

初等数学

(一 册)

一九七七年十月

毛主席语录

教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合。

我们的教育方针，应该使受教育者在德育、智育、体育几方面都得到发展，成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者。

自然科学是人们争取自由的一种武装。

人们为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，克服自然和改造自然，从自然里得到自由。

一切真知都是从直接经验发源的。

认识从实践始，经过实践得到了理论的认识，还须再回到实践去。

事物矛盾的法则，即对立统一的法则，是自然和社会的根本法则，因而也是思维的根本法则。

目 录

第一章 实数及其运算	(1)
第一节 正负数的概念	(1)
一、正数和负数	(1)
二、用数轴表示数、数的绝对值	(2)
三、数的大小的比较	(6)
习题一	(8)
第二节 有理数的四则运算	(11)
一、有理数的加减法	(11)
二、有理数的乘除法	(18)
习题二	(24)
第三节 乘方与开方	(27)
一、乘方	(27)
二、开方和方根	(30)
习题三	(35)
第四节 无理数与近似数	(36)
一、无理数的概念	(36)
二、近似数	(38)
习题四	(41)
第二章 代数式及其运算	(43)
第一节 代数式	(44)

一、代数式和它的值	(44)
二、整式与分式	(46)
三、单项式与多项式	(46)
习题一	(48)
第二节 整式的加减法	(50)
一、合并同类项	(50)
二、去括号	(52)
习题二	(54)
第三节 整式的乘法	(55)
一、正整指数幂及其运算法则	(55)
二、整式的乘法	(58)
三、乘法公式	(61)
习题三	(63)
第四节 因式分解	(66)
一、提取公因式法	(67)
二、应用公式法	(70)
三、十字相乘法	(72)
四、配方法	(74)
习题四	(77)
第五节 分式及其运算	(79)
一、分式的基本性质	(79)
二、分式的乘除法	(80)
三、分式的加减法	(82)
习题五	(87)
第六节 根式	(89)
一、 n 次方根的概念	(89)

二、根式的恒等变形和化简·····	(91)
三、根式的运算·····	(98)
习题六·····	(102)
第三章 代数方程与一次不等式 ·····	(106)
第一节 一元一次方程·····	(106)
一、方程的概念和基本性质·····	(106)
二、一元一次方程的解法及其应用·····	(110)
三、公式变形·····	(115)
习题一·····	(117)
第二节 一次方程组·····	(120)
一、二元一次方程组的概念·····	(121)
二、二元一次方程组的解法及其应用·····	(122)
三、三元一次方程组的解法·····	(129)
*四、用行列式解一次方程组·····	(131)
习题二·····	(140)
第三节 一元二次方程·····	(143)
一、一元二次方程的解法·····	(144)
二、分式方程与无理方程举例·····	(152)
三、一元二次方程的应用·····	(155)
习题三·····	(158)
*第四节 一次不等式·····	(161)
一、不等式的概念·····	(161)
二、不等式的性质·····	(161)
三、一元一次不等式的解法·····	(162)
四、简单的绝对值不等式·····	(164)
习题四·····	(166)

第四章 直线	(168)
第一节 线段、射线和直线	(169)
一、线段.....	(169)
二、射线.....	(170)
三、直线.....	(171)
习题一.....	(172)
第二节 角及其度量	(172)
一、角的概念和种类.....	(172)
二、角的度量.....	(175)
三、角的作法.....	(176)
习题二.....	(177)
第三节 直线的相交和平行	(179)
一、两直线相交.....	(180)
二、两直线不相交——平行.....	(184)
习题三.....	(189)
第五章 三角形和四边形	(193)
第一节 三角形的基本概念	(193)
一、三角形的概念.....	(193)
二、三角形中的特殊线段.....	(194)
三、三角形的分类.....	(195)
第二节 三角形各元素间的关系	(196)
一、角与角之间的关系.....	(196)
二、边与角之间的关系.....	(200)
三、边与边之间的关系.....	(203)
习题一.....	(203)
第三节 全等三角形	(207)

