引　　言

恩格斯指出：“**一切存在的基本形式是空間和时間，时間以外的存在和空間以外的存在，同样是非常荒誕的事情。**”又说”“**純数学的对象是現实世界的空間形式和数量关系，所以是非常現实的材料。**”“形”和“数”是一切事物在运动、变化过程中表现出来的两个辩证统一的侧面。代数学中所讲的，基本上是属于“数”的内容，它是研究数量关系中最简单的代数运算规律。这里的内容是采取“形”“数”结合的方式，除了研究一些常见的“形”的几何性质外，还用代数法，对一些几何量（如长度、角度，面积、体积等等）进行计算。这些内容，在三大革命斗争中，都是大量地存在着的，并且直接为解析几何的“形”“数”统一打下基础。

第一章简单几何图形及其计算，主要是研究三角形和圆的几何性质以及一些有关几何量的计算；第二章三角函数，是圆与三角形的结合，从研究三角形边角间的数量关系而发展起来的，它是物理、力学和电工中描述周期现象的有力工具；第三章复数与矢量，主要是通过第二章，把复数（虚数）与矢量联系起来。这样一来，一方面可以用代数法来研究有关矢量的一些具体问题；另一方面，也给复数找到了几何和物理模型，从而大大地扩大了复数的应用范围，给代数学增添了生命力。

目　　录

註：凡打有星号“＊”的内容仅供参考

第一章　簡单幾何图形及計算

恩格斯指出：“**和数的概念一样，形的概念也完全是从外部世界得来的，而不是在头脑中由純粹的思維产生出来的。必須先存在具有一定形状的物体，把这些形状加以比較，然后才能构成形的概念。**”

在生产实践和日常生活中，我们经常接触到各种各样形状的物体，如刀具，齿轮、电机、门窗，……等等。这就使我们产生了不同的“形”的印象，这些“**使人們在实践中引起感覚和印象的东西反复了多次，于是在人們的脑子里生起了一个认識过程中的突变（即飞跃），产生了概念。**”数学中，所谓角、三角形、圆等等，就是对许许多多具体的“形”，通过抽象概括而得到的最基本的几何图形，其他许多复杂的“形”则是由这些最基本的几何图形组成的。这一章就是讨论这些基本图形的几何性质和计算方法。

研究这些图形的几何性质，主要是用**公理法**。这个方法的特点就是，从人们在长期实践中总结出来的少数概念和公理（例如，两点之间以直线为最短）或给定的少数条件出发，运用（形式）逻辑推导，推出图形的几何性质（描述成“定理”）。下面讲的“**已知**”“**求证**”就是几何中公理法的一种典型的格式。

马克思指出：“**科学就在于用理性方法去整理感性材料。**”自然科学的发展虽然主要是由于生产的发展，但是也离不开理论思维，公理方法作为理论思维的一种具体的科学方法，对于数学研究是必不可少的，不过，这种方法有很大的局限性，这是因为，一方面“**数学上的所謂公理，是数学需要用作自己的出发点的少数思想上的規定**”，“**是数学不得不从邏輯那里借用的极其貧乏的思想內容的表現**”；另一方面，公理方法是来源于形式逻辑，而形式逻辑的规律只适用于局部范围，只适用于相当稳定的条件下，即撇开事物的发展变化，在质的相对稳定下面来考察对象，所以它没有能力掌握对象的发展，没有能力通观全局，也就是说，公理方法的作用是有限的。但是，杜林之流却把公理方法和逻辑推导的作用绝对化，认为只要公理是来自实践，从公理出发推出的结论就是真理，无须通过实践来检验，甚至认为只须从选定的几条公理出发，依靠逻辑推导，就可以发展数学理论，既不需要实践的推动，也无须实践的验证。这些观点都是唯心主义的、形而上学的，必须加以批判。

总之，对于公理方法在数学中的作用和地位问题，必须以辩证唯物主义为指导，采取一分为二的态度，既要看到它的必要的、有益的作用，又要看到它固有的局限性。

第一节　平面上两直綫的关系

在平面图形中，直线段围成的图形较为简单，其中又以“角”最为简单，它是由两条直线组成的。因此，下面就从这个问题谈起。

一、角 的 概 念

1．角

角是我们最常见的平面图形。例如，五角星上的角，螺帽上的角，钟表上时针和分针在不

同的时刻形成各种不同大小的角，把圆规随便张开也构成角，等等。这些都给了我们角的形象。这些形象在我们脑子里经过多次反复，便形成了角的概念。

从一点引出两条射线所组成的平面图形，叫做角。如图（1—1）就表示一个角。射线OA和OB叫这个角的两条边，点O叫这个角的顶点。“角”通常用记号“∠”表示，图（1—1）这个角就记作$\angle AOB$或$\angle BOA$（表示角顶的字母写在中间），或简记为$\angle O$。有时为方便起见，也用写在角内的一个数字或文字来记它，如图（1—2）所表示的∠1，∠2，∠α 等等。

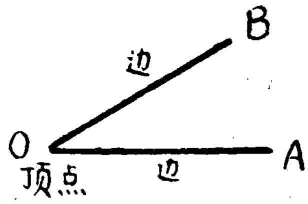


图 1—1

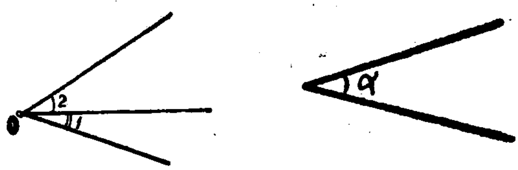


图 1—2

角$\angle AOB$也可看作是射线OA绕着角顶O旋转到OB时所成的平面图形（图1—3）。当射线OA绕O点旋转一周又回到原来位置时，所成的角叫做**周角**（图1—4）。周角的一半叫**平角**（图1—5）。平角的一半叫**直角**（图1—6）。

