交大之星

新华传媒 XINHUA MEDIA

与上海二期课改教材配套

读交大之星　圆名校之梦

初中数学教材全解与精练

九年级

主　编　杨正家

数学

C19

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

交大之星

新课标·全解与精练系列

初中数学
教材全解与精练

九年级

主编　杨正家

编写　陈　伟　陈　泳　戴寅秋　金燕萍
经　敏　孔晓洪　娄子庆　倪　丽
王雪花　奚　琼　严　惠　杨正家
钟　俊　周二建　周晓凌

上海交通大學 出版社

内容提要

本书根据新课标理念，贯彻新课改精神，按照最新上海二期教材编写，全书分为“教材全解”和“课后精练”两大部分。“教材全解”：细致、全面、透彻解读教材，分析重点、难点、疑点，精讲典型例题，突出方法、规律总结，帮助学生提高预习、复习效果。“课后精练”：题量适当、题型丰富，帮助学生巩固基础，提高能力，突破思路，应对测试。

图书在版编目(CIP)数据

初中数学教材全解与精练. 九年级 / 杨正家主编.
—上海：上海交通大学出版社，2014
ISBN 978-7-313-11951-3

Ⅰ. ①初… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 196070 号

初中数学教材全解与精练(九年级)

主　　编：杨正家
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路 951 号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
出 版 人：韩建民
印　　制：上海华文印刷厂　　经　　销：全国新华书店
开　　本：787 mm×1092 mm　1/16　　印　　张：15.25
字　　数：486 千字
版　　次：2014 年 9 月第 1 版　　印　　次：2014 年 9 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-11951-3/G
定　　价：35.00 元

前　言

当前数学教育囿于应试，使得原本生动有趣的教学活动，变得枯燥无味，负担奇重，苦了学生，难了教师。如何改变这种困境，成了数学教改必须解决的问题。

经过多年上海二期课改教学探索与试验，我们深感要走出这一困境，应在以下3方面下功夫。

(1) 抓住“知识与语言的教学，构建数学基本概念、基本原理的意象”是理解、运用概念的重要途径、强化数学语言形态(自然语言、符号语言、图像语言)的“互译”(互相转化)是促进左、右脑协调发展的极佳训练，也是落实三基(基础知识、基本技能、基本方法)的必由之路。

(2) 注意数学思想方法(思维的导航器)的概括、提炼和科学学习方法(学会学习)的指导是提高学习质量与效率的根本教育，也是学生终身受益的教育。

(3) 既教书又育人是中华教育的传统。中国的数学教育从中汲取了丰富的“营养”。本书设立了“知识结构”、“本节解读”、“要点点拨”、“例题精讲”等板块，激发学生浓厚的兴趣和对科学规律的好奇心、探究欲，为提高创新思维实践能力创造条件。

此次应编写《初中数学教材全解与精练》系列丛书之机，乘上海二期教改的东风，大胆进行了尝试，希望为教育助学类图书的编纂，吹入一点新风；为学生走出“题海”，放飞思维任意翱翔；为提高全民数学素养，建立创新型国家作出奉献！

参加本书策划的有杨正家等，由杨正家担任主编，参加本书编撰的还有陈伟、陈泳、戴寅秋、金燕萍、经敏、孔晓洪、娄子庆、倪丽、王雪花、奚琼、严惠、钟俊、周二建、周晓凌等多位上海市名校骨干教师。

