

用最简单的方法解最难的题

(七年级)



重点

主编 / 程淑民

初中数学

重难点全解

五点一测



难点

考试
易错点



能力
提高点



好题荟萃 精雕细琢

思想方法
拓展点



适用对象:

提高班、实验班、尖子班的学生



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS



重点

主编 / 程淑民



难点

考试
易错点



初中数学 重难点全解 五点一测

(七年级)

能力
提高点



思想方法
拓展点



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

· 上海 ·

图书在版编目(CIP)数据

初中数学重难点全解:五点一测. 七年级/程淑民主编.
—上海:华东理工大学出版社,2015.4
ISBN 978-7-5628-4186-9

I. ①初… II. ①程… III. ①中学数学课—初中—教
学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 051838 号

初中数学重难点全解:五点一测(七年级)

.....

主 编 / 程淑民

策划编辑 / 陈月姣

责任编辑 / 李 晔

责任校对 / 张 波

封面设计 / 戚亮轩

出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司

地 址:上海市梅陇路 130 号,200237

电 话:(021)64250306(营销部)

(021)64252735(编辑室)

传 真:(021)64252707

网 址:press.ecust.edu.cn

印 刷 / 常熟市华顺印刷有限公司

开 本 / 787 mm×1092 mm 1/16

印 张 / 9

字 数 / 225 千字

版 次 / 2015 年 4 月第 1 版

印 次 / 2015 年 4 月第 1 次

书 号 / ISBN 978-7-5628-4186-9

定 价 / 25.80 元

联系我们:电子邮箱 press@ecust.edu.cn

官方微博 e.weibo.com/ecustpress

淘宝官网 http://shop61951206.taobao.com



前言

数学是研究数量关系和空间形式的科学,学好数学有助于我们用科学的方法思考问题,通过有效的途径解答问题. 同学们,在小学阶段,我们已经接触了数字的加、减、乘、除及乘方运算,进入初中,我们把数的范围、运算进一步拓展,运用适当的形式描述数字、图形等的变化规律.

当你翻开这套丛书时,你会发现,学习原来可以如此轻松、快乐! 其实数学就在我们身边,在每一次活动,每一次游戏中,都蕴含着不少的数学知识.善于发现活动、游戏中的某些数学规律,常常可以带给我们许许多多的快乐!

本套丛书根据国家课程标准的要求,结合 7~9 年级教材的具体内容编写,适应初中生的认知规律和思维特征,并以“章”为单位,从“重点”“难点”“考试易错点”“能力提高点”“思想方法拓展点”五个方面阐述这一章的知识点、各个概念与性质之间的联系规律,精选典型例题,通过例题的剖析、解答及知识拓展,让学生进行适当的数学思考,体会“数形结合”“转化”“分类讨论”及“方程与函数”等数学思想方法,发展合情推理和演绎推理能力,并能清晰地表达自己的想法,掌握分析问题和解决问题的一些基本方法,通过一题多解、一题多变的分析、点拨,体验解决问题的方法的多样性,发展创新意识.

每一分册不限制教材版本,以“专项”的形式概括内容. 每一个年级按照主要知识点都分为 8 章,在精心设计的每一个例题后面都附加一道相关的练习题,便于学生运用例题的思想方法,解答相关的问题,参考例题后面的知识拓展,感悟解题通法及一般规律. 从知识点之间的联系,延伸到知识面,从思维的广度到深度两个不同的层面,获得解决数学问题的成功体验.在讲解与跟踪练习后面,附加一章知识内容的测试题,按照由浅入深、由易到难的层次进行编排,便于学生在学习过程中及时发现知识层面的缺失,通过查漏补缺,完善自己的知识系统.

总之,本套丛书既有方法的讲解,又有习题的演练,是一本融知识技能、思想方法等为一体的学习参考书,希望同学们在本套丛书的陪伴下,像一条自由自在的鱼儿,在知识的海洋里尽情地遨游!

当然,由于作者水平有限,编写时间紧张,书中部分问题的解法或非最佳,同学们在使用的过程中对某一个问题的解法或许有更为独到的感悟,“一枝独放不是春,百花齐放春满园”! 这正是我们所期待的.同时敬请读者对书中出现的疏漏批评指正,使我们的书能不断改进、不断完善,让更多的读者受益.