习题二	(213)
第四节 相似三角形	(215)
一、比例线段	(215)
二、相似三角形及其判定法	(221)
习题三	(230)
第五节 勾股定理及其应用	(235)
习题四	(242)
第六节 四边形	(245)
一、四边形	(245)
二、平行四边形	(245)
三、特殊的平行四边形	(248)
四、梯形	(250)
习题五	(253)
第六章 解三角形	(255)
第一节 锐角三角函数的概念	(255)
一、锐角三角函数的定义	(255)
二、同角三角函数之间的关系	(260)
三、互余两角的三角函数间的关系	(262)
第二节 锐角三角函数值	(264)
一、 30° 、 45° 、 60° 角的三角函数值	(264)
二、三角函数表	(268)
习题一	(272)
第三节 解直角三角形	(274)
习题二	(282)
第四节 解任意三角形	(286)
一、正弦定理及其应用	(287)

二、余弦定理及其应用	(292)
习题三	(300)
第七章 圆与正多边形	(306)
第一节 圆的基本概念和性质	(306)
第二节 圆心角和圆周角	(310)
第三节 圆弧长的计算	(312)
习题一	(315)
第四节 相切	(318)
一、圆和直线的相切	(318)
二、圆和圆相切	(322)
第五节 正多边形与圆	(325)
习题二	(327)
*第六节 等分圆周问题	(330)
一、四等分圆周	(332)
二、六等分圆周	(332)
三、十等分圆周	(333)
四、等分圆周的近似作图法	(336)
第八章 面积和体积的计算	(337)
第一节 平面图形面积的计算	(337)
一、面积公式	(337)
二、不规则图形面积计算	(342)
第二节 立体的体积和表面积的计算	(343)
一、体积公式	(344)
二、圆柱、圆锥、圆台的侧面展开和表面积	(350)
习题	(354)
(注*者为选学内容)	

第一章 实数及其运算

第一节 正负数的概念

恩格斯说：“和其他科学一样，数学是从人的需要中产生的。”人们为了计算物体的个数，就产生了自然数的概念；把一个物体分成若干等分，为了表示其中的几个等分，就产生了分数的概念，所以数的概念是由于计算和度量等的需要而产生的。但是随着三大革命运动的不断发展，过去算术中中学过的数就不够用了，因此我们对于数还需要进一步的认识与扩充。

一、正数和负数

自然界中一切现象都是充满矛盾的，例如：水位的上升与下降、产量的增加与减少、财经上的收入与支出等都是矛盾着的双方，具有相反的意义。为了能够表示与区别这种具有相反意义的量，我们把其中一种意义的量规定为正，并用“+”（读作“正”）号表示，而把另一种与它具有相反意义的量规定为负，并用“-”（读作“负”）号表示。例如把表示温度计零度以上、产量增加、汽车前进等意义的量规定是正的，那么表示零度以下、减少、后退等意义的量就是负的，用“+”号和“-”号表明它们之间的相反意义。这

样，如零上 39°C 用 $+39^{\circ}\text{C}$ 表示，零下 40°C 就用 -40°C 表示；如前进 8.5 米用 $+8.5$ 米表示，后退 $4\frac{1}{3}$ 米就用 $-4\frac{1}{3}$ 米表示；等等。

像 $+39$ 、 $+8.5$ 等这类前面带有“ $+$ ”号的数叫做正数，像 -40 、 $-4\frac{1}{3}$ 等这类前面带有“ $-$ ”号的数叫做负数。为了简便起见，正数前面的“ $+$ ”号通常省略不写，例如可把 $+50$ 直接写成 50 ，但负数前面的“ $-$ ”号就一定不能省略或遗漏。我们在算术中学过的数（除零外）都是正数。

应当注意，特殊的整数零既不是正数，也不是负数。

有了负数以后，数的范围扩大了。我们把正负整数、正负分数和零统称为有理数。如把一切整数看成是分母为 1 的分数，那末可以这样说：凡是可以用分数表示的数都是有理数。在算术中我们知道有限小数和循环小数都可以化成分数，所以有理数包括一切（正的和负的）整数、有限小数、循环小数和零。