限于水平，错失之处，敬请读者、专家指正，以利重印时改正。

本书编写组

目　录

教 材 全 解

课后精练

目　录

教材全解

JIAO CAI QUAN JIE

紧扣课标，教材同步；
步步推进，逐次深入；
讲解精细，面面俱到；
围绕重点，突破难点；
典型例题，方法剖析；
易错题析，举一反三；
规律总结，对接中考。

第二十四章　相似三角形

第一节　相　似　形

§24.1　放缩与相似形

【要点点拨】

图形的放缩运动：图形的放大或缩小，称为图形的放缩运动。

相似形：图形经过放缩运动后得到的图形和原图形形状相同。形状相同的图形称为相似形。

相似形与全等形：相似的图形不一定全等，全等的图形一定相似。

相似形的性质：如果两个多边形是相似形，那么这两个多边形的内角对应相等，边的长度对应成比例。

相似形的判定：如果两个多边形的内角对应相等，边的长度对应成比例，那么这两个多边形是相似形。

【例题精析】

例 1　判断题

(1) 两个等边三角形一定是相似图形。

(2) 两个正方形一定是相似图形。

(3) 两个等腰直角三角形一定是相似图形。

(4) 两个菱形一定是相似图形。

(5) 两个矩形一定是相似图形。

(6) 两个图形全等也可以说这两个图形是相似的。

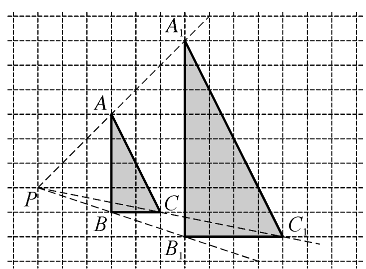
解：(1)是正确的，因为两个等边三角形对应边的长度成比例，对应角相等。同理：(2)、(3)都是正确的。(4)是错误的，因为两个菱形的内角不一定对应相等。(5)是错误的，因为两个矩形的长和宽不一定对应成比例。(6)是正确的。因为全等图形的对应边的长度比值都是 1，对应角相等。

注意：判别两个图形相似要注意它们的内角对应相等、边的长度对应成比例这两个条件同时成立；另外还要注意两个全等的图形必然相似，而两个相似的图形不一定全等。

例 2　如图所示，$\triangle A_1B_1C_1$ 是 $\triangle ABC$ 通过放大后得到的图形。这两个三角形的三个内角分别有怎样的大小关系？三条边的长度的比值间有怎样的大小关系？

解：由题意，这两个图形是相似的，$\angle A_1$ 与 $\angle A$、$\angle B_1$ 与 $\angle B$、$\angle C_1$ 与 $\angle C$ 对应相等，这两个三角形的边的长度对应成比例。

小结：本题是根据图形放缩运动的含义，图形经过放缩运动后得到的图形与原来的图形相似。



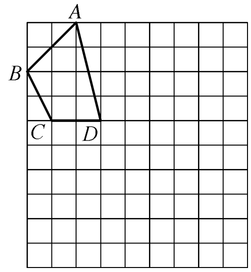
例 2 图

例 3　四边长分别是 2 厘米，3 厘米，4 厘米，5 厘米的四边形与四边长分别是 16 厘米，12 厘米，20 厘米，8 厘米的四边形一定相似吗？为什么？

解：虽然 $2:3:4:5=8:12:16:20$，这两个四边形的边长对应成比例，但它们的内角不一定对应相等，所以它们不一定是相似的。

小结：除了多边形的边长对应成比例，还需要内角对应相等才能判别两个多边形是相似的。

例 4 在方格图中，画出和四边形 $ABCD$ 相似的一个相似图形。

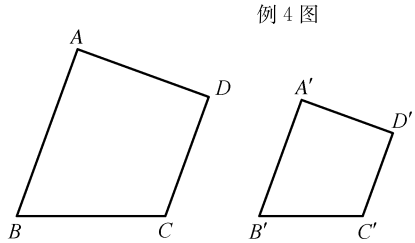


例 4 图

提示： 可选择对应边长度的比为 1∶2，画出符合要求的图形。

小结： 本题要先结合方格图的大小选择适合的相似比，然后再根据图形的放缩画图。

例 5 如图所示，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 是相似的图形。点 A 与点 A'、点 B 与点 B'、点 C 与点 C'、点 D 与点 D' 分别是对应顶点，已知 $AB=3.3$，$CD=2.4$，$A'B'=2.2$，$B'C'=2$，$\angle B'=70°$，$\angle C=110°$，$\angle D=90°$，求边 BC、$C'D'$ 的长和 $\angle A$ 的度数。



例 5 图

解： 因为四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 是相似的图形，点 A 与点 A'、点 B 与点 B'、点 C 与点 C'、点 D 与点 D' 分别是对应顶点，

所以 $\angle B=\angle B'$，$\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{C'D'}{CD}$（两个相似多边形的对应角相等，对应边的长度成比例）。

