离散数学习题题解

洪 帆 傅小青 编

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

离散数学习题题解/洪　帆　傅小青　编

武汉:华中科技大学出版社, 2008年4月

ISBN 7-5609-1904-9

Ⅰ. 离…

Ⅱ. ①洪…　②傅

Ⅲ. 离散数学-解题

Ⅳ. O158-44

离散数学习题题解　　　　洪　帆　傅小青　编

责任编辑:王汉江　　　　封面设计:

责任校对:汪世红　　　　责任监印:

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87545012

录　排:

印　刷:

开本:710×100　1/16　　印张:　　字数:

版次:1999年3月第1版　　印次:2008年4月第9次印刷　　定价:　元

ISBN 7-5609-1904-9/O·185

内容简介

本书针对“离散数学”有关教材中集合论、代数系统、图论和数理逻辑四大部分的内容，分为十章进行编排。按照基本知识点、问答与论证、解题思路与方法三个层次，由浅入深地编入了359个具有代表性的例题。解答详实，注重基本概念的理解、分析能力的培养和逻辑思维的训练。

本书可供高等院校计算机及有关专业本、专科师生作为离散数学课程的教学和学习参考书，也是离散数学自学者的良好辅导资料。

前　　言

本书是为配合高等院校本、专科“离散数学”课程有关教材的学习而编写的一本教学参考书。编者根据多年来在离散数学教学中所积累的经验和对学生学习中感到困难的问题，将其内容由浅入深地分为三个层次。对各章，在简明扼要地归纳其主要内容之后，首先逐一列出该章的基本知识点，对每一知识点均配有相应的实例来加以说明，以使读者正确地理解教材中的基本内容。在此基础上，针对学生对推理论证感到较为困难这一薄弱点，列举了大量的例题对读者进行逻辑推理的训练，与此同时，也使读者熟练地掌握该课程中的基本概念、基本定理、基本运算和方法。在每一部分之后，安排了一些较为复杂或有多种解题方法的例题，以帮助读者开拓思维、加深理解并学会运用所学的知识去解决各种问题。

全书共分 10 章，编入了 359 个例题，其内容侧重于课程的重点和难点。例题的解答比较详尽，编者希望它能对读者在掌握、熟悉基本概念，分析和解决问题的能力等方面有所帮助。希望读者对这些例题最好先自己进行思考，作出解答后再阅读书上的解答，这样体会更深刻，收获更大。另外，读者可根据自己对离散数学课程学习掌握的情况，或采用由浅入深、循序渐进的学习方式，或直接进入第二个层次或第三个层次的学习。

本书第 1 章至第 6 章由洪帆编写，第 7 章至第 10 章由傅小青编写。对华中科技大学出版社的同志为本书的编辑出版所作的工作，在此表示衷心的感谢。

由于时间仓促，水平有限，书中错误与疏漏之处恳请读者不吝指正。

编　者

1998 年 10 月于武汉

目　录

第 1 部分　集　合　论

第 2 部分　代 数 系 统

第 3 部分　图　　论

第 4 部分　数 理 逻 辑

第 1 部分　集　合　论

第 1 章　集　　合

1.1　内 容 提 要

1. 集合及有关概念、集合的表示法

- 集合、元素、集合的基数；
- 集合的两种表示方法——列举法和描述法；
- 两个特殊的集合——全集合和空集；
- 子集、包含集和幂集；
- 分划和细分；
- 集合的最小集标准形式和最大集标准形式.

2. 集合间的关系

- 集合间的包含关系 $B\subseteq A$；
- 集合间的真包含关系 $B\subset A$；
- 集合间的相等关系 $A=B$；
- 集合间的互补关系 $B'=A$.

3. 集合的运算

- 集合的并运算 $A\cup B$；
- 集合的交运算 $A\cap B$；
- 集合的补运算——相对补运算($B-A$)、绝对补运算($A'=U-A$)，A' 简称为 A 的补集；
- 集合运算的定律.

4. 对集合间的关系和运算进行分析和论证的工具

- 文氏图——直观、形象，可作为描述和分析的工具；

· 成员表——根据运算的定义严格构造出来的,可作为证明的工具.

1.2 基本知识点

1. 集合的列举法和描述法

列举法是用列出集合中所有元素的方法来表示集合,描述法则是通过条件 P 来定义集合中元素的属性.