二、用数轴表示数、数的绝对值

1. 数轴

在三大革命实践中，常常用直线上的刻度表示量的大小。例如：用直尺上的刻度表示长短，用称杆上的刻度表示轻重，用温度计上的刻度表示温度的高低等等。

如把温度计横放（图1-1），可以看出温度计以零度为界，右边表示正的温度，左边表示负的温度。由此可见，可以用一条直线上的点来表示正、负数及零。

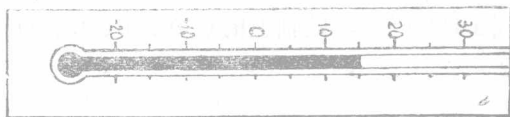


图 1-1

用直线表示正负数的方法是：首先取一条直线，在直线上任取一点 O 表示数零，这一点叫做原点；然后规定从左到右的方向（图1-2中箭头所示）为正方向；再取适当长的线段 l 作为单位长度。若要表示一个正数，例如 $+5$ ，就从原点 O 开始向右截取5个单位长度得到点 A ，点 A 就表示数 $+5$ ；若要表示一个负数，例如 -2 ，就从原点 O 开始向左截取2个长度单位得到点 B ，点 B 就表示数 -2 ；用同样的方法，可以找到各表示 -5 、 $+3.5$ 、 $-\frac{2}{3}$ 等数的点 C 、 D 、 E 等等（图1-2）。这样，有理数都可以用这条直线上的点表示出来。

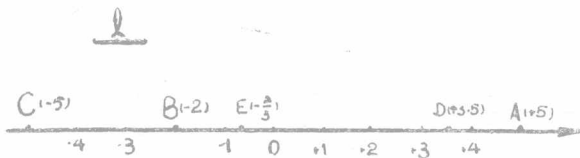


图 1-2

像上面这种规定了原点、方向和单位长度的直线叫做数轴。数轴上的原点表示数零，原点右边的点表示正数，原点

左边的点表示负数。

例1 图 1-3 所示，数轴上的点 A、B、C、D、E 各表示什么数？



图 1-3

解：A点表示-4；B点表示-1.5；C点表示-1；D点表示+1.5；E点表示+5。

例2 在数轴上表示出下列各数：

0、-3.5、+5、-5、+3.5、 $-1\frac{1}{2}$ 。

解：如图1-4，原点O表示数0；从原点向左量取3.5个单位长度得到点A，点A就表示-3.5；从原点O向右量取5个单位长度得到点B，点B就表示+5；用同样方法可得：点C表示-5；点D表示+3.5；点E表示 $-1\frac{1}{2}$ 。



图 1-4

2. 数的绝对值

从上面例子中我们可以看出：表示+5和-5的两个点位

于原点的两侧，且到原点O的距离相等；表示-3.5和+3.5的两个点亦位于原点两侧，且到原点O的距离也相等。

数轴上表示一个数的点到原点的距离，叫做这个数的绝对值。我们常在一个数的两旁各画一条竖线来表示这个数的绝对值，例如：+7的绝对值是7，记作 $|+7|=7$ ；-6的绝对值是6，记作 $|-6|=6$ ；0的绝对值是0，记作 $|0|=0$ ；等等。记号“| |”叫做绝对值记号。绝对值定义如下：

正数的绝对值就是这个正数本身；负数的绝对值就是把这个负数变号后所得的正数；零的绝对值就是零。

在数轴上位于原点两侧，且到原点距离相等的两个点所表示的两个数，如上面提到的+5和-5、-3.5和+3.5等，它们绝对值相等而符号相反，互相叫做相反数。例如+5的相反数就是-5，-5的相反数就是+5等。所以，一个负数的绝对值就是这个负数的相反数。故有：

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

例1 求下列各数的绝对值：

$$+2, -2, -3\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -0.001$$

解： $|+2|=2, |-2|=2, \left| -3\frac{1}{2} \right| = 3\frac{1}{2},$

$$\left| +\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, |-0.001| = 0.001.$$

例2 绝对值是3的数有哪几个？在数轴上把它们表示出来。

解：绝对值是3的数有+3和-3两个，如图1-5所示



图 1-5

例3 计算：

$$(1) |7-4|;$$

$$(2) \left| \frac{1}{3} \right| - \left| -\frac{1}{4} \right|;$$

$$(3) |-21| \times |-3|; \quad (4) |-0.64| \div |0.8|.$$

解：(1) $|7-4| = |3| = 3;$

$$(2) \left| \frac{1}{3} \right| - \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12};$$

$$(3) |-21| \times |-3| = 21 \times 3 = 63;$$

$$(4) |-0.64| \div |0.8| = 0.64 \div 0.8 = 0.8.$$

三、数的大小的比较

在算术中，我们已经会比较正数的大小，例如4比3大，也就是3比4小，记为 $4 > 3$ 或 $3 < 4$ ，记号“ $>$ ”读做“大于”，记号“ $<$ ”读做“小于”。“ $>$ ”、“ $<$ ”和“ $\neq$ ”（不等于）都叫做不等号。