目 录

CONTENTS

第一章 有理数	(1)
知识导航	(1)
五点量化分析	(1)
1. 重点	(1)
2. 难点	(2)
3. 考试易错点	(4)
4. 能力提高点	(6)
5. 思想方法拓展点	(8)
本章自测	(9)
第二章 整式的加减	(13)
知识导航	(13)
五点量化分析	(13)
1. 重点	(13)
2. 难点	(15)
3. 考试易错点	(17)
4. 能力提高点	(18)
5. 思想方法拓展点	(20)
本章自测	(22)
第三章 一元一次方程	(26)
知识导航	(26)
五点量化分析	(26)
1. 重点	(26)
2. 难点	(28)
3. 考试易错点	(31)
4. 能力提高点	(33)
5. 思想方法拓展点	(36)
本章自测	(38)



第四章 一元一次不等式	(42)
知识导航	(42)
五点量化分析	(42)
1. 重点	(42)
2. 难点	(44)
3. 考试易错点	(46)
4. 能力提高点	(49)
5. 思想方法拓展点	(50)
本章自测	(52)
第五章 二元、三元一次方程组	(57)
知识导航	(57)
五点量化分析	(57)
1. 重点	(57)
2. 难点	(59)
3. 考试易错点	(62)
4. 能力提高点	(65)
5. 思想方法拓展点	(68)
本章自测	(71)
第六章 实数	(75)
知识导航	(75)
五点量化分析	(75)
1. 重点	(75)
2. 难点	(76)
3. 考试易错点	(78)
4. 能力提高点	(79)
5. 思想方法拓展点	(81)
本章自测	(83)
第七章 几何图形初步(线段、角、相交线、平行线)	(86)
知识导航	(86)
五点量化分析	(86)
1. 重点	(86)
2. 难点	(88)
3. 考试易错点	(89)
4. 能力提高点	(91)
5. 思想方法拓展点	(93)
本章自测	(95)

第八章 平面直角坐标系	(100)
知识导航	(100)
五点量化分析	(100)
1. 重点	(100)
2. 难点	(102)
3. 考试易错点	(104)
4. 能力提高点	(106)
5. 思想方法拓展点	(108)
本章自测	(110)
参考答案与提示	(114)

第一章 有理数

知识导航

ZHI SHI DAO HANG

本章的主要知识点可以概括为有理数的有关概念和有理数的运算两部分.

有理数的有关概念包括有理数分类的原则和方法、相反数、数轴、绝对值的概念和特点.可以利用数轴来认识和理解有理数的有关概念.

有理数的运算和运算律是本章的重点.运算包括有理数的加、减、乘、除、乘方及简单的混合运算;运算律包括加法交换律、加法结合律、乘法交换律、乘法结合律、乘法分配律等.科学计数法与乘方有关,近似数和有效数字在实际生活中有广泛意义.

五点量化分析

WU DIAN LIANG HUA FEN XI

1. 重点

有理数是初中数学的基础内容,也是中考的重要考点之一,主要和其他知识联合考查.中考试题中分值约为3~6分,多以选择题、填空题、计算题的形式出现,属于简单题.近几年主要考查以下几个方面:(1)相反数,绝对值,倒数等相关概念;(2)负数的乘方,加减及混合运算.

本章的重点是有理数概念的理解及有理数的运算和运算律.基本概念的考查频率很高,几乎每个地区的中考卷都会涉及.有理数运算和运算律一般融入其他运算一并考查,近似数和有效数字考试中涉及略少.

例 1 下面说法正确的是().

- A. 0 不是整数
- B. 有理数包括正整数、负整数、正分数、负分数
- C. 一个整数不是正整数,就是负整数
- D. 整数和分数统称为有理数

【解析】 此题必须明确有理数的意义和分类.整数包括正整数、0、负整数,因此选项 A、选项 C 不正确.0 是有理数,因此选项 B 不正确.整数和分数统称为有理数,故选项 D 正确.

【说明】 有理数的分类方式有两种,可分为整数、分数;也可分为正数、0 和负数.因此,有理数分类要按统一标准分类,做到既不重复,也不遗漏.另外,整数可以看作分母是 1 的分数.因此,有理数都可以化成分数,而能够化成分数的数就是有理数. $\pi=3.1415926\cdots$ 是无限不循环小数,它不能化成分数,所以 π 不是有理数.

练习 1 下列说法中正确的有().

- ①最小的自然数是 1;②最小的正数是 1;③最小的非负数是 0;④0 既不是奇数,也不是偶



数;⑤0表示没有海拔高度.

