

4.3.2 动力学普遍定理	258	5.6.5 梁的合理截面形状	304
4.3.3 达朗贝尔原理	264	5.6.6 弯曲中心的概念	305
4.3.4 质点的直线振动	267	5.6.7 梁的位移	306
复习题	272	5.7 应力状态	308
复习题答案与提示	282	5.7.1 点的应力状态	308
第5章 材料力学	286	5.7.2 平面应力状态	309
考试大纲	286	5.7.3 三向应力状态简介	310
5.1 材料在拉伸、压缩时的力学性能	286	5.7.4 广义虎克定律	310
5.2 拉伸和压缩	288	5.7.5 强度理论	311
5.2.1 轴向拉伸与压缩的概念	288	5.8 组合变形	314
5.2.2 轴向拉伸与压缩杆件的内力	288	5.8.1 斜弯曲	314
5.2.3 强度条件	290	5.8.2 拉(压)弯组和变形	315
5.2.4 轴向拉压杆的变形		5.8.3 弯扭组合变形	315
虎克定律	291	5.9 压杆稳定	317
5.3 剪切和挤压	293	5.9.1 压杆稳定的临界力	
5.3.1 连接件的实用计算	293	欧拉公式	317
5.3.2 切应力互等定理剪切		5.9.2 欧拉公式的适用范围及	
虎克定律	295	经验公式	318
5.4 扭转	295	5.9.3 压杆的稳定计算	319
5.4.1 扭转的概念	295	5.9.4 提高压杆稳定性的措施	319
5.4.2 外力偶矩的计算	295	复习题	321
5.4.3 扭矩和扭矩图	295	复习题答案与提示	333
5.4.4 圆杆在扭转时的应力和		第6章 流体力学	336
强度条件	296	考试大纲	336
5.4.5 圆杆扭转时的变形	297	6.1 流体的主要物性与流体静力学	336
5.5 截面几何性质	298	6.1.1 压缩性和膨胀性	336
5.5.1 静矩与形心	298	6.1.2 流体的黏性与牛顿	
5.5.2 极惯性矩、惯性矩、惯性积、		内摩擦定律	337
惯性半径	298	6.1.3 流体静压强及其特性	338
5.5.3 惯性矩的平行移轴公式	299	6.1.4 重力作用下流体静压强的	
5.5.4 惯性主轴和主惯性矩	299	分布规律及其度量	338
5.6 弯曲	299	6.1.5 作用于平面的液体	
5.6.1 平面弯曲的概念	299	总压力计算	339
5.6.2 梁的内力	300	6.2 流体动力学基础	341
5.6.3 弯曲正应力 正应力		6.2.1 以流场为对象描述	
强度条件	303	流动的概念	341
5.6.4 弯曲切应力 弯曲切应力		6.2.2 流体运动的总流分析	341
强度条件	304	6.3 流动阻力和能量损失	345

6.3.1 实际流体的两种流态 层流和紊流	345	6.5.2 产生均匀流的条件	354
6.3.2 圆管中的层流运动 紊流运动的特征	345	6.5.3 明渠恒定非均匀流的 流动状态	354
6.3.3 沿程水头损失和局部 水头损失	346	6.5.4 明渠恒定均匀流的水力计算	355
6.3.4 减小阻力的措施	349	6.6 渗流、井和集水廊道	357
6.4 孔口管嘴管道流动	350	6.6.1 土壤的渗流特性	357
6.4.1 孔口自由出流、孔口 淹没出流	350	6.6.2 达西定律	357
6.4.2 管嘴出流	351	6.6.3 井和集水廊道	358
6.4.3 有压管道恒定流	352	6.7 相似原理和量纲分析	360
6.4.4 管道的串联和并联	352	6.7.1 力学相似原理	360
6.5 明渠恒定流	354	6.7.2 相似准则	360
6.5.1 明渠均匀水流特性	354	6.7.3 量纲分析法	361
		复习题	362
		复习题答案与提示	370