由 $\angle B'=70°$，$AB=3.3$，$CD=2.4$，$A'B'=2.2$，$B'C'=2$，

得 $\angle B=70°$，$\dfrac{2.2}{3.3}=\dfrac{2}{BC}=\dfrac{C'D'}{2.4}$，

解得 $BC=3$，$C'D'=1.6$。

在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$，

由 $\angle B=70°$，$\angle C=110°$，$\angle D=90°$，

得 $\angle A=360°-(\angle B+\angle C+\angle D)=360°-(70°+110°+90°)=90°$。

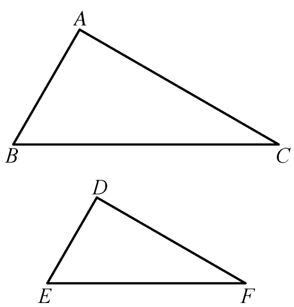
小结： 通过本例题得出"相似图形的对应角相等、对应边成比例"。注意根据对应顶点确定对应边。学会寻找对应角和对应边。

例 6 某两地的实际距离是 5 千米，画在地图上的图距与实际距离之比是 1∶100 000，那么这两地在地图上的图距是多少厘米？

解： 设两地在地图上的距离是 x 厘米，由题意：$\dfrac{x}{500\,000}=\dfrac{1}{100\,000}$，解得：$x=5$。答：这两地在地图上的图距是 5 厘米。

小结： 本题根据比例尺 $=\dfrac{\text{图距}}{\text{实际距离}}$ 来列方程，另外注意单位的换算。可用同样的方法试试下面的变式训练：在同一张地图上用尺测量得甲地距学校的距离是 2 厘米，乙地到学校的距离是 5 厘米，而实际上，乙地与学校的实际距离是 10 千米，求甲地与学校的实际距离。

例 7 如图所示，已知：$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中，$\angle A=\angle D=90°$，$AB=2$，$AC=2\sqrt{3}$，$DE=\dfrac{3}{2}$，$\angle E=60°$。则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似吗？为什么？



例 7 图

解： 因为 $\angle A=90°$，$AB=2$，$AC=2\sqrt{3}$，

所以 $BC=2$，$\angle C=30°$，$\angle B=60°$。

因为 $\angle D=90°$，$\angle E=60°$，$DE=\dfrac{3}{2}$，

所以 $\angle F=30°$，$EF=3$，$DE=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$。

所以 $\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$，

$\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{DF}=\dfrac{BC}{EF}$，

所以 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似。

小结： 多边形的边长对应成比例，内角对应相等两个条件都成立才能判别两个多边形是相似的。

例 8 一张长方形纸片对折后所得的长方形与原长方形是相似形,则原长方形的长与宽的比是多少?

解: 设原长方形的长与宽分别为 a、b $(a \neq b)$,由题意,显然这个长方形是沿着长边的垂直平分线对折得到新的长方形。由于两个长方形相似,则 $\frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{a}{2}}$,化简得 $a = \sqrt{2}b$。

所以,原长方形的长与宽的比是 $\sqrt{2} : 1$。

小结: 本次要注意原长方形的对折必然是沿着长边的中垂线对折,否则若沿着短边的对折,得到的长方形与原长方形的长与宽不可能成比例。

第二节 比 例 线 段

§24.2 比 例 线 段

【要点点拨】

1. 两条线段的比:两条线段长度的比叫做两条线段的比。

2. 比例线段:在四条线段中,如果其中两条线段的比等于另外两条线段的比,那么这四条线段称做成比例线段,简称比例线段。

3. 比例线段的其他性质:

(1) 反比性质:如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,那么$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$。

(2) 比例的更比性质:如果$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,那么$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$。

(3) 比例的合比性质:如果$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,那么$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$。

如果$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,那么$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$。

(4) 比例的等比性质:如果$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,那么$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$。

(5) 等比性质的推广:如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \cdots \frac{m}{n}$,那么$\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n} = \frac{a}{b}$。

说明: 对于其他的同类量,也有与比例线段一样的比例性质。但在实数范围内,要注意分母不为零。

黄金分割:如果点 P 把线段 AB 分割成 AP 和 BP $(AP > BP)$ 两段,其中 AP 是 AB 和 BP 的比例中项,那么称这种分割为黄金分割,点 P 称为线段 AB 的黄金分割点。

【例题精析】

例 1 已知 a、b、c、d 是四条线段,它们的长度如下,试判断它们是不是成比例线段?