A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

例2 在中央电视台“开心辞典”栏目中,主持人问嘉宾这样一道题目:“若数轴上的点A和点B表示互为相反数的两个数,并且它们到原点的距离之和是9.6,那么点A和点B表示两个什么样的数?($A > B$)”你能帮嘉宾解决问题吗?

【解析】 互为相反数的两个数,它们的绝对值相等,所以它们到原点的距离相等.两个数到原点的距离和是9.6,那么它们到原点的距离均为4.8,因此大数A是4.8,小数B是-4.8.

【说明】 绝对值、相反数、数轴的概念难度不大,但极易混淆.有时也和定义新运算这类题目联系起来考查.数轴上任意两点间的距离是有关高中知识“空间距离”学习的基础.例如,表示数a的点A与表示数b的点B之间的距离 $AB = |a - b|$ 或 $AB = |b - a|$,与表示数m的点的距离为a($a > 0$)的点有两个,分别是 $m + a$ 和 $m - a$.

练习2 数轴上表示整数的点称为整点.某数轴的单位长度是1厘米,若在这个数轴上任意画一条长为2015厘米的线段,则该线段盖住的整点的个数是().

A. 2012或2013

B. 2013或2014

C. 2014或2015

D. 2015或2016

例3 计算 $-17 + 17 \div (-1)^{11} - 5^3 \times (-0.2)^3$.

【解析】 原式 $= -17 + 17 \div (-1) - 125 \times (-0.008)$

$$= -17 + (-17) - (-1)$$

$$= -17 - 17 + 1$$

$$= -33.$$

【说明】 有理数运算是初中数学运算的基础,熟练地进行有理数运算是初一数学的重点.有理数混合运算区别于小学混合运算的根本点是符号的处理.在运算中要强调符号优先的原则,任何一种运算都要遵循先定符号后算数的原则,同时还要注意不同种运算之间的相互转化.减法先变为加法,除法先变为乘法后再运算.加法法则可先确定和的符号,再做绝对值的运算.异号两数相加较易出错,应加以注意.有理数乘法的重点仍然是确定符号,先确定好符号,然后把绝对值相乘;带分数相乘时,要先把带分数化为假分数;分数与小数相乘时,要统一化成小数或分数.

练习3 计算 $-1 - \left\{ (-3)^3 - \left[3 + 0.4 \times \left(-1 \frac{1}{2} \right) \right] \div (-2) \right\}$.

2. 难点

本章的难点是负数概念的建立、有理数有关概念的深入理解以及有理数运算法则的理解和运用.正数和负数是表示相反意义的量,正和负具有相对性.有理数的运算是一切运算的基础,也



是必考内容.考试中的难题往往把有理数有关概念与计算相结合.

突破方法:(1)牢固掌握有理数有关的概念,如相反数,倒数,绝对值等,真正掌握数形结合的思想.(2)熟练掌握有理数的各种运算法则,特别是有负数的运算.在混合运算中须特别注意符号和运算顺序.

例 1 从前有座庙,庙里有个小和尚,每天早晨都清扫庙门前的台阶.庙的门前一共有 9 级台阶,当他一步只能上 1 级台阶或 2 级台阶时,走完 1 级台阶只有 1 种方法;走完 2 级台阶共有 2 种方法;走完 3,4,5,6,7 级台阶,共分别有 3,5,8,13,21 种方法.那么,当他走完这 9 级台阶,一共有多少种方法呢?

【解析】 这是一道找规律题,当台阶分别是

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 时

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

所对应的方法有 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 种

经观察发现,每一种方法数目都是前面两种方法数目的和,所以,走完 8 级台阶有 $13+21=34$ (种)方法,走完 9 级台阶有 $21+34=55$ (种)方法.

【说明】 规律题也是本章的一大难点.近年来,经常出现一类由特殊到一般,由具体到抽象的规律探究中考题,它涉及有理数的运算特点.例如增加相同的加数或相同的倍数,后面的数是前面几个数的和或正负数交替出现,相应的数是序号数的平方等.这类问题思路别致,具有启发思维、引导创新的意义.

练习 4 观察下列数据的变化规律,写出第 n ($n \geq 1$) 个数 $-2, 4, -6, 8, -10 \dots$ 则第 n 个数为 _____.

例 2 如图 1-1,数轴上的三点 A, B, C 分别表示有理数 a, b, c ,化简 $|a+b|+|a-c|-|c-b|$.