例 1-1 设全集合是整数集 $\mathbf{Z}$,试用列举法表示下列集合.

(1) $A=\{x \mid x^2-16=0$ 或 $x^4=1\}$;

(2) $B=\{x \mid x^2-10x-24<0$ 且 $-5 \leqslant x \leqslant 6\}$.

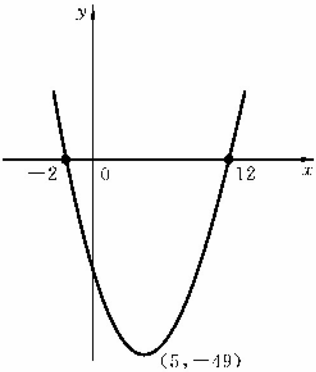

图 1-1

解 (1) 满足 $x^2-16=0$ 即 $x^2=16$ 的 x 有两个整数 $x_1=4$ 和 $x_2=-4$. 满足 $x^4=1$ 的 x 也有两个整数 $x_3=1$ 和 $x_4=-1$. 因此

$$A=\{4,-4,1,-1\}.$$

(2) 令 $y=x^2-10x-24=(x-5)^2-49$,显然,当 $x=-2$ 和 $x=12$ 时,$y=0$,当 $x=5$ 时,y 有极小值-49. 函数图形如图 1-1 所示. 因为 B 是全集合 $\mathbf{Z}$ 的子集,所以当

$$x=-1,0,1,2,\cdots,11 \text{ 时}, y<0.$$

但 x 的这些取值中,只有 8 个数满足不等式 $-5 \leqslant x \leqslant 6$,因此

$$B=\{-1,0,1,2,3,4,5,6\}.$$

2. 属于关系和包含关系

"$a \in A$"表示 a 是集合 A 的一个元素. "$B \subseteq A$"表示 B 是 A 的一个子集,它意味着集合 B 中的每一个元素也是集合 A 中的元素.

在"$a \in A$"的关系中,允许 a 是一个集合,因此也可能有"$B \in A$"的关系成立,这表示集合 B 是集合 A 的元素.

例 1-2 设 $A=\{a,b,\{c\},\{a\},\{a,b\}\}$,试指出下列论断是否正确.

(1) $a \in A$;　　(2) $\{a\} \in A$;

(3) $\{a\} \subseteq A$;　　(4) $\varnothing \in A$;

(5) $\varnothing \subseteq A$;　　(6) $b \in A$;

(7) $\{b\} \in A$;　　(8) $\{b\} \subseteq A$;

(9) $\{a,b\} \in A$;　　(10) $\{a,b\} \subseteq A$;

(11) $c\in A$；　　(12) $\{c\}\in A$；

(13) $\{c\}\subseteq A$；　　(14) $\{a,b,c\}\subseteq A$.

解　(1)、(2)、(3)、(5)、(6)、(8)、(9)、(10)、(12)正确；

(4)、(7)、(11)、(13)、(14)错误.

例 1-3　对于任意集合 A,B 和 C，下述论断是否正确？请说明理由.

(1) 若 $A\in B, B\subseteq C$，则 $A\in C$；　　(2) 若 $A\in B, B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；

(3) 若 $A\subseteq B, B\in C$，则 $A\in C$；　　(4) 若 $A\subseteq B, B\in C$，则 $A\subseteq C$.

解　(1)正确.

因为 $B\subseteq C$，所以集合 B 的每一个元素也是集合 C 的元素，由 $A\in B$ 知 A 是 B 的一个元素，因此 A 也是 C 的一个元素，故 $A\in C$.

(2)错误.

举反例如下：设 $A=\{a\}, B=\{\{a\},b\}, C=\{\{a\},b,\{d\}\}$. 显然 $A\in B, B\subseteq C$，但 $A\nsubseteq C$. 因为 $a\in A$，但 $a\notin C$.

(3)和(4)都是错误的.

举反例如下：设 $A=\{a\}, B=\{a,b\}, C=\{\{a,b\},d\}$. 显然 $A\subseteq B, B\in C$，但 $A\notin C$. 因为集合 C 中没有元素$\{a\}$. 又 $A\nsubseteq C$，因为集合 A 中的元素 a 不是集合 C 的元素.

3. 子集和幂集

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集. 记作 $A\subseteq B$. 按照这一定义，每一集合 A 是 A 自己的子集，有 $A\subseteq A$. 如果 A 是 B 的子集，而 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集. 记作 $A\subset B$.