第二篇 现代技术基础

第7章 电气与信息	374	7.3.3 常用电动机的继电 - 接触器 控制	393
考试大纲	374	7.4 信号与信息	395
7.1 电磁学概念	375	7.4.1 信息	395
7.1.1 库仑定律	375	7.4.2 数据	395
7.1.2 高斯定理	375	7.4.3 信号	396
7.1.3 安培环路定律	376	7.4.4 模拟信号与信息	398
7.1.4 电磁感应定律	376	7.4.5 数字信号与信息	400
7.2 电路知识	377	7.5 模拟电子技术	403
7.2.1 电路基本元件	377	7.5.1 半导体二极管	403
7.2.2 欧姆定律	378	7.5.2 整流电路和滤波电路	403
7.2.3 基尔霍夫定律	378	7.5.3 稳压电路	405
7.2.4 叠加原理	379	7.5.4 三极管和单管放大电路	406
7.2.5 戴维宁定理	379	7.5.5 运算放大器	409
7.2.6 正弦交流电路	380	7.6 数字电子技术	412
7.2.7 三相电路	386	7.6.1 基本门电路	412
7.2.8 安全用电常识	388	7.6.2 触发器	415
7.2.9 RC 和 RL 电路暂态过程	390	7.7 计算机系统	417
7.3 变压器与电动机	391	7.7.1 计算机系统概述	417
7.3.1 变压器	391	7.7.2 计算机硬件的组成及功能	418
7.3.2 三相异步电动机的使用	392	7.7.3 计算机软件的组成及功能	419

7.8 信息表示	423	7.10.2 计算机网络的特点	430
7.8.1 信息在计算机内的表示	423	7.10.3 计算机网络的基本组成	430
7.8.2 数制转换	424	7.10.4 计算机网络的主要功能与 应用	430
7.8.3 典型考题举例及解析	426	7.10.5 网络的拓扑结构	430
7.9 常用操作系统	427	7.10.6 网络的传输介质	431
7.9.1 Windows 操作系统的发展	427	7.10.7 计算机网络的分类	431
7.9.2 操作系统的管理功能	427	复习题	434
7.10 计算机网络	429	复习题答案与提示	445
7.10.1 什么是计算机网络	429		

第三篇 工程管理基础

第8章 法律法规	449	8.4.1 合同法概述	467
考试大纲	449	8.4.2 合同的订立	468
8.1 中华人民共和国建筑法	449	8.4.3 合同的效力	469
8.1.1 建筑法概述	449	8.4.4 合同的履行	471
8.1.2 建筑许可	450	8.4.5 合同的变更和转让	472
8.1.3 建筑工程发包与承包	451	8.4.6 合同权利义务的终止	473
8.1.4 建筑工程监理	452	8.4.7 违约责任	474
8.1.5 建筑安全生产管理	453	8.5 中华人民共和国行政许可法	475
8.1.6 建设工程质量管理	455	8.5.1 行政许可法概述	475
8.1.7 《建筑法》规定的法律责任	456	8.5.2 行政许可的设定	476
8.2 中华人民共和国安全生产法	456	8.5.3 行政许可的实施机关	477
8.2.1 安全生产法概述	456	8.5.4 行政许可的实施程序	477
8.2.2 生产经营单位的安全 生产保障	457	8.5.5 行政许可期限	478
8.2.3 从业人员的权利和义务	459	8.5.6 行政许可听证	479
8.2.4 安全生产的监督管理	459	8.5.7 行政许可费用	479
8.2.5 生产安全事故的应急救援与 调查处理	460	8.6 中华人民共和国能源法	479
8.3 中华人民共和国招标投标法	461	8.6.1 节约能源法概述	479
8.3.1 招投标概述	461	8.6.2 节能管理	480
8.3.2 招标	461	8.6.3 合理使用与节约能源	480
8.3.3 投标	463	8.6.4 节能技术进步	480
8.3.4 开标	464	8.6.5 激励措施	481
8.3.5 评标与中标	464	8.6.6 法律责任	481
8.3.6 法律责任	465	8.7 中华人民共和国环境保护法	482
8.4 中华人民共和国合同法	467	8.7.1 环境保护法概述	482
		8.7.2 环境监督管理	482
		8.7.3 保护和改善环境	483
		8.7.4 防治环境污染和其他公害	483