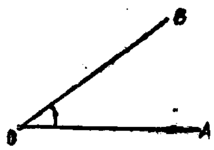


图 1—3

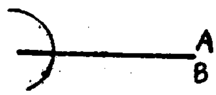


图 1—4

图 1—5

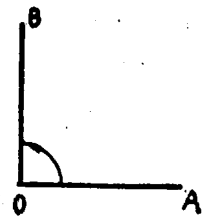


图 1—6

2. 角的度量

在生产实践中，经常需要度量角的大小。这里先介绍一种最基本的度量单位——**角度制**。将周角分成360等分，每一等分叫**一度的角**，记为1°，把1°的角分成60等分，每一等分叫做**一分的角**，记为1′。把1′的角再分成60等分，每一等分叫做**一秒的角**，记为1″。在机械加工中，常用的量角器和角尺等，就是按照这种单位刻制的。这样，

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{一个周角}=360^\circ,\ \text{一个平角}=\dfrac{360^\circ}{2}=180^\circ \\ \text{一个直角}=\dfrac{180^\circ}{2}=90^\circ\ 。\end{array}}$$

值得指出的是，这里的“分”、“秒”是角的单位，必须与计时单位的分、秒区别开来。由于它们都是六十进位制，所以单位换算却是一致的。

例1. 我国发射的两颗人造地球卫星运行的轨道平面与赤道平面的夹角分别是六十八点五度和六十九点九度。如果将不足一度的零头用分表示，则有

$$68.5^\circ = 68^\circ + 60' \times 0.5 = 68^\circ 30'$$

$$69.9^\circ = 69^\circ + 60' \times 0.9 = 69^\circ 54' \ 。$$

在进行角度的加减运算时，度和度，分和分，秒和秒应分别相加减，并按照度、分、秒之间的六十进位制关系来进位或借位。

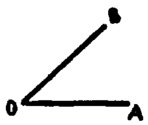
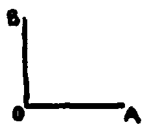
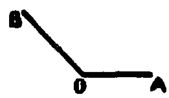
例2. 计算 $64^\circ 48' 45'' + 15^\circ 30' 16''$ 。

解: $64^\circ 48' 45'' + 15^\circ 30' 16'' = 79^\circ 78' 61'' = 80^\circ 19' 1''$ 。

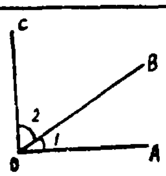
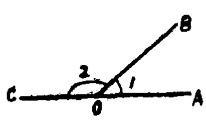
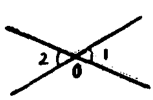
例3. 计算 $15^\circ 40^\circ{}' 31'' - 6^\circ 21' 42''$ 。

解: $15^\circ 40' 31'' - 6^\circ 21' 42'' = 15^\circ 39' 91'' - 6^\circ 21' 42'' = 9^\circ 18' 49''$ 。

现在将各种角的大小和它们的相应名称，列表如下：

图形					
角度	小于90°	等于90°	大于90°小于180°	等于180°	等于360°
名称	锐角	直角	钝角	平角	周角

根据两个角之间的关系，又有：

余角		$\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$，称$\angle 1$，$\angle 2$互为余角
补角		$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$，称$\angle 1$，$\angle 2$互为补角
对顶角		两直线相交，对着顶点的两个角，称为对顶角。对顶角必相等，$\angle 1 = \angle 2$。

