

全国高职高专测绘类核心课程规划教材

测量平差

■ 主 编 刘仁钊

■ 副主编 张本平 刘小慧 张慧慧

■ 主 审 周 园



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

全国高职高专测绘类核心课程规划教材

测 量 平 差

主 编 刘仁钊

副主编 张本平 刘小慧 张慧慧

参 编 毕 婧 王新鹏

主 审 周 园

武 汉 大 学 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

测量平差 / 刘仁钊 主编 张本平 刘小慧 张慧慧 副主编 / 武汉大学出版社, 2012. 1

全国高职高专测绘类核心课程规划教材

ISBN 9787307093751

测量平差

刘仁钊 主编

张本平 刘小慧 张慧慧 副主编

周园 主审

武汉大学出版社

出版日期：2012年1月

ISBN：9787307093751

开 本：16开

页 数：199页

装 订：平装

定 价：26元

序

21 世纪将测绘带入信息化测绘发展的新阶段。信息化测绘技术体系是在对地观测技术、计算机信息化技术和现代通信技术等现代技术支撑下的有关地理空间数据的采集、处理、管理、更新、共享和应用的技术集成。测绘科学正在向着近年来国内外兴起的新兴学科——地球空间信息学跨越和融合；测绘技术的革命性变化，使测绘组织的管理机构、生产部门及岗位设置和职责发生变化；测绘工作者提供地理空间位置及其附属信息的服务，测绘产品的表现形式伴随相关技术的发展，在保持传统特性的同时，直观可视等方面得到了巨大的进步；从向专业部门的服务逐渐扩大到面对社会公众的普遍服务，从而使社会测绘服务的需求得到激发并有了更加良好的满足。测绘科技的发展，社会需求、测绘管理及生产组织及过程的深刻变化，对测绘工作者，特别是对高端技能应用性职业人才，在知识和能力体系构建的要求方面也发生着相应的深刻发展和变化。

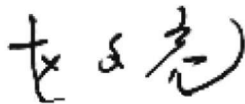
社会和科技的进步和发展，形成了对高端技能人才的大量需求，在这样的社会需求背景下，高等职业教育得到了蓬勃发展，在高等教育体系中占据了半壁江山。高等职业教育作为高等教育的必然组成部分，以系统化职业能力及其发展为目标，在高端技能应用性职业人才的培养的探索上迈出了刚劲有力的步伐，取得了可喜的佳绩，为全国高等教育的大众化做出了应有的贡献。

高职高专测绘类专业作为全国高职教育的一部分，在广大教师的共同努力下，以培养高端技能应用性人才为方向，不断推进改革和建设，在探究培养满足现时要求并能不断自我发展的测绘职业人才道路上，迈出了坚实的步伐；办学规模和专业点的分布也得到了长足发展。在人才培养过程中，结合测绘工程实际，加强测绘工程训练，突出过程，强化系统化测绘职业能力构建等方面取得了成果。伴随专业人才培养和教学的建设和改革，作为教学基础资源，教材的建设也得到了良好的推动，编写出了系列成套教材，并从有到精，注意不断将测绘科技和高职人才培养的新成果进教材，以推动进课堂，在人才培养中发挥作用。为了进一步推动高职高专测绘类专业的教学资源建设，武汉大学出版社积极支持测绘类专业教学建设和改革，组织了富有测绘教学经验的骨干教师，结合目前教育部高职高专测绘类专业教学指导委员会研制的“高职测绘类专业规范”对人才培养的要求及课程设置，编写了本套《全国高职高专测绘类核心课程规划教材》。

教材编写结合高职高专测绘类专业的人才培养目标，体现培养人才的类型和层次定位；在编写组织设计中，注意体现核心课程教材组合的整体性和系统性，贯穿以系统化知识为基础，构建较好满足现实要求的系统化职业能力及发展为目标；体现测绘学科和测绘技术的新发展、测绘管理与生产组织及相关岗位的新要求；体现职业性，突出系统工作过程，注意测绘项目工程和生产中与相关学科技术之间的交叉与融合；体现最新的教学思想和高职人才培养的特色，在传统教材的基础上，勇于创新，按照课程改革建设的教学要

求,也探索按照项目教学及实训的教学组织,突出过程和能力培养,具有一定的创新意识。教材适合高职高专测绘类专业教学使用,也可提供给相关专业技术人员学习参考,必将在培养高端技能应用性测绘职业人才等方面发挥积极作用。