8.7.5 法律责任	484	9.1.5 资金等值计算的常用公式及 应用复利系数表的应用	509
8.8 建设工程勘察设计管理条例	484	9.2 财务效益与费用估算	512
8.8.1 建设工程勘察设计管理 条例概述	484	9.2.1 项目的分类	512
8.8.2 资质资格管理	485	9.2.2 项目计算期	513
8.8.3 建设工程勘察设计发包与 承包	485	9.2.3 财务效益与费用	513
8.8.4 建设工程勘察设计文件的 编制与实施	486	9.2.4 营业收入	513
8.8.5 监督管理	486	9.2.5 补贴收入	513
8.9 建设工程质量管理条例	487	9.2.6 建设投资	513
8.9.1 建设工程质量管理条例概述	487	9.2.7 建设期利息	514
8.9.2 建设单位的质量责任和义务	487	9.2.8 流动资金	514
8.9.3 勘察、设计单位的质量 责任和义务	488	9.2.9 总成本费用	514
8.9.4 施工单位的质量责任和义务	488	9.2.10 经营成本	515
8.9.5 工程监理单位的质量 责任和义务	489	9.2.11 项目评价涉及的税费	515
8.9.6 建设工程质量保修	490	9.2.12 总投资形成的资产	515
8.10 建设工程安全生产管理条例	490	9.3 资金来源与融资方案	516
8.10.1 建设工程安全生产管理 条例概述	490	9.3.1 资金筹措的主要方式	516
8.10.2 建设单位的安全责任	491	9.3.2 资金成本	516
8.10.3 勘察、设计、工程监理及其他 有关单位的安全责任	491	9.3.3 债务偿还的主要方式	517
8.10.4 施工单位的安全责任	492	9.4 财务分析	517
8.10.5 监督管理	494	9.4.1 财务评价的内容	517
8.10.6 生产安全事故的应急救援和 调查处理	494	9.4.2 盈利能力分析	518
复习题	495	9.4.3 偿债能力分析	521
复习题答案与提示	504	9.4.4 财务生存能力分析	522
第9章 工程经济	507	9.4.5 财务分析报表	522
考试大纲	507	9.4.6 基准收益率	526
9.1 资金的时间价值	507	9.5 经济费用效益分析	526
9.1.1 资金时间价值的概念	507	9.5.1 经济费用和效益	526
9.1.2 利息及计算	507	9.5.2 社会折现率	526
9.1.3 名义利率与实际(或称有效) 利率	508	9.5.3 影子价格	527
9.1.4 现金流量及现金流量图	508	9.5.4 影子汇率	527
		9.5.5 影子工资	527
		9.5.6 经济净现值	528
		9.5.7 经济内部收益率($EIRR$)	528
		9.5.8 经济效益费用比(R_{BC})	528
		9.6 不确定性分析	529
		9.6.1 盈亏平衡分析	529
		9.6.2 敏感性分析	530
		9.7 方案经济比选	532

9.7.1	方案比选的类型	532	9.9.2	功能分析	538
9.7.2	方案经济比选方法	532	9.9.3	功能评价	539
9.7.3	计算期不同的互斥方案的 比选	534	9.9.4	价值评价	540
9.8	改扩建项目经济评价特点	536	9.9.5	改进方案创新和评价	540
9.8.1	改扩建项目的特点	536	附录	复利系数表	541
9.8.2	改扩建项目经济评价中效益费用 识别与估算原则	536	复习题		544
9.8.3	改扩建项目财务分析的 两层次	536	复习题答案与提示		547
9.8.4	改扩建项目的经济费用 效益分析	536	模拟试卷(一)		550
9.9	价值工程	537	模拟试卷(一)答案与提示		565
9.9.1	价值工程的概念、内容与 实施步骤	537	模拟试卷(二)		572
			模拟试卷(二)答案与提示		586
			模拟试卷(三)		594
			模拟试卷(三)答案与提示		609
			参考文献		616