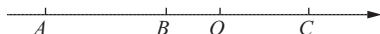


图 1-1

【解析】 由题意得 $a < b < 0 < c$, $|b| < |c| < |a|$,

所以 $a+b < 0, a-c < 0, c-b > 0$.

所以原式 $= -(a+b) + [-(a-c)] - (c-b)$

$$= -a - b - a + c - c + b$$

$$= -2a.$$

【说明】 首先要全面理解绝对值的定义.绝对值有两层含义.①代数定义:正数的绝对值是它的本身,0 的绝对值是 0,负数的绝对值是它的相反数;②几何定义:数 a 的绝对值的几何意义是实数 a 在数轴上所对应的点到原点的距离.其次,绝对值的化简要注意三个问题:①符号“ $|$ ”是“非负数”的标志;②数 a 的绝对值只有一个;③处理任何类型的题目,只要其中有“ $|$ ”出现,其关键一步是去掉“ $|$ ”符号.

练习 5 如图 1-2,蚂蚁妈妈在数轴上的点 A 处,已知数轴上点 A 表示的数为 6, B 是数轴上另一点,且 $AB=9$. 蚂蚁妈妈从点 A 出发,以每秒 5 个单位长度的速度沿数轴向左匀速运动,设运动时间为 t ($t > 0$) 秒.

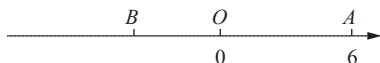


图 1-2

- (1) 写出数轴上点 B 表示的数 _____, 蚂蚁妈妈在运动过程中的某一点表示的数是 _____ (用含 t 的代数式表示);
- (2) 一只小蚂蚁从点 B 出发, 以每秒 4 个单位长度的速度沿数轴向左匀速运动, 若两只蚂蚁同时出发, 问蚂蚁妈妈运动到多少秒时追上小蚂蚁?

例 3 下列等式成立的是().

A. $100 \div \frac{1}{3} \times (-3) = 100 \times 3 \times (-3)$

B. $100 \div \frac{1}{3} \times (-3) = 100 \times 3 \times 3$

B. $100 \div \frac{1}{3} \times (-3) = -100 \div \left(\frac{1}{3} \times 3\right)$

D. $100 \div \frac{1}{3} \times (-3) = 100 \times \frac{1}{3} \times 3$

【解析】 选项 B 丢了负号; 选项 C 搞乱了运算顺序, 乘除法是同级运算, 应该从左往右按顺序运算, 不应该先算后面的. 选项 D 弄错除法法则和漏掉负号, 除以一个分数等于乘以这个分数的倒数. 故选 A.

【说明】 此题考查运算顺序, 做有理数混合运算, 必须注意运算顺序: 先乘方, 再乘除, 最后加减; 同级运算从左向右进行; 如果有括号, 先做括号内的运算, 按小括号、中括号、大括号的顺序依次进行. 在进行混合运算时, 若能用运算律则用运算律, 使运算简捷.

练习 6 计算 $-100 \times \frac{1}{8} - 0.125 \times 32.5 + 17.5 \times (-12.5\%)$.

3. 考试易错点

本章的易错点比较细小, 也比较多. 例如, 符号问题、混合运算的顺序、乘方运算的意义、科学计数法理解不透、有效数字和近似数弄错等. 最大的易错点就是符号, 学生往往忽视了符号在运算中所起的作用. 任何一种运算都要先考虑符号, 尤其是乘方运算, 更要注意符号的前提下, 避免底数的运算错误.

例 1 计算 $-1^2 - \frac{3}{4} \times \left[-3^2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2\right] \div (-1)^{2013}$.

【解析】 原式 $= -1 - \frac{3}{4} \times \left(-9 \times \frac{4}{9} - 2\right) \div (-1)$
 $= -1 - \frac{3}{4} \times (-4 - 2) \div (-1)$
 $= -1 - \frac{3}{4} \times (-6) \div (-1)$



$$= -1 - \frac{9}{2} = -\frac{11}{2}.$$

【说明】 有理数的乘方运算是利用有理数乘法运算进行的,根据有理数的乘法法则得出:

①负数的奇次幂是负数,负数的偶次幂是正数;②正数的任何次幂都是正数;③0的任何次幂都是0.乘方运算经常在符号上出错,例如, $-2^4 = -16$, $(-2)^4 = 16$,前者“-”不发生4次方运算,因此结果仍然是负数,后者“-”发生了4次方运算,因此结果是正数,注意两者的区别.再者,解题一定要注意运算顺序的正确性,不可任意颠倒.