(1) $a = 0.1$ 厘米,$b = 0.8$ 厘米,$c = 0.02$ 厘米,$d = 4$ 厘米;

(2) $a = 1\frac{1}{7}$ 厘米,$b = 4$ 毫米,$c = 40$ 厘米,$d = 3\frac{1}{2}$ 厘米。

解: (1) 因为 $a : c = 0.1 : 0.02 = 5 : 1$,$d : b = 4 : 0.8 = 5 : 1$,

所以 $a : c = d : b$,

所以 a、b、c、d 是比例线段。

另解: 因为 a、b、c、d 中最长和最短的线段分别是线段 d、c,而 $cd = 0.08 = ab$,

所以 $a:c=d:b$，

所以 a、b、c、d 是比例线段。

(2) $b=4$ 毫米 $=0.4$ 厘米，

因为 a、b、c、d 中最长和最短的线段分别是线段 c、b，而 $bc=16\neq ad$，

所以 a、b、c、d 不是比例线段。

小结： 要判断四条线段是否成比例，可以先判断其中两条线段的比是否为另外两条线段的比，但是这种方法比较麻烦，要分析多次才能得出结论。而如果用 $a:b=c:d$（等比式）的另一种形式 $ad=bc$（等积式），只需判断四条线段中最长的线段与最短的线段长度之积是否等于另两条线段之积，可以极大地简化判断推理的过程。

例 2 已知 a、b、c、d 是比例线段，其中 $a=6$ 厘米，$b=8$ 厘米，$c=24$ 厘米，则线段 d 的长度是多少？

解： 因为 a、b、c、d 是比例线段，

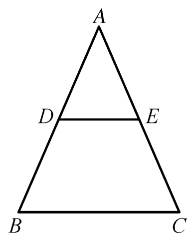
所以 $ad=bc$ 或者 $bd=ac$ 或者 $cd=ab$。

又因为 $a=6$ 厘米，$b=8$ 厘米，$c=24$ 厘米，

所以 $d=32$ 厘米或者 $d=18$ 厘米或者 $d=2$ 厘米。

小结： 用 $a:b=c:d$（等比式）的另一种形式 $ad=bc$（等积式），更容易做到对本题讨论时不重复不遗漏。

例 3 如图所示，已知：$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$。求证：(1) $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$；(2) $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{EC}{AC}$。



例 3 图

证明： (1) 因为 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$，

所以 $\dfrac{AD}{AD+DB}=\dfrac{AE}{AE+EC}$（合比性质），

即 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$。

(2) 因为 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$，

所以 $\dfrac{DB}{AD}=\dfrac{EC}{AE}$，

所以 $\dfrac{BD}{AD+DB}=\dfrac{EC}{AE+EC}$（合比性质），

即 $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{EC}{AC}$。

小结： 本题是比例合比性质的运用，也可以运用设 k 法来证明。

例 4 已知：$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}$，且 $x+y+z=6$，求 x、y、z 的值。

解： 因为 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}$，

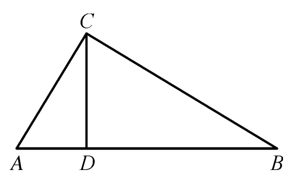
所以 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}=\dfrac{x+y+z}{12}$。

因为 $x+y+z=6$，

所以 $x=\dfrac{3}{2}$，$y=2$，$z=2.5$。

小结： 本题是比例等比性质的运用，也可以运用设 k 法来求解。

例 5 如图所示，在 Rt$\triangle ABC$ 中，CD 是斜边 AB 上的高。请找出一组比例线段，并说明理由。



例 5 图

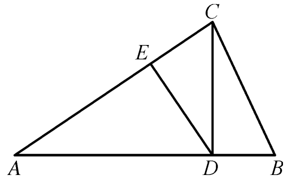
解： 因为 $\triangle ABC$ 是直角三角形且 CD 是斜边 AB 上的高，

所以 $\dfrac{1}{2}AC\cdot BC=S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot CD$。

因为 $AC \cdot BC = AB \cdot CD$ 即 $AC : AB = CD : BC$，

所以 AC、BC、AB、CD 是比例线段。

小结： 根据比例基本性质，要判断四条线段是否成比例，只要看其中两条线段的乘积是否等于另两条线段的乘积，而已知条件中有三角形的高，我们通常可以把三角形的面积公式联系起来。