例 1-4　列出下列集合的全部子集.

(1) $A=\{a,\{b\}\}$；

(2) $B=\{\varnothing\}$；

(3) $C=\varnothing$.

解　(1) 因为$\varnothing$是任何集合的子集，所以$\varnothing$是 A 的子集. 由 A 中任意一个元素所组成的集合是 A 的子集，所以$\{a\}$和$\{\{b\}\}$是 A 的子集. 由 A 中任意两个元素组成的集合是 A 的子集，所以$\{a,\{b\}\}$是 A 的子集，即 A 自己是 A 的子集. 因为 A 中只有两个元素，故 A 再没有其他的子集.

由上可知，A 有四个子集：$\varnothing,\{a\},\{\{b\}\}$和$\{a,\{b\}\}$.

(2) 与上同样的道理，$\varnothing$是 B 的子集，此外由于 B 中仅有一个元素$\varnothing$，因此 B 仅有的另一个子集是$\{\varnothing\}$，即 B 自己.

由上可知，B 有两个子集：$\varnothing$和$\{\varnothing\}$.

(3) $\varnothing$是任何集合的子集，因此$\varnothing$也是$\varnothing$的子集，即$\varnothing$是 C 的子集. 因为 C 中

没有元素,所以 C 不可能有其他的子集,故 C 只有一个子集:$\varnothing$.

由真子集的定义,对于任意集合 A,除了 A 自身不是 A 的真子集外,其他子集均是 A 的真子集.因此以下结论成立.

A 有三个真子集:$\varnothing$,$\{a\}$和$\{\{b\}\}$.

B 有一个真子集:$\varnothing$.

C 没有真子集.

集合 A 的幂集是以 A 的所有子集为元素组成的集合.因此只要子集的概念清楚,将 A 的所有子集列出来,便可得到 A 的幂集,A 的幂集记作 2^A 或 $P(A)$.

例 1-5　求下列集合的幂集.

(1) $A=\{a,\{b\},\{a,b\}\}$;

(2) $B=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

解　(1) $2^A=\{\varnothing,\{a\},\{\{b\}\},\{\{a,b\}\},\{a,\{b\}\},\{a,\{a,b\}\},\{\{b\},\{a,b\}\},\{a,\{b\},\{a,b\}\}\}$;

(2) $2^B=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

由例 1-4 和例 1-5 可以看出,当 A 是有限集,元素个数为 n 时,A 的幂集也是有限集,其元素个数为 2^n.因此若用符号 $\#A$ 表示集合 A 的基数,则 $\#(2^A)=2^{\#A}$.

4. 集合间的包含关系和相等关系

若 A 是 B 的子集(即若 $A\subseteq B$),则称集合 B 包含集合 A.这时 A 的每一个元素也是 B 的元素,但 B 的元素不一定都是 A 的元素.如果 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 同时成立,即如果 A 的每一个元素都是 B 的元素,B 的每一个元素也都是 A 的元素,则 A 和 B 两个集合具有完全相同的元素,这时称集合 A 与 B 相等.记作 $A=B$.因此若 $A=B$,则 A 与 B 代表的是同一个集合.

例 1-6　设 $A=\{i\mid i=2k,k\in N\}$,$B=\{i\mid i=2^k,k\in N\}$,$C=\{2,4,6,8,\cdots\}$,试用符号"$\subseteq$"、"$\subset$"和"$=$"恰当地连结这些集合.这里 N 表示正整数集.

解　由集合 A 中元素的定义条件可知,$A=\{i\mid i$ 是正偶数$\}$,所以 $A=C$.由集合 B 中元素的定义条件,$B=\{2,4,8,16,32,\cdots\}$是部分正偶数的集合,所以 $B\subseteq A$.因为 $6\notin B$,$10\notin B$,$\cdots$,所以 B 是 A 的真子集,因此又有 $B\subset A$.于是也有 $B\subseteq C$,$B\subset C$.

5. 集合的运算及运算定律

集合的相对补运算也称为集合的差运算.差集 $B-A$ 是由所有属于 B 而不属于 A 的元素组成.

例 1-7　设 $A=\{2,3,\{2,3\},\varnothing\}$,求下列集合.

(1) $A-\{2,3\}$;

(2) $\{\{2,3\}\}-A$;

(3) $A-\varnothing$;

(4) $A-\{\varnothing\}$.