教育部高等学校高职高专测绘类专业教学指导委员会主任委员



二〇一一年八月十四日

前 言

本书是在教育部高职高专测绘类专业教学指导委员会的指导下,按照“全国高职高专测绘类核心课程规划教材”(武汉)研讨会上制定的《测量平差》教学大纲的要求,在总结多年教学经验的基础上编写完成的。几位编者深知测量平差内容的深度与难度,力求做到概念明确,原理易懂,重在应用。本书与以往的高职教材相比,在教材内容和结构上做了不小的变动,着眼于基本概念、平差原理、方法和软件应用为架构来编写,考虑到高职生的知识深度,尽量做到理论适度,重在实际操作,有利于学生自主学习、理解、掌握和应用。同时在每个知识点上,通过浅显的例子阐述原理后,将过去计算上的难点通过计算工具 MATLAB 简易化,增强学生学习的兴趣和积极性。此外,将科傻、平差易等生产中常用的平差软件应用单列一章,更突出了本书的目的性。

全书共分为6章,重点介绍了测量误差理论、条件平差、间接平差、误差椭圆等基本理论和方法。为了突出平差方法的具体应用,在书中最后一章对目前生产单位使用频率较高的武汉大学科傻和南方平差易软件进行了应用介绍。考虑到学习上的需要,附录中还结合条件平差和间接平差对书中的软件做了进一步的使用说明。

本书由湖北国土资源职业学院刘仁钊任主编,张本平(陕西交通职业技术学院)、刘小慧(宁夏建设职业技术学院)和张慧慧(辽宁交通高等专科学校)任副主编。参编分工:刘仁钊编写第1章、第5章和附录1,王新鹏(安徽工业经济职业技术学院)编写第2章,刘小慧编写第3章,张本平编写第4章和附录2,毕婧(湖北国土资源职业学院)编写第6章,张慧慧编写第6章和附录3,沈岩英担任了部分书稿的录入和校对以及插图的描绘工作。全书最后由刘仁钊统一修改定稿。

本书完成后,由沈阳农业大学高职学院周园副教授进行了主审,武汉大学测绘学院陶本藻教授和同济大学伍吉仓教授对本书提出了许多宝贵意见。修改后,通过了“全国高职高专测绘类核心课程规划教材”编委会的审定,作为全国高职高专测绘类核心课程规划教材,供高等职业教育测绘类专业使用。在此对陶本藻教授、伍吉仓教授和教材编委会的各位专家表示谢意!在本书编写过程中,参考并引用了一些作者的同类教材,此外还得到了武汉大学科傻软件、南方平差易软件提供方的帮助,在此表示感谢!同时对武汉大学出版社为本教材顺利出版给予的大力支持表示感谢。

由于编者水平有限,书中的错误和不足之处在所难免,恳请广大读者给予批评指正。

编 者

2011年9月

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 观测误差	1
1.1.1 观测值	1
1.1.2 观测误差	1
1.1.3 观测误差产生的原因	2
1.2 观测误差分类	2
1.2.1 偶然误差	3
1.2.2 系统误差	3
1.2.3 粗差	4
1.3 测量平差的研究对象和任务	4
第 2 章 误差理论与最小二乘原理	6
2.1 偶然误差的统计规律	6
2.1.1 偶然误差的统计分析	6
2.1.2 偶然误差的分布特性	9
2.2 衡量精度的指标	9
2.2.1 精度、准确度、精确度	10
2.2.2 衡量精度的指标	11
2.3 方差与协方差传播律	14
2.3.1 随机变量间的协方差	15
2.3.2 随机向量及其协方差阵	15
2.3.3 协方差传播律	17
2.3.4 误差传播律在测量中的应用	22
2.4 权与定权的常用方法	24
2.4.1 权的定义	24
2.4.2 单位权中误差	25
2.4.3 测量上确定权的常用方法	26
2.5 协因数与协因数传播律	28
2.5.1 协因数和协因数阵	29
2.5.2 权阵与协因数阵	30
2.5.3 协因数阵与协方差阵	30