3. 角的画法

在生产和设计产品的过程中，有时需要用量角器或圆规直尺画出各种大小的角。

例1. 用量角器画出50°的角。

画法： 如图（1—7）。

（1） 画射线OA 。

（2） 使量角器的圆心与O点重合，刻0°的线与射线OA重合。

（3） 在50°的刻度线上画出B点。

（4） 连接OB，则$\angle AOB=50°$。

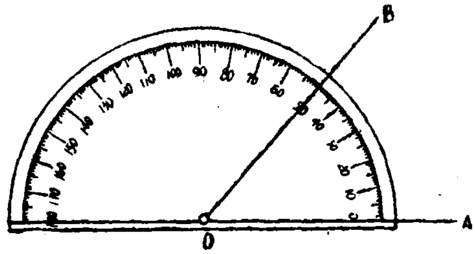


图 1—7

例2. 用圆规和直尺画一个角和已知角$\angle AOB$（图1—8）一样大小。

画法：

（1） 画射线$O'A'$。

（2） 以O为圆心，任意长为半径画弧分别交OA和OB于C和D。

（3） 以O'为圆心，OC长为半径画弧$\overset{\frown}{C'E}$*，交$O'A'$于C'，

（4） 以C'为圆心，CD长为半经画弧与$\overset{\frown}{C'E}$相交于D'。

（5） 过$O'D'$画射线$O'B'$。则$\angle A'O'B'$就是所要画的角。

（*圆上两点之间的部分叫做弧，弧用符号“⌒”表示，如CD弧记为$\overset{\frown}{CD}$）。

这种画法实际上就是“搬角”的方法，它只是将已知角移了一个位置，大小没有变，以后还可以进一步从理论上说明这种作法的理由。

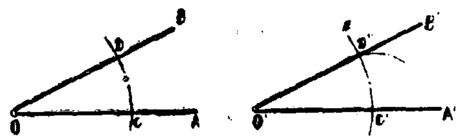


图 1—8

习　　题

1. 计算下列各题：

（1） $76°32'22''+22°39'52''$，

（2） $94°-64°54'47''$，

（3） $70°-15°13'+54°15'20''$，

（4） 57.36°是几度几分几秒？

（5） 3°18′是几点几度？

2. 时钟的时针和分针在下列时刻各构成多少度的角？

（1） 3点，　　（2） 4点　　（3） 6点

3. 如图（1—9）所示，三条直线相交于一点，构成一些角，已知$\angle 1=30°$，$\angle 5=60°$。求：

（1） $\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$，$\angle 6$各是多少度？

（2） 哪些角互为余角？哪些角是对顶角？

（3） $\angle 4$和$\angle 6$的补角是多少度？

4. 一个角比它的余角大15°，求这个角？

5. 一个角等于它的补角的三倍，求这个角。

6. 用量角器分别画出35°，86°，150°的角。

7. 用圆规直尺作下列各图：

（1） 作一个角等于两个已知锐角的和。

（2） 作一个角等于两个已知锐角的差。

（3） 作一个角，使它等于一个已知锐角的2倍。

8. 轮子上相邻两根幅条间所夹的角都相等，现在知道相邻两根幅条间所夹的角等于30°，求幅条的数目。

9. 某工厂工人为了进行一项技术革新，需要铸造一个20个齿的齿轮毛胚，在做齿轮木模时，需先知道相邻两个齿间的角α的大小，计算一下这个角α应该是多少度（图1—10）？

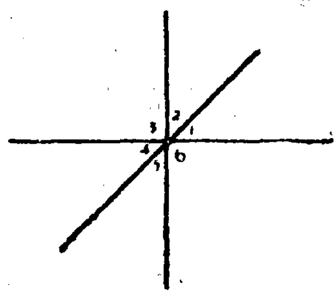


图 1—9

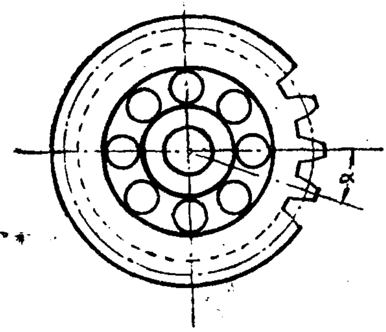


图 1—10

二、垂綫和平行綫

我们知道，相交两直线就形成角，由于角的大小不同，就使两直线的相对位置有种种情况。我们"**如果不研究矛盾的特殊性，就无从确定一事物不同于他事物的特殊的本质，…。**"因此，下面着重研究平面上两直线相对位置的两种特殊情况。

1. 垂綫

如果两直綫相交成直角，就叫这两条直綫互相垂直。其中一条叫做另一条的垂线，**交点叫垂綫的垂足。**

工厂中常把互相垂直的两条相交直线叫做十字线。

"垂直"用符号"⊥"表示（读作垂直于）如图（1—12），AB垂直于CD，就记作$AB \perp CD$，或$CD \perp AB$，O为垂足。

怎样画垂线呢？我们可以用三角板来画。

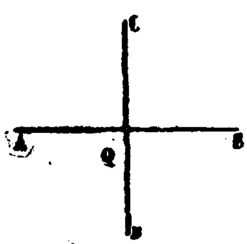


图 1—12

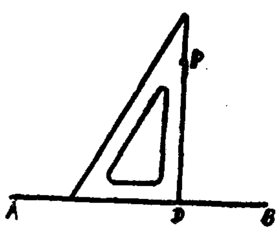


图 1—13

图（1—13）表示通过直线AB外一点P向直线AB画垂线的一种方法。将三角板的一个

直角边紧贴AB，另一直角边靠着P点，由P点沿这个直角边画一条直线PD，它就是要画的垂线，这里利用了三角板有一个角是直角的关系。

我们也可以利用圆规和直尺来画垂线：

已知：直线AB及AB外的一点P 。

求作：过P点且垂直于AB的直线。

画法：如图（1—14）。

（1） 以P点为圆心，适当长为半径画弧，使它与AB相交于两点C和D。

（2） 分别以C和D为圆心，用同样的长度（大于$\frac{1}{2}CD$）作半径画弧，两弧相交于Q点。

（3） 连接PQ，它就是所需要作的垂线。

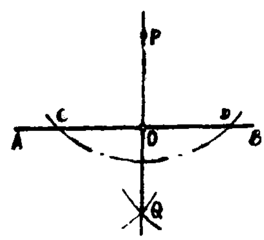


图 1—14

利用下一节的知识，可以证明这种作法是合理的。

图（1—15）中，$PM \perp AB$，M是垂足，容易看出，线段PM的长比连接P和AB上任何一点（如D、C、E、…）所得的线段的长都短。我们把这段垂线PM的长叫做点P**到直綫AB的距离**。