解 (1) $A-\{2,3\}=\{\{2,3\},\varnothing\}$;

(2) $\{\{2,3\}\}-A=\varnothing$;

(3) $A-\varnothing=A$;

(4) $A-\{\varnothing\}=\{2,3,\{2,3\}\}$.

集合的差运算可转化为集合的交运算和补运算来表达.

例 1-8 设 A、B 是任意两个集合,试证明

$$A-B=A\cap B'. \tag{1-1}$$

分析 根据两集合相等的定义,若能证明 $A-B\subseteq A\cap B'$ 且 $A\cap B'\subseteq A-B$,则 $A-B=A\cap B'$ 便成立.

证 设 $u\in A-B$,则 $u\in A$ 且 $u\notin B$,即 $u\in A$ 且 $u\in B'$,因此 $u\in A\cap B'$,故 $A-B\subseteq A\cap B'$.

反之,设 $u\in A\cap B'$,则 $u\in A$ 且 $u\in B'$,即 $u\in A$ 且 $u\notin B$,由差集的定义 $u\in A-B$,因此 $A\cap B'\subseteq A-B$.

由上证得 $A-B=A\cap B'$.

运用证明两个集合互相包含的方法,一般来说可以证明任何集合恒等式的成立,但这种方法较为繁琐.运用集合并、交、补运算的运算定律,可方便地证明集合恒等式.若集合表达式中出现形为 $A-B$ 的差事时,可利用式(1-1)和式(1-2)先将运算"$-$"转化为运算"$\cap$"和"$'$".

例 1-9 设 A,B,C 为任意集合,试证明

$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C).$$

证

$$\begin{aligned} A\cap(B-C)&=A\cap(B\cap C') && (1\text{-}1)\\ &=A\cap B\cap C', && \text{结合律} \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} (A\cap B)-(A\cap C)&=(A\cap B)\cap(A\cap C)' && (1\text{-}2)\\ &=(A\cap B)\cap(A'\cup C') && \text{德摩根定律}\\ &=(A\cap B\cap A')\cup(A\cap B\cap C') && \text{分配律}\\ &=\varnothing\cup(A\cap B\cap C') && \text{交换律、结合律、互补律}\\ &=A\cap B\cap C', && \text{同一律} \end{aligned}$$

因此

$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C).$$

6. 文氏图与有限集的计数

文氏图用平面上图示的方法形象地描述全集合 U 与其子集,以及全集合 U 的子集与子集之间的关系.由于文氏图具有形象、直观的特点,因此利用文氏图可以

方便地解决一些有关有限集的元素计数问题.

例 1-10　某学校举行运动会,有 100 m 短跑、掷铅球和跳高三个项目.二年级 170 人,已知有 25 人三个项目都参加了,有 62 人至少参加了两个项目.若该年级参加比赛的总人次是 200 人次,试问有多少人没有参加任何项目?

解　(1) 用集合的概念描述上述问题.

设全集合 U 为二年级 170 人的集合,A_1 为参加 100 m 短跑的学生集合,A_2 为参加掷铅球的学生集合,A_3 为参加跳高的学生集合.

(2) 用文氏图(图 1-2)表示各个集合.

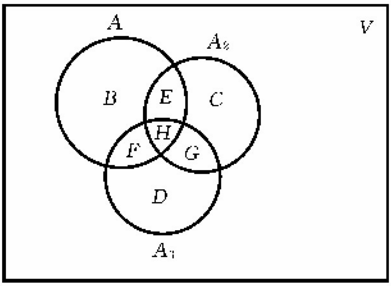

图 1-2

由题设条件和文氏图可知有关集合的基数:

$$\# U=170(\text{人}),$$
$$\# H=\#(A_1\cap A_2\cap A_3)=25(\text{人}),$$
$$\#(E\cup H\cup F\cup G)=62(\text{人}).$$

(3) 计算.

$$\#(E\cup F\cup G)=\#(E\cup H\cup F\cup G)-\# H=62-25=37(\text{人}),$$
$$25\times 3=75(\text{人次}),$$
$$37\times 2=74(\text{人次}),$$
$$200-(75+74)=51(\text{人次}),$$

因此 $$\# B+\# C+\# D=51(\text{人}),$$

于是 $$\#((A_1\cup A_2\cup A_3)')=\# U-\#(A_1\cup A_2\cup A_3)$$
$$=170-(51+62)=57(\text{人}),$$

故该年级有 57 人没有参加任何项目.