练习7 计算 $-7^2 + 2 \times (-2)^2 + (-6) \div \left(-\frac{1}{3}\right)^2$.

例2 一位知名企业家去看望幸福养老院的老人,带去了价值约1.35万元的日用品和价值约 3.02×10^5 元的营养品.(1)请判断这两个近似数各精确到了哪一位?(2)它们各有几位有效数字?

【解析】 (1)题不要只看1.35,而忽略了单位“万”,把1.35万还原为13 500,再看数字5在哪个数位,因此答案是精确到百位,有3位有效数字.

(2)题不要只看3.02,而忽略了“ $\times 10^5$ ”.把 3.02×10^5 还原为302 000,再看数字2在哪个数位,因此答案是精确到千位,有3位有效数字.

【说明】 一般地,一个近似数四舍五入到哪一位,就说这个近似数精确到哪一位.近似数末尾的数字在什么数位上,就表明精确到什么数位.有效数字的位数是从左边第一个不是0的数字起到最后一个数字为止.但是一个用科学计数法表示的数,即 $a \times 10^n$,有效数字只算 a 中的位数;精确度是 a 中最末一位数字,数位必须是这个数字在还原后的数中的数位.

练习8 “嫦娥三号”已成功发射,在行进中的某一时刻,测得距离它最近的三个星球的距离分别是下面的数值.请你用四舍五入法对下列各数按要求取近似值,并用科学计数法表示结果.

(1) 523 600 千米(精确到千位);(2) 668 954 000 千米(精确到千万位);

(3) 95 288 000 千米(精确到万位).

例3 计算(1) $\left(2\frac{1}{3} - 3\frac{1}{2} + 1\frac{13}{36}\right) \div \left(-1\frac{1}{6}\right)$;

(2) $\left(-\frac{1}{30}\right) \div \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{6}\right)$.

【解析】 (1) 先把除法转化为乘法,再利用乘法分配律计算.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left(\frac{7}{3} - \frac{7}{2} + \frac{49}{36}\right) \times \left(-\frac{6}{7}\right) \\ &= \frac{7}{3} \times \left(-\frac{6}{7}\right) - \frac{7}{2} \times \left(-\frac{6}{7}\right) + \frac{49}{36} \times \left(-\frac{6}{7}\right) \\ &= -2 + 3 - \frac{7}{6} = -\frac{1}{6}; \end{aligned}$$

(2) 先计算括号里面的,然后再把除法转化为乘法计算.

$$\text{原式} = \left(-\frac{1}{30}\right) \div \frac{10}{6} = \left(-\frac{1}{30}\right) \times \frac{6}{10} = -\frac{1}{50}.$$

【说明】 灵活适当地运用运算律可以简化运算,从而提高解题速度.但减法和除法没有运算律,要先把减法转化为加法,除法转化为乘法之后,才可以使用运算律.例如上面第(2)题的除法就不能使用分配律.因此,计算不能急于求成,不能在违反运算顺序的情况下强行“简便”运算.计算题算出结果后,还要认真检查,防止出错.

练习9 阅读计算过程:

$$3 \frac{1}{3} - 2^2 \div \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 - (-3 + 0.75) \right] \times 5.$$

$$\text{解:原式} = 3 \frac{1}{3} - 2^2 \div \left(\frac{1}{4} - 3 + \frac{3}{4} \right) \times 5 \quad \text{①}$$

$$= 3 \frac{1}{3} + 4 \div (-2) \times 5 \quad \text{②}$$

$$= 3 \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \quad \text{③}$$

$$= 3 \frac{11}{15}.$$

回答下列问题:

- (1) 步骤①错在_____;
- (2) 步骤①到步骤②错在_____;
- (3) 步骤②到步骤③错在_____;
- (4) 此题的正确结果是_____.

4. 能力提高点

在充分理解有理数有关概念,正确掌握有理数运算法则和运算顺序、运算律后,就具备了解决一些综合性题目的能力.我们可以根据某些题目的特点,将算式灵活变形,对不同的算式可以采取运算顺序重新组合、因数分解、拆项裂项等不同的方法,达到优化解题、简化计算的目的.

例1 若一台机器人站在数轴的原点处,按照指令分别向左右两个方向移动,右边是正方向,左边是负方向.先向右移动1米,再向左移动2米;然后再向右移动3米,向左移动4米.依次移动下去,每次方向相反,距离增加1米.当移动完2 014次时,它位于原点的哪一侧? 距离原点多远?