例 5 变式图

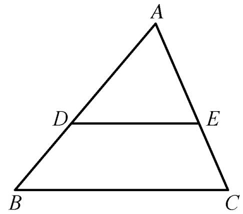
变式： 如图所示，在△ABC 中，$CD \perp AB$，$DE \perp AC$，请找出一组比例线段，并说明理由。

例 6　如图所示，在△ABC 中，D、E 分别是边 AB、AC 上的点，且 $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AE}{EC}$，

(1) 你能说明 $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{EC}{AC}$ 吗？

(2) 若 $AB = 12$，$AE = 6$，$EC = 4$，求出 BD 的长。

(3) 若 $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{3}{5}$，且△$ABC$ 的周长为 30，求出△ADE 的周长。



例 6 图

解：(1) 因为 $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AE}{EC}$，

所以$\dfrac{AD+BD}{BD} = \dfrac{AE+EC}{EC}$，

所以$\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{EC}$，

所以$\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{EC}{AC}$。

(2) 因为 $AB = 12$，$AE = 6$，$EC = 4$，

所以$\dfrac{BD}{12} = \dfrac{4}{4+6}$，

所以 $BD = 4.8$。

(3) 因为 $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{3}{5}$，

所以$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AD+AE+DE}{AB+AC+BC} = \dfrac{3}{5}$。

又因为△ABC 的周长为 30，

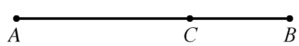
所以 $\dfrac{AD+AE+DE}{30} = \dfrac{3}{5}$。

所以△ADE 的周长为 18。

小结： 本题需要灵活运用根据比例性质中的合比定理和等比定理。

例 7　如图所示，已知线段 $AB = 6$，点 C 为线段 AB 的黄金分割点($AC>BC$)，求下列各式的值：

(1) $AC - BC$；　　　　(2) $\dfrac{BC}{AC}$。



例 7 图

解：(1) 因为点 C 为线段 AB 的黄金分割点($AC>BC$)，且 $AB=6$，

所以$AC = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}AB = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \times 6 = 3\sqrt{5}-3$，

$BC = 6 - AC = 6 - (3\sqrt{5}-3) = 9 - 3\sqrt{5}$，

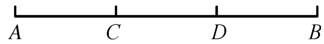
所以 $AC - BC = 6\sqrt{5} - 12$。

(2) $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{9-3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-3} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$。

小结： 本题考查的是黄金分割点的有关知识，我们要熟练掌握黄金分割点的定义以及黄金分割点分线段

所成的比。另外，第(2)小题也可以不用第(1)小题的结论，而直接通过黄金分割点的定义得出 $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$。

例 8 如图所示，线段 $AB=2$，点 C 是 AB 的黄金分割点 $(AC<BC)$，点 D 在线段 AB 上，且 $AD^2=BD\cdot AB$，求：$\dfrac{CD}{AC}$ 的值。



例 8 图

解： 因为点 D 在 AB 上，且 $AD^2=BD\cdot AB$，

所以点 D 是线段 AD 的黄金分割点，且 $AD>BD$，

所以 $AD=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}AB=\sqrt{5}-1$。

因为点 C 是 AB 的黄金分割点 $(AC<BC)$，

$AC=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}AB=3-\sqrt{5}$，

所以 $CD=AD-AC=2\sqrt{5}-4$，

所以 $\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{2\sqrt{5}-4}{3-\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$。

小结： 本题的条件中并没有直接告诉我们点 D 是线段 AD 的黄金分割点，而是需要我们通过黄金分割点的定义得出这个结论。另外，本题的条件 $AB=2$ 其实完全可以不用给出，我们也能得到这题的答案，请聪明的读者自己思考解题过程。

§24.3　三角形一边的平行线

【知识结构】

1. 比例的性质。
2. 三角形一边的平行线性质定理及推论。
3. 平行线分线段成比例定理。
4. 三角形一边的平行线判定定理及推论。

【要点点拨】

1. 三角形一边的平行线性质定理：平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线，截得的对应线段成比例。