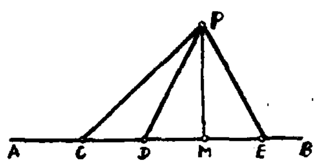


图 1—15

2. **平行綫**

在同一平面內的两条直綫，如果永不相交，我們叫这两条直綫互相平行。互相平行的直綫叫做平行綫。

“平行”用符号“$/\!/$”表示(读作平行于)，如图(1—16)，AB平行于CD记作$AB/\!/CD$。

夹在两平行线之间而与平行线垂直的线段的长，叫做**平行綫間的距离**。如图（1—17）所示。

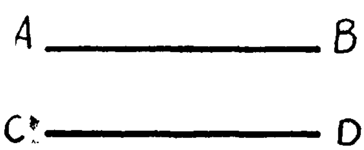


图 1—16

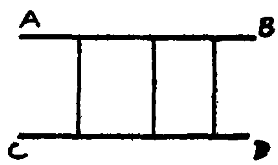


图 1—17

从实践可知：**两条平行綫間的距离处处相等**。反过来可以说，**如果两条直綫之間的距离处处相等，那么，这两条直綫互相平行**。这是平行线的一个重要性质。例如，测量车床的导轨是否平行，木工师傅画平行线的方法都直接利用了这个性质。

但是，在实践中，如果要判定两直线是否平行，是不是要处处去量它们之间的距离，或者将两直线无限地延长看它们是否相交呢？这显然是做不到的。因此，我们必须按照“**从一事物对他事物的关系去研究事物的发展**”的途径，来研究平行线的性质。

图（1—18）中，两平行线AB和CD与第三直线EF相交，形成八个角，我们把

$\angle 1$和$\angle 5$，$\angle 2$和$\angle 6$，$\angle 3$和$\angle 7$，$\angle 4$和$\angle 8$叫做**同位角**；$\angle 3$和$\angle 6$，$\angle 4$和$\angle 5$叫做**内错角**。

这些角之间有什么关系呢？

随便拿一对同位角，例如$\angle 2$和$\angle 6$来看，因为$AB \parallel CD$，所以，如果将$\angle 2$顺着EF向下移动，一定能够将它移到与$\angle 6$重合，也就是$\angle 2 = \angle 6$。其他各对同位角也同样是两两相等的。实际上，如果我们拿量角器来量一下，也能得到证实。

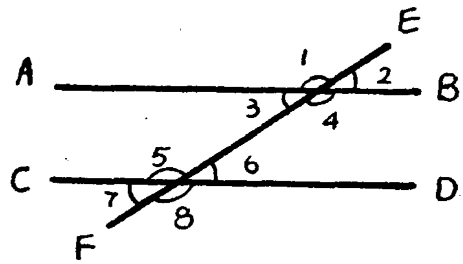


图 1—18

再取一对内错角如$\angle 3$和$\angle 6$来看，因为$\angle 3$和$\angle 2$是对顶角，所以$\angle 3 = \angle 2$，但$\angle 6 = \angle 2$（同位角），因而$\angle 3 = \angle 6$。同样可知$\angle 4 = \angle 5$。

因此，得到平行线的另一性质：**如果两平行线被第三条直线所截，那么同位角相等，内错角相等。**

图（1—18）中，如果改变任一对同位角（或内错角）的相等关系，例如，若$\angle 2 \neq \angle 6$，我们可以推知，AB不平行于CD。

工人同志也常常运用这个性质为生产服务。例如，在加工横截面如图（1—19）所示的燕尾槽时，要检验燕尾角$\angle CDF = 55°$，直接量它不方便，可用$55°$的样板角去卡图中的$\angle BFD$，如果刚好重合，则由平行线内错角相等的性质，可知$\angle CDF$也是$55°$。

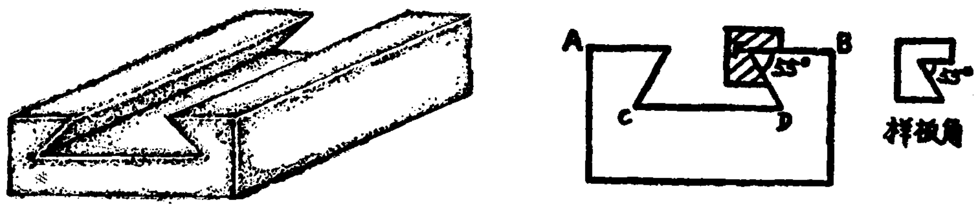


图 1—19

根据平行线性质的分析，我们得到判别两直线是否平行的法则：

判别法则：两条直线与第三条直线相交，如果同位角（或内错角）相等，那么，这两条直线平行。

例1. 如图（1—20），已知$AB \parallel CD$，$\angle 1 = 110°$，求其余各个角。

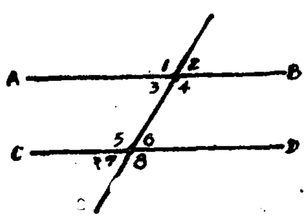


图 1—20

解： ∵ $\angle 1+\angle 2=180°$，

∴ $\angle 2=180°-\angle 1=180°-110°=70°$

又 $\angle 4=\angle 1$，$\angle 3=\angle 2$（对顶角）

∴ $\angle 3=70°$，$\angle 4=110°$.

再 $\angle 5=\angle 1$，$\angle 6=\angle 2$，$\angle 7=\angle 3$，$\angle 8=\angle 4$（同位角），

∴ $\angle 5=110°$，$\angle 6=70°$，$\angle 7=70°$，$\angle 8=110°$.

例2. 已知 $AB\parallel CD$，$AE\parallel CF$（图1—21），

求证 $\angle A=\angle C$

证： 将AB和CF的交点记作G，

∵ $AB\parallel CD$（已知），

∴ $\angle C=\angle FGB$（同位角），

又 $AE\parallel CF$（已知），

∴ $\angle A=\angle FGB$（同位角），因此$\angle A=\angle C$.