【解析】 向右记为正数,向左记为负数.那么有

$$1 + (-2) + 3 + (-4) + \cdots + 2\,011 + (-2\,012) + 2\,013 + (-2\,014),$$

将此式中的数两两相加,

$$\text{原式} = (-1) + (-1) + \cdots + (-1)$$

$$= -1\,007.$$

即移动完2 014次时,它位于原点左侧,距离原点1 007米远.

【说明】 运用加法的交换律、结合律,把某些具有相同属性的数分别结合在一起相加,例如,正数和负数分别相加;同分母分数相加;带分数把整数和分数部分拆开分别相加;相反数相加等.



这样可以很大程度地简化运算.

练习 10 计算 $1+2+3+4+5+6+\cdots+998+999+1\ 000$.

例 2 现定义两种运算“ $*$ ”“ $\triangle$ ”,对于任意两个整数 a, b , 有 $a * b = ab - 2$, $a \triangle b = a + b + 1$, 求式子 $5 \triangle [(2 * 3) * (3 \triangle 4)]$ 的值.

【解析】 原式 $= 5 \triangle [(2 \times 3 - 2) * (3 + 4 + 1)]$

$$= 5 \triangle (4 * 8)$$

$$= 5 \triangle (4 \times 8 - 2)$$

$$= 5 \triangle 30$$

$$= 5 + 30 + 1$$

$$= 36.$$

【说明】 定义新运算中的“符号”代表的是一种特定的运算,它是一种融合了几种基本运算在内的综合运算程序.在不同的题目中分别有不同的代表性,具体到每一道题,它首先会标明“符号”所代表的运算程序,我们只要在正确运算的基础上按照其程序运算即可.

练习 11 已知 a, b 为有理数,如果规定一种新的运算“ $\star$ ”,即 $a \star b = ab + a - b + 1$.例如, $2 \star 3 = 2 \times 3 + 2 - 3 + 1 = 6$.

请你根据“ $\star$ ”的定义计算下列各题:

(1) $(-2) \star 5$; (2) $(4 \star 2) \star (-1)$.

例 3 已知 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2014}$ 都是正整数,且 $P = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2013}) \times (a_2 + a_3 + \cdots + a_{2013} + a_{2014})$, $Q = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{2013} + a_{2014}) \times (a_2 + a_3 + \cdots + a_{2013})$.那么 P, Q 的大小关系是 ().

A. $P > Q$

B. $P < Q$

C. $P = Q$

D. 无法确定

【解析】 $P = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2013}) \times (a_2 + a_3 + \cdots + a_{2013} + a_{2014})$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2013}) \times (a_2 + a_3 + \cdots + a_{2013}) + (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2013}) \times a_{2014},$$

$$Q = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{2013} + a_{2014}) \times (a_2 + a_3 + \cdots + a_{2013})$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2013}) \times (a_2 + a_3 + \cdots + a_{2013}) + a_{2014} \times (a_2 + a_3 + \cdots + a_{2013}),$$

$$\text{因为 } (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2013}) \times a_{2014} > a_{2014} \times (a_2 + a_3 + \cdots + a_{2013}),$$

所以 $P > Q$, 故选 A.

【说明】 这种题目就要把着眼点放在问题的整体结构上,通过对题目的整体分析,把其中的 $(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2013}) \times (a_2 + a_3 + \cdots + a_{2013})$ 当作一个整体,只把 a_{2014} 分离出来,这样就在两个不同的式子之间找到了共同点,也就找到了突破点,然后只比较不同的部分即可.

练习 12 已知 a, b, c 为整数,且 $a + b = 26$, $c - a = 15$.若 $a < b$,则 $a + b + c$ 的最大值是多少?



5. 思想方法拓展点

在本章的学习中,基本的学习要求是熟练地掌握相反数、绝对值、数轴等定义,更重要的是了解其中蕴含的数学思想方法.本章中最常用的数学思想方法有方程思想、整体思想、数形结合思想、化归思想、分类讨论思想等.学习数学要不断去探索、猜想、不断总结规律方法,才会有所发现、有所创新.这就是人们常说的“举一反三”.

例 1 在数轴上表示 $p, 0, 1, q$ 四个数的点如图 1-3 所示,已知 O 为 PQ 的中点,求 $|p+q| + \left| \frac{p}{q} \right| + |p+1|$ 的值.