第一篇 工程科学基础

第1章 数 学

考试大纲

1.1 空间解析几何 向量的线性运算 向量的数量积、向量积及混合积两向量垂直、平行的条件 直线方程 平面方程 平面与平面、直线与直线、平面与直线之间的位置关系 点到平面、直线的距离 球面、母线平行于坐标轴的柱面、旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程 常用的二次曲面方程 空间曲线在坐标面上的投影曲线方程

1.2 微分学 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 数列极限与函数极限的定义及其性质 无穷小和无穷大的概念及其关系 无穷小的性质及无穷小的比较 极限的四则运算 函数连续的概念 函数间断点及其类型 导数与微分的概念 导数的几何意义和物理意义 平面曲线的切线和法线 导数和微分的四则运算 高阶导数 微分中值定理 洛必达法则 函数单调性的判别 函数的极值 函数曲线的凹凸性、拐点 偏导数与全微分的概念 二阶偏导数 空间曲线的切线及法平面 曲面的切平面和法线 多元函数的极值和条件极值 多元函数的最大、最小值及其简单应用

1.3 积分学 原函数与不定积分的概念 不定积分的基本性质 基本积分公式 定积分的基本概念和性质(包括定积分中值定理) 积分上限的函数及其导数 牛顿—莱布尼兹公式 不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法 有理函数、三角函数的有理式和简单无理函数的积分 广义积分 二重积分与三重积分的概念、性质、计算和应用 两类曲线积分的概念、性质和计算 求平面图形的面积、平面曲线的弧长和旋转体的体积

1.4 无穷级数 数项级数的敛散性概念 收敛级数的和 级数的基本性质与级数收敛的必要条件 几何级数与 p 级数及其收敛性 正项级数敛散性的判别法 任意项级数的绝对收敛与条件收敛 幂级数及其收敛半径、收敛区间和收敛域 幂级数的和函数 函数的泰勒级数展开 函数的傅里叶系数与傅里叶级数

1.5 常微分方程 常微分方程的基本概念 变量可分离的微分方程 齐次微分方程 一阶线性微分方程 全微分方程 可降阶的高阶微分方程 线性微分方程解的性质及解的结构定理 二阶常系数齐次线性微分方程

1.6 线性代数 行列式的性质及计算 行列式按行展开定理的应用 矩阵的运算 逆矩阵的概念、性质及求法 矩阵的初等变换和初等矩阵 矩阵的秩 等价矩阵的概念和性质 向量的线性表示 向量组的线性相关的和线性无关 线性方程组有解的判定 线性方程组求解 矩阵的特征值和特征向量的概念与性质 相似矩阵的概念和性质 矩阵的相似对角化 二次型及其矩阵表示 合同矩阵的概念和性质 二次型的秩 惯性定理 二次型及其矩阵的正定性

1.7 概率与数理统计 随机事件与样本空间 事件的关系与运算 概率的基本性质

古典概率 条件概率 概率的基本公式 事件的独立性 独立重复试验 随机变量 随机变量的分布函数 离散型随机变量的概率分布 连续型随机变量的概率密度 常见随机变量的分布 随机变量数学期望、方差、标准差及其性质 随机变量函数的数学期望 矩、协方差、相关关系及其性质 总体 个体 简单随机样本 统计量 样本均值 样本方差和样本矩 χ^2 分布 t 分布 F 分布 点估计的概念 估计量与估计值 矩估计法 最大似然估计法 估计量的评选标准 区间估计的概念 单个正态总体的均值和方差的区间估计 两个正态总体的均值差和方差比的区间估计 显著性检验 单个正态总体的均值和方差的假设检验

1.1 空间解析几何

1.1.1 向量代数

1. 向量的概念

(1) 向量的坐标。设向量 \mathbf{a} 的起点为 $A(x_1, y_1, z_1)$, 终点为 $B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\mathbf{a} = \mathbf{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} = \{a_x, a_y, a_z\} \quad (1-1)$$