我们知道，数的大小反映了量的差别，例如我们可用温度度数的大小来表示气温的高低。因为气温 $+5^{\circ}\text{C}$ 比 $+2^{\circ}\text{C}$ 高，所以 $+5 > +2$ ；气温 -5°C 比 -2°C 低，所以 $-5 < -2$ 。把上面各数和零同时加以比较，并用不等号连接起来，就是：

$$+5 > +2 > 0 > -2 > -5,$$

或

$$-5 < -2 < 0 < 2 < 5.$$

把上述各数用数轴上的点来表示, 如图 1-6 所示。



图 1-6

可以看出, 数轴上的点越往右, 它所表示的数就越大。因此得到: 正数大于零和一切负数; 零大于一切负数; 两个负数绝对值大的反而小, 绝对值小的反而大。

以后我们常用 $a > 0$ (a 大于零) 或 $a < 0$ (a 小于零) 来说明 a 是正数或是负数。

例 1 比较下列各组数的大小, 并说明理由。

$$(1) +0.09 \text{ 和 } -90; \quad (2) -5 \text{ 和 } -3;$$

$$(3) -7 \text{ 和 } +\frac{1}{7}; \quad (4) -\frac{2}{3} \text{ 和 } -\frac{3}{4}$$

解: (1) $+0.09 > -90$ (正数大于一切负数);

(2) $-5 < -3$ (两个负数, 绝对值大的反而小);

$$(3) -7 < +\frac{1}{7} \quad (\text{负数小于一切正数});$$

$$(4) \left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3} = \frac{8}{12}, \quad \left| -\frac{3}{4} \right| = \frac{3}{4} = \frac{9}{12},$$

$$\therefore \frac{8}{12} < \frac{9}{12}, \quad \text{即 } \left| -\frac{2}{3} \right| < \left| -\frac{3}{4} \right|,$$

$$\therefore -\frac{2}{3} > -\frac{3}{4} \quad (\text{两个负数, 绝对值小的反而大}).$$

例 2 把下列各数先用数轴上的点表示出来, 再按照从小到大的顺序用符号“ $<$ ”连接起来。

$$2, -1.5, 3, -3, 0, \frac{1}{2}.$$

解: 图 1-7 中, 点 A、B、C、D、E、F 分别表示数 2、-1.5、3、-3、0、 $\frac{1}{2}$ 。

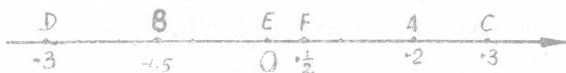


图 1-7

因数轴上的点越往左, 它所代表的数越小,

$$\therefore -3 < -1.5 < 0 < \frac{1}{2} < 2 < 3.$$

习 题 一

1. 用正数和负数表示下列具有相反意义的量:

- (1) 世界第一高峰珠穆朗玛峰高出海面 8882 米, 新疆吐鲁番盆地低于海面 154 米;
- (2) 向前 60 公斤的力 (推力) 与向后 50 公斤的力 (拉力);

(3) 最高温度零上 12°C ，最低温度零下 2°C ；

(4) 进刀 5 厘米，退刀 3 厘米；

(5) 储存 500 斤，消费 200 斤。

2. 回答下列问题：

(1) 如果 80 米是表示向东走的距离，那么 -70 米表示什么？

(2) 如果 -5 元是表示支出的钱数，那么 7 元表示什么？

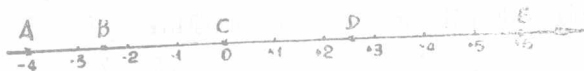
(3) 如果 $+2000$ 转表示齿轮逆时针方向的转数，那么 -1500 转表示什么？

(4) 如果 $+15$ 厘米表示水位的上升距离，那么 -8 厘米表示什么？

3. 用数轴上的点表示下列各数：

$$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -3, +1.5, -4\frac{1}{4}, +4.5.$$

4. 如图，数轴上的点 A、B、C、D、E 各表示什么数？



5. 写出下列各数的相反数：

$$-15, -24, 2\frac{1}{2}, 0, -7.6, -4\frac{3}{4}, 0.48.$$

6. 在数轴上离开原点三个单位长度、二分之一一个单位长度的点各有几个？它们各表示什么数？