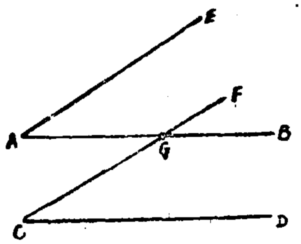


图 1—21

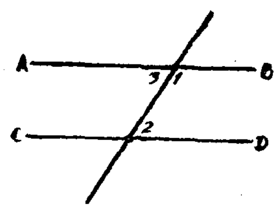


图 1—22

例3. 已知 $\angle 1$和$\angle 2$互补（图1—22），求证$AB\parallel CD$.

证： ∵ $\angle 1+\angle 2=180°$（已知），

∴ $\angle 2=180°-\angle 1$，

又 $\angle 3+\angle 1=180°$（平角），

∴ $\angle 3=180°-\angle 1$，因此$\angle 2=\angle 3$，

∴ $AB\parallel CD$（内错角相等）。

思考题： 一个角的两条边和另一个角的两条边分别平行，那么，这两个角相等，对吗？

值得指出的是，解几何题时，**必须弄清楚已知条件和求解目的**。求解目的可能是计算一个量（长度、角度等）的大小，或者证明一个结论，也可能是作出一个图形。无论是哪一种情况，都必须从已知条件出发。**已知件条**是问题中给定了的条件，解题过程要根据已知条件和图形的性质进行分析推理。推理的依据註明在括号内。

3. 平行綫的画法

平常我们画平行线，可用两块同样大小的三角板，拚成如图（1—23）的所示的位值，这样拚得的两条直线l_1和l_2就是平行的。因为，这时内错角相等。又如图（1—24），用一块三角板紧贴直线 l 画出l_1，然后将三角板沿直线 l 平移，再画出l_2，此时同位角相等，所以l_1平行于l_2 。

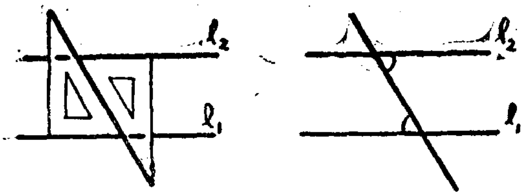


图 1—23

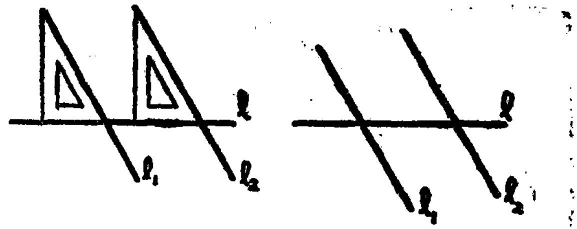


图 1—24

想一想：过直线AB外一点P，如果要画直线AB的平行线，如何利用上面的画法画出来。

另外，我们利用圆规和直尺来作平行线。

已知： 直线AB及AB外的一点M 。

求作： 一条直线过M点并且平行于直线AB 。

我们先分析一下：如图（1—23，1—24）所示平行线的画法，不外乎是设法利用三角板使两条直线之间凑成两个内错角相等或两个同位角相等的条件，现在不用三角板，而用圆规和直尺，按照前面“搬角”的方法，作出两个相等的内错角或两个相等的同位角，来达到这个目的。

作法： 如图（1—25） 。

（1） 在AB上任取一点N，

（2） 连接MN，

（下面以MN为角的一边，以M为角顶，作一个角等于$\angle MNB$）。

（3） 以N点为圆心，任意长为半径画弧，分别交直线MN和AB于P和Q两点。

（4） 以M点为圆心，与（3）中同样的半径画弧$\overset{\frown}{RS}$，交直线MN于R。

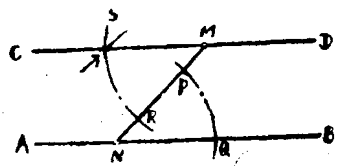


图 1—25

（5） 以R为圆心，PQ的长为半径画弧交$\overset{\frown}{RS}$于T。

（6） 过M和T，联直线CD，即得所求的平行线。

证明： $\because$ $\angle MNQ = \angle RMT$（作图），

$\therefore$ $CD \parallel AB$（内错角相等），

又 CD过已知点M，

$\therefore$ CD就是要作的平行线。

“几何作图”规定用圆规和直尺两种工具，在作图之前，我们可以先分析一下，已知条件和求作对象之间的联系，以寻求作图的线索，然后一步一步地写出作图的方法，最后再证明所作出的图形，确实满足求作对象的要求。**作图問題一般分“已知”、“求作”、“分析”、“作法”及“证明”五个环节。** 比较简单的问题可以不作分析，直接作图。