7. 集合成员表

成员表是用表格的方式描述集合的并、交、补运算的定义.表 1-1 中任一集合 S 所标记的列中,0 表示全集合中的元素 $u\notin A$,1 表示 $u\in A$.利用上述三个基本的成员表可以进而构造出全集合 U 的其他子集的成员表.

表 1-1

A'的成员表

A	A'
0	1
1	0

$A\cup B$ 的成员表

A	B	$A\cup B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$A\cap B$ 的成员表

A	B	$A\cap B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1-11　试构造集合$(A\cup B)\cap(B\cup C)'$和集合 $A\cap B'$的成员表，通过其成员表判断这两个集合之间是否有相等关系或包含关系.

解　构造两个集合的成员表，如表 1-2 所示.

表 1-2

A	B	C	$A\cup B$	$B\cup C$	$(B\cup C)'$	$(A\cup B)\cap(B\cup C)'$	B'	$A\cap B'$
0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0

集合$(A\cup B)\cap(B\cup C)'$所标记的列中，仅在第五行为 1，这意味着当元素 $u\in A$，$u\notin B$ 且 $u\notin C$ 时，$u\in(A\cup B)\cap(B\cup C)'$，而在其他情形下，元素 $u\notin(A\cup B)\cap(B\cup C)'$.

集合 $A\cap B'$所标记的列中，第五行与第六行均为 1，这意味着当元素 $u\in A$，$u\notin B$ 且 $u\notin C$ 时，$u\in A\cap B'$，当元素 $u\in A$，$u\in C$ 但 $u\notin B$ 时，也有 $u\in A\cap B'$.

由上可以看出，当元素 $u\in(A\cup B)\cap(B\cup C)'$时，也有 $u\in A\cap B'$，但当 $u\in A\cap B'$时，不一定有 $u\in(A\cup B)\cap(B\cup C)'$，所以可以得出结论$(A\cup B)\cap(B\cup C)'\subseteq A\cap B'$.

8. 分划和细分

集合 A 的分划是由 A 的某些非空子集组成的集合，但这些非空子集必须满足两个条件：(1) 任意两个子集没有公共元素；(2) 这些子集的并集恰好等于集合 A.

直观地说，所谓集合 A 的分划就是将集合 A 中的元素划分成几块，使得 A 的每一个元素必须在某一块中，也仅在一块中.

例 1-12　设 $A=\{2,3,5,8,9,16,22,25,27,35\}$，按照 A 中元素是奇数或偶数来区分，可将 A 中元素分划为两块：

$$B_1=\{3,5,9,25,27,35\};$$

$$B_2=\{2,8,16,22\}.$$

因此 $\Pi_1=\{B_1,B_2\}$ 是集合 A 的一个分划.

按照 A 中元素能被 2 整除、被 3 整除或被 5 整除来区分，又可将 A 中元素分划为三块：

$$A_2=\{2,8,16,22\};$$

$$A_3=\{3,9,27\};$$

$$A_5=\{5,25,35\}.$$

因此 $\Pi_2=\{A_2,A_3,A_5\}$ 也是集合 A 的一个分划.

若按照 A 中元素能被 2 整除、被 3 整除或被 4 整除来区分，可得到 A 的如下几个非空子集：

$$A_2=\{2,8,16,22\};$$

$$A_3=\{3,9,27\};$$

$$A_4=\{8,16\}.$$

可令 $S=\{A_2,A_3,A_4\}$，但 S 不是 A 的分划. 原因之一是 A_2 与 A_4 有公共元素；原因之二是有些元素，如 5，25，35 不在任何子集中.

分划 Π_1 有两个分划块，分划 Π_2 有三个分划块. 容易发现 $A_2\subseteq B_2$，$A_3\subseteq B_1$，$A_5\subseteq B_1$，即 Π_2 的每一个分划块都是 Π_1 的某一个分划块的子集. 因此 Π_2 是 Π_1 的细分. 如图所示，图 1-3 表示 Π_1 将 A 分划成两块，图 1-4 表示 Π_2 将 A 分划成三块. 图 1-4 可由在图 1-3 的基础上加一根分划线（图中用虚线表示）的方法，将 Π_1 中的一个分划块分成两个分划块而得到.