2. 三角形一边的平行线性质定理推论：平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线，截得的三角形的三边与原三角形的三边对应成比例。

3. 三角形的重心：三角形三条中线的交点。

4. 三角形的重心性质：三角形的重心到一个顶点的距离，等于它到这个顶点对边中点的距离的两倍。

5. 三角形一边的平行线判定定理：如果一条直线截三角形的两边所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边。

6. 三角形一边的平行线判定定理推论：如果一条直线截三角形两边的延长线(这两边的延长线在第三边的同侧)所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边。

7. 平行线分线段成比例定理：两条直线被三条平行的直线所截，截得的对应线段成比例。

8. 两条直线被第三条平行的直线所截，如果在一条直线上截得的线段相等，那么在另一条直线上截得的线段也相等。

【例题精析】

例 1 如图所示，$AB \parallel EF \parallel DC$，$AB=3$厘米，$DC=4$厘米，求 EF 的长。

解： 因为 $AB \parallel EF$，$EF \parallel CD$，

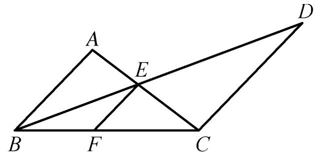
所以$\dfrac{EF}{AB}=\dfrac{FC}{BC}$，$\dfrac{EF}{CD}=\dfrac{BF}{BC}$，

所以$\dfrac{EF}{AB}+\dfrac{EF}{CD}=\dfrac{FC}{BC}+\dfrac{BF}{BC}=1$。

因为 $AB=3$厘米，$DC=4$厘米，

所以$\dfrac{EF}{3}+\dfrac{EF}{4}=1$，

所以 $EF=\dfrac{12}{7}$(厘米)。



例 1 图

小结： 图中的线段 EF 分别是两个三角形中一边的平行线，因此利用这两个三角形公共的线段作为中间量进行求解。本题的解决主要运用了三角形一边的平行线的性质定理。

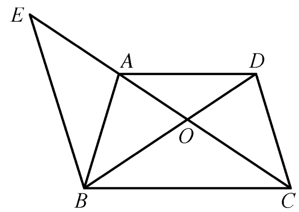
例 2 如图所示，梯形 $ABCD$，$AD \parallel BC$，AC，BD 相交于点 O，$BE \parallel CD$，与 CA 的延长线相交于点 E。求证：$OC^2=OE \cdot OA$。

解： 因为 $AD \parallel BC$，$EB \parallel CD$，

所以$\dfrac{OD}{OB}=\dfrac{OA}{OC}$，$\dfrac{OD}{OB}=\dfrac{OC}{OE}$，

所以$\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{OC}{OE}$，

所以 $OC^2=OE \cdot OA$。



例 2 图

小结： 此题求证的线段 OC、OE、OA 与两个 8 字形有关，因此寻找两个 8 字形中的共用线段来求解。本题的解决主要运用了三角形一边的平行线的性质定理推论。

例 3 如图所示，在平行四边形中，点 E 为边 BC 上一点，联结 AE 并延长 AE 交 DC 的延长线于点 M，交 BD 于点 G，过点 G 作 $GF \parallel BC$ 交 DC 于点 F，求证：$\dfrac{DF}{FC}=\dfrac{DM}{CD}$。

解： 因为 $GF \parallel BC$，

所以$\dfrac{DF}{FC}=\dfrac{DG}{BG}$。

因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

所以 $AD \parallel BC$，$AD=BC$，

所以$\dfrac{DG}{BG}=\dfrac{AD}{BE}$，

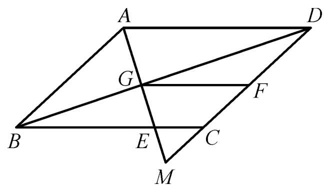
所以$\dfrac{DF}{FC}=\dfrac{AD}{BE}$。

因为 $BC \parallel AD$，

所以$\dfrac{DM}{MC}=\dfrac{AD}{EC}$，

所以$\dfrac{DM}{CD}=\dfrac{AD}{BE}$，

所以$\dfrac{DF}{FC}=\dfrac{DM}{CD}$。



例 3 图

小结： 本题主要利用三角形一边的平行线的性质定理、推论的综合运用。要注意找到几个基本图形“A”字形、“8”字形之间的联系。

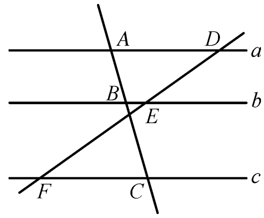
例 4 如图所示，已知 $a \parallel b \parallel c$，$AB=1.8$，$BC=2.6$，$DF=3$，求 EF 的长。