习 题

1． 说出下列各判断语句中的条件和结论：

（1） 如果两个角是对顶角，那么这两个角相等。

（2） 如果两条直线之间的距离处处相等，那么，这两条直线互相平行。

（3） 等角的补角相等。

（4） 末位是0或5的整数，都能被5除尽。

2。 如图（1—26），AB表示自来水的主水管，把主水管的水引到C和D两地去，应该怎样安装支水管，才能最省材料？

3。 如图（1—27），已知$AO\perp BO$，$\angle 1=30°$，求$\angle 2$。

4。 已知两直线$l_1\parallel l_2$，是与第三条直线l_3相交（图1—28），又$\angle 1=40°$，求其余各个角的度数。

图 1—26

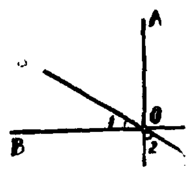


图 1—27

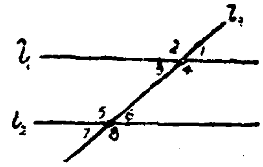


图 1—28

5。 如果$AB\parallel CD$，$EF\perp AB$，那么，$EF\perp CD$，为什么（图1—29）？

6。 如图（1—30），已知$DE\parallel BC$，$EF\parallel AB$，$\angle ADE=30°$，求$\angle EFC$。

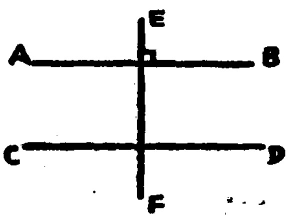


图 1—29

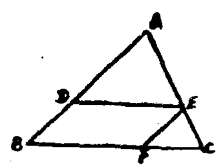


图 1—30

7。 已知AB和CD相交于O，如图（1—31），$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，求证$AC\parallel BD$。

8。 如图（1—32），已知$DE\parallel BC$，$\angle B=30°$，$\angle C=70°$，求$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$各是多少度？

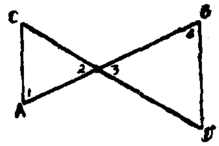


图 1—31

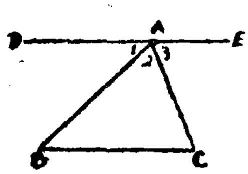


图 1—32

9。 在长方形钢料$ABCD$上画出DE线段，使$\angle BED$等于150°，应该怎样画线（图1—33）？

10。 在图（1—34）的铁板上画出的线段AB和CD，延长到边缘还不相交，试设法量出它们所交成的角。

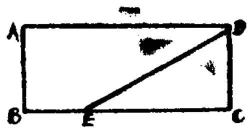


图 1—33

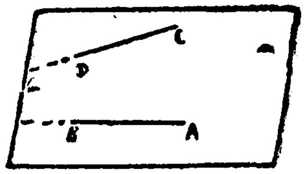


图 1—34

11. 如图（1—35），已知$AB \parallel CD$，求证：$\angle BED = \angle ABE + \angle CDE$（提示：试过$E$添画一条平行于$AB$的直线，再找联系）。

12. 如图（1—36），已知$AB \parallel CD$，求证：$\angle A + \angle E + \angle C = \angle 360°$（提示：同上题）

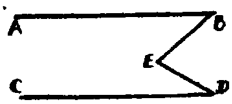


图 1—35

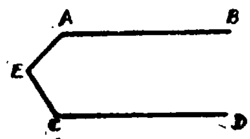


图 1—36

第二节　三 角 形

“理性认識依赖于感性认識，感性认識有待于发展到理性认識”，在生产实践中，三角形有着广泛的应用，如长江大桥上的巨大钢梁，高压电线的铁塔，起重机的移动臂等，都是三角形结构，至于三角板更是我们画图的常用工具。

三角形是几何图形中最基本的图形，它的许多性质是研究其它复杂图形的基础，我们必须熟练地掌握它。

一、三 角 形 的 分 类

由三条綫段所围成的平面图形叫三角形。我们用符号“△”表示“三角形”。如图（1—37），把它记为$\triangle ABC$（读作三角形ABC），线段AB、BC，CA叫$\triangle ABC$的**三条边**，边的交点A、B、C叫$\triangle ABC$的**三个顶点**，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$叫$\triangle ABC$的**三个内角**，有时也用小写字母a、b、c分别表示$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边，这些边和角叫做三角形的元素，一个三角形共有六个元素。

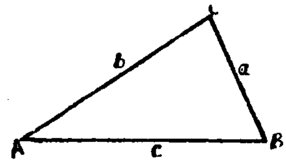


图 1—37

三角形按照角的大小分为三类，列表图示如下：

图形			
条　件	三个角都是锐角	有一个角是直角	有一个角是钝角
名　称	锐角三角形	直角三角形	钝角三角形

不论是哪类三角形，从它的任一个顶点出发，都可以作出三角形的三条主要线段，这些线段在研究三角形的性质时经常要用到（图1—38）。

角平分线——三角形一个角的二等分线和对边相交，连接角顶和这个交点间的线段叫角平分线。

中线——连结三角形一个顶点和它的对边中点的线段叫做中线。

高——三角形一个顶点向对边引垂线（有时须延长对边），连接角顶和垂足的线段叫做高。

读者试分别画出直角三角形和钝角三角形的三个高。

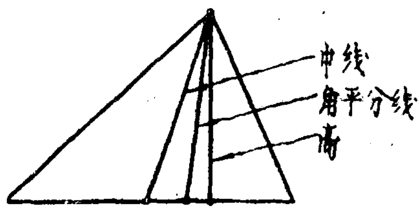


图 1—38

二、三角形的基本性质

“唯物辩证法的宇宙观主张从事物的内部、从一事物对他事物的关系去研究事物的发展，……。” 三角形有三条边和三个角，这些边、角之间是有其内在联系的。我们知道，在一个三角形中，边与角是对立的统一，两者彼此相依存在，下面我们就来逐一揭露它们之间的联系。