注意: a_x, a_y, a_z 是向量 \mathbf{a} 的坐标, 向量的坐标也是该向量在三坐标轴上的投影。

(2) 向量的模(向量的大小)

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1-2)$$

(3) 向量的方向角与方向余弦(表示向量的方向)

向量 \mathbf{a} 与 x 轴、 y 轴、 z 轴正向的夹角 α, β, γ 叫 \mathbf{a} 的方向角($0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$)。 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 叫做 \mathbf{a} 的方向余弦($\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$)

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} \quad (1-3)$$

(4) 几种特殊向量:

1) 单位向量: 模为 1 的向量。

与 \mathbf{a} 同向的单位向量 $\mathbf{a}^0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}$ (1-4)

基本单位向量: 与 x 轴、 y 轴、 z 轴同方向的单位向量, 记为 $\mathbf{i}(1, 0, 0)$, $\mathbf{j}(0, 1, 0)$, $\mathbf{k}(0, 0, 1)$ 。

2) 负向量: 与 \mathbf{a} 模相同, 方向相反的向量, 记为 $-\mathbf{a}$ 。

3) 零向量: 模为 0, 没有确定方向的向量, 记为 $\mathbf{0}$ 。

(5) 两自由向量相等。 $\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow$ 模相等且方向相同(相等的自由向量视为同一个向量)。

(6) 向量在轴上的投影:

定义: 设向量 \mathbf{AB} 的起点 A 与终点 B 在轴 u 上的投影点分别为 A' 和 B' , 则称轴 u 上的有向线段 $A'B'$ 的值 $A'B'$ 叫向量 \mathbf{AB} 在轴 u 上的投影, 记作 $\text{Prj}_u \mathbf{AB} = A'B'$, 且

$$\text{Prj}_u \mathbf{AB} = |\mathbf{AB}| \cos(\widehat{\mathbf{AB}, u}) \quad (1-5)$$

2. 向量的运算

(1) 向量的加减法

1) 两向量相加, 其和仍为向量, 平面向量遵循平行四边形法则或三角形法则。

2) 坐标表达式:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\} \quad (1-6)$$

3) 运算律:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (1-7)$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} \quad (1-8)$$

4) 向量的减法:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \quad (1-9)$$

(2) 数乘向量

1) 定义: 数 λ 与向量 \mathbf{a} 的乘积为一向量, 记作 $\lambda\mathbf{a}$, 其模 $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}|$, 其方向, 当 $\lambda > 0$ 时, 与 \mathbf{a} 同向; $\lambda < 0$ 时, 与 \mathbf{a} 反向

$$0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}, (-1) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a} \quad (1-10)$$

2) 坐标表达式:

$$\lambda\mathbf{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\} \quad (1-11)$$

3) 运算律:

$$\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a} = \mu(\lambda\mathbf{a}) \quad (1-12)$$

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}, \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} \quad (1-13)$$

(3) 数量积(点积)

1) 定义: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ (运算结果为一数量)

等价定义

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\text{prj}_a \mathbf{b} = |\mathbf{b}|\text{prj}_b \mathbf{a} \quad (1-14)$$

2) 坐标表达式:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1-15)$$

3) 性质:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \quad (1-16)$$

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \quad (1-17)$$

4) 两向量夹角的余弦公式:

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (1-18)$$

(4) 向量积(叉积)

1) 定义: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \begin{cases} \mathbf{c} \perp \mathbf{a}, \mathbf{c} \perp \mathbf{b}, \text{且符合右手规则} \\ |\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \end{cases}$ (运算结果为一向量)

2) 几何意义: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$, 表示是以 \mathbf{a}, \mathbf{b} 为邻边的平行四边形的面积。

3) 坐标表达式:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k} \quad (1-19)$$

4) 性质:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (1-20)$$

$$\mathbf{a} // \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \quad (1-21)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b} \quad (1-22)$$

(5) 混合积

1) 定义: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = [\mathbf{abc}]$ (运算结果为一数量)

$$2) \text{ 计算: } [\mathbf{abc}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