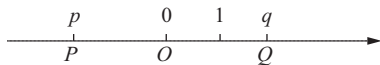


图 1-3

【解析】 此题充分利用数轴的直观形象,理解一对相反数到原点的距离相等,因此一对相反数的和是 0,而一对相反数的商是 -1 ,此问题便迎刃而解.

因为 O 为 PQ 的中点,则 $p+q=0, p=-q$,

所以 $|p+q|=0, \left| \frac{p}{q} \right|=1$,由数轴可知 $p < -1$,则 $|p+1|=-p-1$,

所以原式 $= 0 + 1 - p - 1 = -p$.

【说明】 本题所体现的是数形结合的思想.数轴是数形结合的重要工具.本章中,我们一直用数轴来定义或描述有理数的概念、运算等,数轴成为理解有理数及其运算的重要工具.在解决没有给出具体数值的有理数问题时,常常把“数”的问题通过数轴转化为“形”来表示,从而直观简捷地解决问题.

练习 13 如果 a, b, c, d 为互不相等的有理数,且 $|a-c|=|b-c|=|d-b|=1$,则 $|a-d| =$ _____.

例 2 为了增加陌生人之间的友爱和关怀,社会上很多年轻人成立了“抱抱团”.如果“抱抱团”的一名成员分别去热情拥抱两名陌生人,而每名被拥抱的人再去拥抱另外两名陌生人,照这样依次拥抱下去,那么,当拥抱完 2013 次之后,这条线上所有参加过拥抱的一共有多少人?

【解析】 发起人 1 名,一次拥抱结束后增加 2 人,两次拥抱结束后增加 2^2 人,以此类推,2013 次拥抱结束后增加 2^{2013} 人.所以总人数为 $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{2011}+2^{2012}+2^{2013}$ (人).

此题运算的数多,且幂指数大,无法直接计算,必须先将其变形,应用错位相减法,消掉一些项再进行计算.

$$\text{设 } S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2011} + 2^{2012} + 2^{2013},$$

$$\text{故 } 2S = 2 \times (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2011} + 2^{2012} + 2^{2013})$$

$$= 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2011} + 2^{2012} + 2^{2013} + 2^{2014}.$$

$$\text{所以 } S = 2S - S$$

$$= (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2011} + 2^{2012} + 2^{2013} + 2^{2014}) - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2011} + 2^{2012} + 2^{2013})$$

$$= 2^{2014} - 1.$$



即当拥抱完 2013 次之后,这条线上所有参加过拥抱的一共有 $2^{2014} - 1$ 人.

【说明】 本题体现的是化归思想方法,就是将所要解决的复杂问题转化为简单问题来解决.具体地说,就是把“旧知识”转化为“新知识”,把“未知”转化为“已知”,把“复杂”问题转化为“简单”问题.对于算式规律性问题,我们要注意观察各部分算式的变化规律以及各算式之间的关系.根据其规律将算式变形,转化为简单的关系来解决.

练习 14 已知 $|ab-2| + |a-2| = 0$, 求 $\frac{1}{ab} + \frac{1}{(a+1)(b+1)} + \frac{1}{(a+2)(b+2)} + \cdots + \frac{1}{(a+2012)(b+2012)}$ 的值.

例 3 比较 $|p| + |q|$ 与 $|p+q|$ 的大小.

【解析】 我们根据绝对值的法则,要化简绝对值符号,必须先判断绝对值符号里面的式子的正负性.即根据“先定正负后去号”的原则,式子中字母的取值,要分三种情况讨论.①当 p, q 符号相同时,无论同正还是同负,都有 $|p| + |q| = |p+q|$; ②当 p, q 符号相反时,无论 p, q 哪一个为负,都有 $|p| + |q| > |p+q|$; ③当 p, q 至少一个为 0 时,则有 $|p| + |q| = |p+q|$.

【说明】 本题所用的是分类讨论思想.当研究的问题包含多种可能时,不能一概而论,必须按可能出现的所有情况来分别讨论,得出相应的结论.本章在研究相反数、绝对值、有理数乘方运算的符号法则时,都是把有理数分为正数、负数、零三类分别进行研究的.例如绝对值化简的 0 段分类法、倒数中的分段讨论大小都是分类讨论思想.分类讨论必须遵循两条原则:①每一次分类的标准相同;②不重复,不遗漏.

练习 15 设 $y = |k-1| + |k+1|$ 则下面四个结论中正确的是().