1.三角形边、角不等关系

我们每见到一个三角形（图1—39），立即会对它产生一些感性认识。比方，边的长短，角的大小，等等。经过多次的实践，我们可以总结出如下简单的规律：

在同一三角形中，长一些的边所对的角較大，短边所对的角較小。反过来也就是**大角所对的边較长，小角所对的边較短。**

例如，图（1—39）的$\triangle ABC$中，很清楚

由 $a>b$，　　可知 $\angle A>\angle B$

由 $\angle B<\angle C$，　　可知 $b<c$，等等。

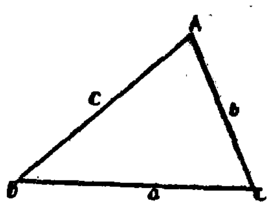


图 1—39

再看$\triangle ABC$，边a是连接B和C两个点的线段的长，而$b+c$则是连接B和C两点的折线BAC的长，实践告诉我们，两点之间的距离以直线段为最短。所以

$$b+c>a$$

同样有　　$c+a>b$，$a+b>c$

总起来说，就是：**三角形任意两边的和大于第三边。**

利用不等式的运算，我们还可以推出另一个关系。

因为　　$b+c>a$

从这个不等式的两边都减去c，得

$$b+c-c>a-c，即 b>a-c$$

同样可得　　$c>a-b$，$a>c-b$

归纳起来，就是：**三角形任意两边的差小于第三边。**

2.三角形的三个内角之間有什么联系？

画图时，我们经常利用两块三角板，一块的三个角是45°，45°和90°，另一块是30°，60°和

°。我们发现不管是哪一块，它的三个内角加起来都是180°。这是两个特殊的三角形，对于意的三角形，三个内角的和是不是也等于180°呢？

答是肯定的，下面我们按照推理的方法来论证这个性质。

定理：三角形三内角的和等于180°。

这个定理是说，如果图形是三角形，那么，它的三个内角加起来就等于180°。我们先来分析一下，定理中什么是“已知”条件，什么是“求证”对象，如何将它的条件和结论分别用文字或符号表示出来。定理对三角形没有特殊条件的限制，就是说，指的是一般的三角形，我们就用符号$\triangle ABC$表示它，那么求证的对象就是$\triangle ABC$的三个内角加起来要等于180°，因此，这个定理可用符号改写如下：

已知：$\triangle ABC$

求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180°$

证：如图（1—40）

作辅助线 *——延长BC到D，并作$CE\parallel AB$（为方便起见，各个角用数字作出标记如图所示），于是

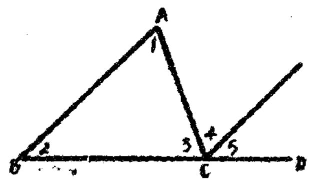


图 1—40

$\angle 1=\angle 4$（内错角）

$\angle 2=\angle 5$（同位角）

因此　$\angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle 4+\angle 5+\angle 3$

但是　$\angle 4+\angle 5+\angle 3=180°$（$B$、$C$、$D$三点在一直线上），所以

$$\angle A+\angle B+\angle C=\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$$

〔*为了揭露事物的内在联系，便于求解或证明，我们往往需要在原来的图形上添画一些线，这些线叫做辅助线，辅助线通常画成虚线。〕

在上面的讨论中

$$\angle ACD=\angle 4+\angle 5=\angle A+\angle B$$

$\angle ACD$叫做$\triangle ABC$的一个**外角**，$\angle A$和$\angle B$是和$\angle ACD$不相邻的两个内角。因此，由上面的定理又可推出另一个结论。

推论：三角形的任一个外角等于不和它相邻的两个内角的和。

例1. 用斜度测量仪（图1—41），测量一个山坡的斜度，方法是将斜度测量仪垂直插在山坡上（图1—42），指针就依着它本身的重量下垂，所指明的度数就是山坡的斜度，为什么？

我们把图（1—42）简化成图（1—43），并且用字母和数字作出各线段和角的标记。本题就简化抽象为下面的几何问题。

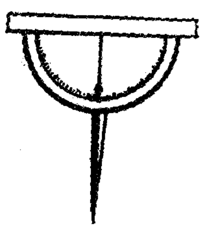


图 1—41

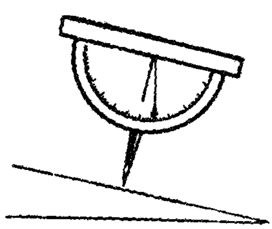


图 1—42

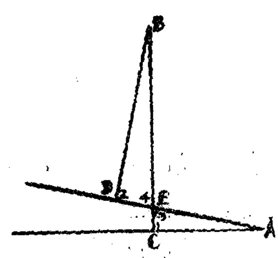


图 1—43

已知：$BC \perp AC$，$BD \perp AD$（图1—43）

求证：$\angle A = \angle B$（如果根据这里的已知条件，能推出求证对象，"为什么"的问题就解决了）。

证明：因　$BD \perp AD$，$BC \perp AC$

∴　$\angle 1 = \angle 2 = 90$。

又　$\angle 3 = \angle 4$（对顶角）

在$\triangle ACE$中，　$\angle A = 180° - \angle 1 - \angle 3$（三角形三内角和等于（180°））。

在$\triangle BDE$中，　$\angle B = 180° - \angle 2 - \angle 4$（理由同上）

故　$\angle A = \angle B$（$\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$）