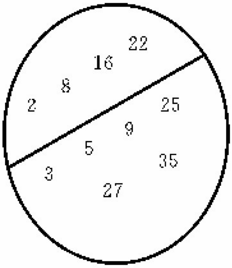

图 1-3

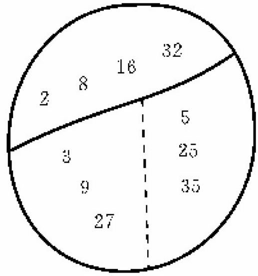

图 1-4

9. 集合的标准形式

设 $A_1,A_2,\cdots,A_r$ 是全集合 U 的一组子集，对 $\varnothing,U,A_1,A_2,\cdots,A_r$ 有限次地施加“′”、“$\cup$”、“$\cap$”运算，所得到的集合称为是由 $A_1,A_2,\cdots,A_r$ 所产生的集合.

由 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 所产生的集合，可以利用集合的运算定律将其变形化为标准形式.

集合的标准形式可分为最小集标准形式和最大集标准形式. 最小集标准形式是将集合表示成 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 的不同最小集的并；最大集标准形式是将集合表示成 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 的不同最大集的交.

例 1-13 利用集合运算的定律求出集合 $(A \cap B') \cup (A' \cap (B \cup C'))$ 的最小集和最大集标准形式.

解 (1) 求最小集标准形式.

$$
\begin{aligned}
&(A \cap B') \cup (A' \cap (B \cup C')) \\
&= (A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A' \cap C') \\
&= (A \cap B' \cap (C \cup C')) \cup ((A' \cap B) \cap (C \cup C')) \cup ((A' \cap C') \cap (B \cup B')) \\
&= (A \cap B' \cap C) \cup (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C') \\
&\quad \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C') \\
&= (A \cap B' \cap C) \cup (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C') \\
&\quad \cup (A' \cap B' \cap C').
\end{aligned}
$$

(2) 求最大集标准形式.

$$
\begin{aligned}
&(A \cap B') \cup (A' \cap (B \cup C')) \\
&= ((A \cap B') \cup A') \cap ((A \cap B') \cup (B \cup C')) \\
&= (A \cup A') \cap (B' \cup A') \cap (A \cup B \cup C') \cap (B' \cup B \cup C') \\
&= (A' \cup B') \cap (A \cup B \cup C') \\
&= (A' \cup B') \cup (C \cap C') \cap (A \cup B \cup C') \\
&= (A' \cup B' \cup C) \cap (A' \cup B' \cup C') \cap (A \cup B \cup C').
\end{aligned}
$$

利用集合的成员表也可以求集合的标准形式. 详细讨论过程请参阅参考文献[1]，下面仅通过例子给出其求标准形式的方法.

例 1-14 利用集合的成员表求出例 1-13 中集合的标准形式.

解 (1) 构造集合 $(A \cap B') \cup (A' \cap (B \cup C'))$ 的成员表，见表 1-3.

表 1-3

A	B	C	B'	$A \cap B'$	A'	C'	$B \cup C'$	$A' \cap (B \cup C')$	$(A \cap B') \cup (A' \cap (B \cup C'))$
0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0

(2) 分别找出$(A\cap B')\cup(A'\cap(B\cup C'))$所标记的列中 1 所有的行和 0 所在的行.

1 所在的行是 000,010,011,100,101;

0 所在的行是 001,110,111.

(3) 根据$(A\cap B')\cup(A'\cap(B\cup C'))$所标记的列中 1 所在的行,直接写出该集合的最小集标准形式.

$$\begin{aligned}&(A\cap B')\cup(A'\cap(B\cup C'))\\&=M_{000}\cup M_{010}\cup M_{011}\cup M_{100}\cup M_{101}\\&=(A'\cap B'\cap C')\cup(A'\cap B\cap C')\cup(A'\cap B\cap C)\cup(A\cap B'\cap C')\cup(A\cap B'\cap C).\end{aligned}$$

根据$(A\cap B')\cup(A'\cap(B\cup C'))$所标记的列中 0 所在的行,直接写出该集合的最大集标准形式.

$$\begin{aligned}&(A\cap B')\cup(A'\cap(B\cup C'))\\&=\overline{M}_{001}\cap\overline{M}_{110}\cap\overline{M}_{111}\\&=(A\cup B\cup C')\cap(A'\cup B'\cup C)\cap(A'\cup B'\cup C').\end{aligned}$$

在成员表方法中,使用了二进制下标来表示最小集和最大集,这为求集合的标准形式带来了方便.而且可以看出,利用二进制表示,只要求出了最小集标准形式和最大集标准形式中的任何一个,另一个亦可直接写出.即使利用集合运算的定律来求标准形式亦是如此.