解：已知 $a \parallel b \parallel c$，

所以$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$，

所以$\dfrac{1.8}{2.6}=\dfrac{3-EF}{EF}$，

所以 $EF=\dfrac{39}{22}$。



例 4 图

小结：本题利用平行线分线段成比例定理，列方程进行求解。

例 5 如图所示，E、F、G、H 分别是四边形 $ABCD$ 各边上的点，且 $AH \cdot DG=HD \cdot CG$，$AE \cdot BF=EB \cdot CF$，联结 FH、EG 交于点 I。

求证：$HI \cdot EI=GI \cdot FI$。

解：联结 HG、AC、EF，

因为 $AH \cdot DG=HD \cdot CG$，

所以$\dfrac{AH}{HD}=\dfrac{CG}{DG}$，

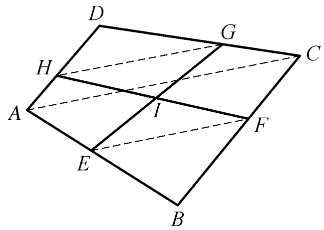
所以 $HG \parallel AC$。

同理得 $EF \parallel AC$，

所以 $HG \parallel EF$，

所以$\dfrac{HI}{IF}=\dfrac{GI}{EI}$，

所以 $HI \cdot EI=GI \cdot IF$。



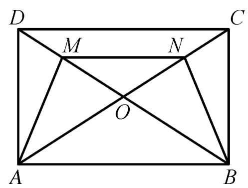
例 5 图

小结：证明线段的乘积问题可先转化为比例，再利用平行线分线段成比例定理及判定定理进行证明。

例 6 如图所示，已知矩形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，M、N 分别是 OD、OC上异于 O、C、D 的点。

（1）请你在下列条件：① $DM=CN$，② $OM=ON$，③ MN 是$\triangle OCD$ 的中位线，④ $MN \parallel AB$ 中任选一个添加条件（或添加一个你认为更满意的其他条件），使四边形 $ABNM$ 为等腰梯形，你添加的条件是________；

（2）添加条件后，请证明四边形 $ABNM$ 是等腰梯形。



例 6 图

分析：（1）从 4 个条件中任选一个即可，可以添加的条件为①；

（2）先根据 SAS 证明 $\triangle AMD \cong \triangle BCN$，所以可得 $AM=BN$，由矩形的对角线相等且平分，可得$OD=OC$ 即 $OM=ON$，从而知$\dfrac{OM}{OD}=\dfrac{ON}{OC}$，根据平行线分线段成比例，所以 $MN \parallel CD \parallel AB$，且 $MN \neq AB$，即四边形 $ABNM$ 是等腰梯形。

解：（1）添加条件是① $DM=CN$；

（2）证明：因为 $AD=BC$，$\angle ADM=\angle BCN$，$DM=CN$，

所以 $\triangle AMD \cong \triangle BCN$，

所以 $AM=BN$，由 $OD=OC$ 知 $OM=ON$，

所以$\dfrac{OM}{OD}=\dfrac{ON}{OC}$，

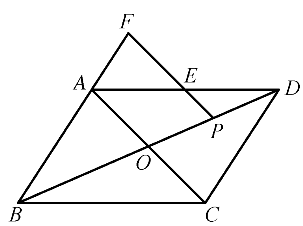
所以 $MN \parallel CD \parallel AB$，且 $MN \neq AB$。

所以四边形 $ABNM$ 是等腰梯形。

小结：本题是对平行线分线段成比例判定定理的运用。

例 7 如图所示，已知：$\square ABCD$ 的对角线交于点 O，点 P 是直线 BD 上任意一点（异于 B、O、D 三点），过 P 点作平行于 AC 的直线，交直线 AD 于 E，交直线 AB 于 F。

（1）若点 P 在线段 BD 上（如图所示），试说明：$AC=PE+PF$；



例 7 图 1