思考题：一个角的两边分别垂直于另一个角的两边，则这两个角相等，对吗？

例2.　六角螺帽的六个内角相等，问每个角是多少度？

解：　图（1—44）是六角螺帽的六条边所构成的六边形。我们通过作辅助线，将六边形转化为三角形问题。

连对角线AC，AD，AE，便得到四个三角形；$\triangle ABC$，$\triangle ACD$，$\triangle ADE$和$\triangle AEF$。

由图知道，六边形的六个内角的和就是这四个三角形的内角加起来的总和，但是，一个三角形的三内角之和等于180°，故六边形的六个内角的总和为 $180° \times 4 = 720°$。

因此，六角螺帽的每一个内角 $= \frac{720°}{6} = 120°$。

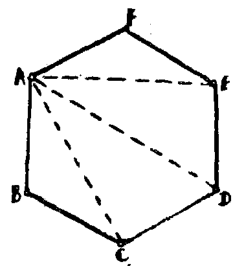


图 1—44

从这个问题的解法，我们得到启发：如果多边形的边数为n，从它的一个顶点，向其他顶点连对角线，就可以把n边形分成（$n-2$）个三角形。这样就得到：

$$\boxed{n\text{边形的内角和} = 180° \times (n-2)}$$

如果n边形的每个角都相等——正n边形，那么

$$\boxed{\text{正}n\text{边形的每一个内角} = \frac{180° \times (n-2)}{n}}$$

想一想：如果不从一个顶点出发引对角线，可否另作其它的辅助线来求多边形的内角和？

3.三角形的稳定性

毛主席教导我们："**一切真知都是从直接经验发源的。**"

我们先来作一个实验，用四根木条做成一个四边形架子（图1—45），如果将它稍微一拉，它的形状就很容易改变，也就是设，它不牢固。再用五根木条、六根木条、……都是同样的情况。但是，我们若用三根木条来钉成一个三角形架子（图1—46），木条就只三根，情况就完全不一样了。任你怎么去拉，它总是大小形状保持不变，也就是说，它很牢固。这就是三角形所特有的稳定性。前面提到大桥的钢梁、高压电线的铁塔等，其所以都采用三角形结构，就是因为这样做稳定牢固，这个性质在生产实践中有着广泛的应用。

三角形有三条边和三个角共六个元素。三角形的稳定性告诉我们，一个三角形只要三条边给定了，它的三个角就跟着固定，三角形的大小形状也就完全确定了。这是三角形边角之间客观存在的依存关系。今后，我们将会看到，根据给定的三条边的长度，进一步还可推证出许多其它几何特性。

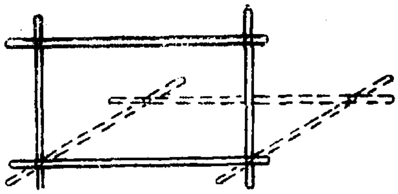


图 1—45

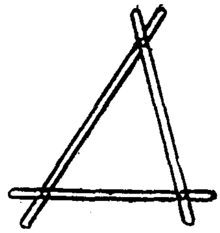


图 1—46

习　　题

1.如图（1—47），$\angle ACD=60^\circ$，$\angle A=\angle B$，求$\triangle ABC$各个角的度数。

2.如图（1—48），在$\triangle ABC$中，AD是$\angle A$的平分线，$\angle B=60^\circ$，$\angle C=34^\circ$，求$\angle BAD$和$\angle ADC$。

3.已知$AB/\!/CF$，D是CF上的一点，AD和BC相交于E，$\angle B=45^\circ$，$\angle CED=97^\circ$，求$\angle EDF$。

4.如图(1—49)，$\triangle ABC$中，AB边上的高CE和AC边上的高BD相交于O。$\angle ACE=25^\circ$。求$\angle ABD$和$\angle BOC$。

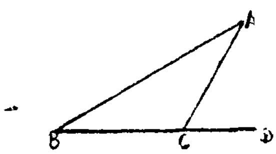


图 1—47

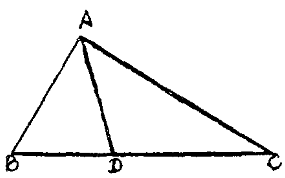


图 1—48

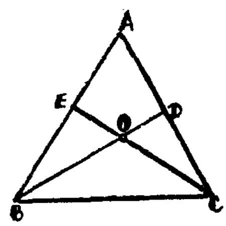


图 1—49

5.如图（1—50），直角$\triangle ABC$中，$\angle A$为直角，AD是斜边上的高，求证$\angle B=\angle 2$，$\angle C=\angle 1$。

6.如图（1—51），已知$\angle CAD=\angle B$，求证

$$\angle ADC=\angle BAC$$

7.证明：三角形的一个角等于其它两个角的和，这个三角形这是直角三角形。

8.在斜面上，物体受重力的方向OP（$OP\perp AC$）和物体对斜面的压力方向OQ（$OQ\perp AB$）所夹的角为α，斜面的倾斜角为β（图1—52），问α与β有什么关系？

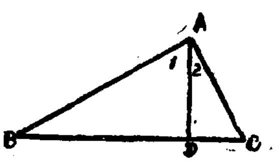


图 1—50

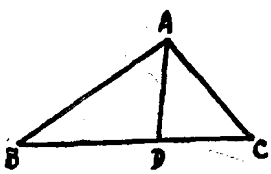


图 1—51

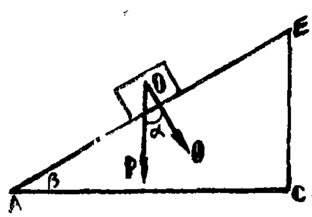


图 1—52