1.3 问答与论证

例 1-15 给定正整数集 **N** 的下列子集:

$$A=\{2,5,8,9,11\};$$
$$B=\{i\mid i^3<100\};$$
$$C=\{i\mid i\text{ 可被 3 整除且 }i\leqslant 30\}.$$

求下列集合.

(1) $(A\cup B)\cap C$; (2) $A\cup(B\cap C)$;

(3) $B-(A\cup C)$; (4) $(A'\cap B)\cup C$.

解 因为

$$A=\{2,5,8,9,11\};$$
$$B=\{1,2,3,4\};$$
$$C=\{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\},$$

所以

(1) $(A\cup B)\cap C=\{1,2,3,4,5,8,9,11\}\cap C=\{3,9\}$;

(2) $A\cup(B\cap C)=A\cup\{3\}=\{2,3,5,8,9,11\}$;

(3) $B-(A\cup C)=B-\{2,3,5,6,8,9,11,12,15,18,21,24,27,30\}=\{1,4\}$.

(4) 因为 $A'=\{1,3,4,6,7,10\}\cup\{12,13,14,\cdots\}$，所以

$$(A'\cap B)\cup C=\{1,3,4\}\cup C=\{1,3,4,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}.$$

例 1-16 试定义两个集合 A,B，使得 $A\in B$ 且 $A\subseteq B$.

解 定义 $A=\{a\}$，$B=\{\{a\},a\}$，则有 $A\in B$ 且 $A\subseteq B$.

例 1-17 设集合 A 的基数 $\#A=55$，试问

(1) A 有多少个子集？

(2) 有多少个子集的元素个数为 27？有多少个子集的元素个数为 28？

(3) 有多少个子集的元素个数为偶数？

解 (1) 因为 $\#A=55$，所以 A 的幂集 2^A 的基数 $\#(2^A)=2^{55}$. 根据幂集的定义，A 有 2^{55} 个子集.

(2) 集合是元素的组合，这些元素在集合中是无序的，因此含有 27 个元素的子集数即为从 55 个元素中取出 27 个元素的组合数，故有

$$C_{55}^{27}=\frac{55!}{27!\ 28!}\text{个子集的元素个数为 27.}$$

根据组合的基本性质 $C_n^m=C_n^{n-m}$，可知 $C_{55}^{27}=C_{55}^{28}$，所以元素个数为 28 的子集数也是$\frac{55!}{27!\ 28!}$.

(3) 由 $C_n^m=C_n^{n-m}$ 知，有如下 28 个等式

$$C_{55}^{0}=C_{55}^{55},\quad C_{55}^{1}=C_{55}^{54},\quad C_{55}^{2}=C_{55}^{53},\cdots,C_{55}^{27}=C_{55}^{28}.$$

因为 55 是奇数，所以对任意 $m\leqslant 55$，m 和 $55-m$ 两个数中必然是一个为奇数，另一个为偶数，因此元素个数为偶数的子集数是$\frac{2^{55}}{2}=2^{54}$.

例 1-18 设有集合 A,B,C 和 D，下述论断是否正确？说明理由.

(1) 若 $A\subseteq B,C\subseteq D$，则$(A\cap C)\subseteq(B\cap D)$；

(2) 若 $A\subset B,C\subset D$，则$(A\cap C)\subset(B\cap D)$.

解 (1) 正确.

证 设 $u\in A\cap C$，则 $u\in A$ 且 $u\in C$，由 $A\subseteq B,C\subseteq D$，所以 $u\in B$ 且 $u\in D$，因此 $u\in B\cap D$，故$(A\cap C)\subseteq(B\cap D)$.

(2) 错误.

举反例如下：设

$$A=C=\{a,b,c\};$$

$$B=\{a,b,c,d\};$$

$$D=\{a,b,c,e\}.$$

显然

$$A\subset B,\quad C\subset D,$$

$$A\cap C=\{a,b,c\}=B\cap D,$$

因此

$$A\cap C\not\subset B\cap D.$$