3) 性质:

$$[\mathbf{abc}] = [\mathbf{bac}] = [\mathbf{cab}]$$

$$\text{三向量 } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ 共面} \Leftrightarrow [\mathbf{abc}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

【例 1-1】设 \mathbf{a}, \mathbf{b} 都是向量, 下列说法正确的是()。

A. $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$ B. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 \mathbf{b}$

C. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{a} - \mathbf{b} \times \mathbf{b}$ D. $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$

解: $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$, 故应选 A。

【例 1-2】已知 $|\mathbf{a}| = 2, |\mathbf{b}| = \sqrt{2}$, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2$, 则 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ()$ 。

A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}/2$ D. 1

解: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$, 所以 $2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 。

$$\text{所以 } \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{2}{2 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以 } \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2$, 故应选 A。

【例 1-3】设 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, 与 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 都垂直的单位向量为()。

A. $\pm(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$ B. $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$ C. $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ D. $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$

解: 作向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的向量积, 再单位化则可。由于 $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 5(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$, 单

位化得 $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$, 故应选 D。

【例 1-4】已知 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{i} + a\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \boldsymbol{\beta} = a\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 共面, 则 a 等于()。

A. 1 或 2 B. -1 或 2 C. -1 或 -2 D. 1 或 -2

解: 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 共面, 则 $\begin{vmatrix} 1 & a & -3 \\ a & -3 & 6 \\ -2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$, 由此得 a 等于 -1 或 -2, 故应选 C。

1.1.2 平面

1. 平面方程

设平面过点 (x_0, y_0, z_0) , 法向量为 $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$

(1) 点法式方程:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \quad (1-23)$$

注意: 要求平面的方程,关键是利用已知条件,找出平面的法向量和某点坐标。

(2) 一般方程:

$$Ax + By + Cz + D = 0, (\mathbf{n} = \{A, B, C\} \text{ 为平面的法向量}) \quad (1-24)$$

当 $D=0$ 时,平面过原点;

当 $A=0(B=0, C=0)$ 时,平面平行于 $x(y, z)$ 轴, 这时若 $D \neq 0$, 平面不经过 $x(y, z)$ 轴, 若 $D=0$, 则平面经过 $x(y, z)$ 轴;

当 $A=B=0$ 时,平面平行于 xoy 面。

注意: 求平面的方程的另一常用方法是利用条件,写出平面一般式,再确定系数。

2. 两平面的夹角

设平面 π_1, π_2 的法向量为

$$\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\} \text{ 和 } \mathbf{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\} \quad (1-25)$$

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad (1-26)$$

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

$$\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 // \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

3. 点到平面的距离

点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (1-27)$$

【例 1-5】 过点 $(-1, 0, 1)$ 且与平面 $x + y + 4z + 19 = 0$ 平行的平面方程为()。

A. $x + y + 4z - 3 = 0$

B. $2x + y + z - 3 = 0$

C. $x + 2y + z - 19 = 0$

D. $x + 2y + 4z - 9 = 0$

解: 已知平面的法向量为 $\mathbf{n} = \{1, 1, 4\}$, 由已知可取所求平面的法向量为 $\mathbf{n} = \{1, 1, 4\}$

所以所求平面方程为: $1 \times (x + 1) + 1 \times (y - 0) + 4 \times (z - 1) = 0$

即 $x + y + 4z - 3 = 0$, 故应选 A。

【例 1-6】 过 z 轴和点 $(1, 2, -1)$ 的平面方程是()。

A. $x + 2y - z - 6 = 0$

B. $2x - y = 0$

C. $y + 2z = 0$

D. $x + z = 0$

解: 过 z 轴的平面方程为 $Ax + By = 0$, 再将点 $(1, 2, -1)$ 代入确定 A 和 B 的值, 故应选 B。

【例 1-7】 设平面 π 的方程为 $2x - 2y + 3 = 0$, 以下选项中错误的是()。

A. 平面 π 的法向量为 $\mathbf{i} - \mathbf{j}$

B. 平面 π 垂直于 z 轴