- A. y 没有最小值
B. 只有一个 k 使 y 取最小值
C. 有限个 k (不止一个)使 y 取最小值
D. 有无穷多个 k 使 y 取最小值

本章自测 (100分)

一、填空题(每小题 2 分,共 28 分)

1. 在 $-1.5, \frac{19}{7}, 0, \frac{\pi}{3}, 0.131313\cdots, -\frac{2}{5}$ 中,有理数的个数是_____.
2. 王老师家的冰箱冷冻室的温度是 -4°C ,调高 2°C 后的温度是_____ $^\circ\text{C}$.
3. 多多同学写错了一个算式 $-5+12=17$,请你在不改变数字的情况下,直接在算式中添加“括号”“绝对值符号”或“负号”(不限定个数)使等式成立:_____.
4. 实验表明,一个成年人血液的质量占人体质量的 $6\% \sim 7.5\%$,某人体重 65 千克,那么他的血液质量范围在_____千克.(结果保留两个有效数字)

5. 若 $|a| = 2$, 则 $a + 3 =$ _____; 若 a 的相反数是最小的质数, b 是最大的负整数, 则 $a + |-b| =$ _____.
6. 有理数 a 等于它的倒数, 有理数 b 等于它的相反数, 则 $a^{2013} + b^{2013} =$ _____.
7. 一个数与 -3 的乘积是 $-1\frac{5}{6}$ 的倒数, 则这个数是 _____.
8. 已知 x, y, z 是不为 0 的有理数, 化简 $\frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y} + \frac{|z|}{z}$ 的值可能是 _____.
9. 2008 年北京奥运会火炬传递路线全长约为 13 700 公里, 用科学计数法表示为 _____; 精确到千位是 _____.
10. 已知 $|a| = 5, |b| = 3$, 且 $\frac{a}{b} < 0$, 则 $a + b =$ _____, $ab =$ _____.
11. 某种活性细胞在培养过程中, 每半小时就分裂一次, 由一个分裂成两个, 经过 3 小时, 这种细胞可由一个分裂成 _____ 个.
12. 下列有四个结论①若 $a = b$, 则 $a^2 = b^2$, ②如果 $a > b$, 那么 $a^2 > b^2$, ③若 $a^2 = b^2$, 则 $a = b$, ④如果 $a^2 > b^2$, 那么 $a > b$. 其中正确的有 _____ 个.
13. 绝对值不大于 10 000 的所有整数的和是 _____, 积是 _____.
14. 计算 $(-1)^4 - \frac{1}{6} \times [2 - (-3)^2] =$ _____.

二、选择题(每小题 3 分, 共 18 分)

15. 下列说法中正确的是().
 - A. 同号两数相乘, 符号不变
 - B. 两个数相加, 和大于任何一个加数
 - C. 任何数与 0 相乘仍得这个数
 - D. 一个数与 -1 相乘, 积为该数的相反数
16. 下面说法中错误的是().
 - A. 近似数 2 千万和 2×10^3 万精确度相同
 - B. 近似数 2 千万和 2×10^3 万的有效数字相同
 - C. 近似数 2.013 和 2.010 有效数字位数相同
 - D. 近似数 2.013 和 2.010 精确度不同
17. 下列说法中正确的是().
 - A. 若 $a = -b$, 则 $|a| = -|b|$
 - B. 若 $|a| = |b|$, 则 $a = b$
 - C. 如果 $|a| > |b|$, 那么 $a^2 > b^2$
 - D. 如果 $a > b$, 那么 $|a| > |b|$
18. 小花猫捡到了一块蛋糕, 被狐狸看到了, 狡猾的狐狸就一口吃掉了蛋糕的一半, 再一口吃掉了剩下的一半, 就这样连续吃了五口, 那么, 小花猫还剩下蛋糕的().
 - A. $\frac{1}{8}$
 - B. $\frac{1}{16}$
 - C. $\frac{1}{10}$
 - D. $\frac{1}{32}$
19. 若 $a = -2 \times 3^2, b = (-2 \times 3)^2, c = -(2 \times 3)^2$, 则下列大小关系正确的是().
 - A. $a > b > c$
 - B. $b > c > a$
 - C. $b > a > c$
 - D. $c > a > b$
20. 已知 $A = -\frac{2011 \times 2012}{2013 \times 2014}, B = -\frac{2011 \times 2013}{2012 \times 2014}, C = -\frac{2011 \times 2014}{2012 \times 2013}$, 那么, A, B, C 的大小关系是().
 - A. $A > B > C$
 - B. $A < B < C$
 - C. $B > A > C$
 - D. $B > C > A$