2.5.4	协因数传播律	31
2.6	由真误差计算中误差	32
2.6.1	由三角形闭合差计算测角中误差	32
2.6.2	由不同精度的真误差计算单位权中误差	32
2.6.3	由双观测值之差计算中误差	33
2.7	最小二乘原理	35
第3章	条件平差	39
3.1	条件平差原理	39
3.1.1	测量平差概述	39
3.1.2	条件平差原理	41
3.1.3	条件平差的步骤及示例	43
3.2	条件方程	45
3.2.1	确定条件方程的个数	45
3.2.2	列立条件方程的原则	47
3.2.3	条件方程的形式	48
3.2.4	条件方程示例	51
3.3	MATLAB 软件	53
3.3.1	MATLAB 简介	53
3.3.2	MATLAB 矩阵运算	53
3.4	法方程组成与解算	55
3.4.1	法方程式的组成	55
3.4.2	法方程式的计算	56
3.5	精度评定	57
3.5.1	改正数的计算	57
3.5.2	单位权中误差的计算	58
3.5.3	平差值函数的中误差	58
3.6	条件平差计算示例	59
第4章	间接平差	66
4.1	间接平差原理	66
4.1.1	间接平差的概念	66
4.1.2	间接平差基本原理	68
4.1.3	间接平差的计算步骤	70
4.2	误差方程	72
4.2.1	未知数个数的确定	72
4.2.2	未知数的选择	73
4.2.3	误差方程列立	73
4.3	法方程的组成与解算	83

4.3.1	法方程式的组成	83
4.3.2	法方程式的解算	83
4.4	精度评定	86
4.4.1	单位权中误差	86
4.4.2	未知参数的中误差	86
4.4.3	参数函数的中误差	87
4.5	间接平差特例——直接平差	91
4.5.1	不同精度观测值的直接平差	92
4.5.2	同精度观测值的直接平差	93
4.5.3	算例	93
4.6	间接平差计算示例	95
4.6.1	水准网平差算例	95
4.6.2	测角网平差算例	98
4.6.3	导线网平差算例	102
第5章	误差椭圆	114
5.1	点位真误差及点位误差	114
5.1.1	点位真误差	114
5.1.2	点位误差及其计算	115
5.1.3	任意方向上的位差	116
5.2	误差曲线与误差椭圆	120
5.2.1	误差曲线	120
5.2.2	误差椭圆	121
5.3	相对误差椭圆	122
第6章	常用测量平差软件应用	126
6.1	武汉大学科傻系统 (COSA)	126
6.1.1	科傻系统 (COSA) 简介	126
6.1.2	科傻平面网平差	126
6.1.3	科傻高程网平差	133
6.2	南方平差易系统	138
6.2.1	平差易平面网平差	138
6.2.2	平差易高程网平差	149
附录1	MATLAB 应用简介	158
附 1.1	MATLAB 简介	158
附 1.2	MATLAB 矩阵运算	159
附 1.3	MATLAB 在测量平差中的应用	161

附录 2 武汉大学科傻系统 (COSA) 简介	168
附 2.1 系统简介	168
附 2.2 系统功能菜单	169
附 2.3 平面控制网平差计算	170
附 2.4 高程控制网平差计算	179
附录 3 南方平差易系统简介	184
附 3.1 系统简介	184
附 3.2 系统功能菜单	184
附 3.3 平差易控制网平差计算	187
参考文献	199

第1章 绪论

学习目标

通过学习,要求理解观测值、观测误差、偶然误差和系统误差、多余观测等重要概念;掌握观测误差产生的原因和对测量结果的影响性质,初步具有分析误差和处理误差的能力;了解测量平差的研究对象和任务,初步建立测量平差的概念。

1.1 观测误差

1.1.1 观测值

通过一定的测量仪器、工具、传感器或其他手段获取的反映地球与其他实体的空间分布有关信息的数据,通常称为观测值或测量值,用符号 L 表示。按照一定的技术规范和作业方法获取测量数据的过程(包括数据)称为测量或观测。观测数据可以是直接测量的结果,也可以是经过某种变换后的结果。任何观测值总是包含信息和干扰两部分,采集数据就是为了获取有用的信息,干扰实质上就是误差,是除了信息以外的部分,要设法予以排除或减弱其影响。

从数据的获取途径和过程来看,可将观测值分为直接观测值和间接观测值。直接观测值是指直接从仪器、工具、传感器或其他手段获取的数据,也称为原始测量值。传统的直接测量数据为距离、角度和高差,而诸如方位角、坐标、高程等这类数据则要通过相应的公式(函数)计算才能得到,这类数据称为间接观测值,是直接观测值的函数。当然,随着测绘仪器的不断发展,像全站仪、GPS 接收机等仪器的芯片中已植入了相应的数据处理程序,像坐标和高程这类的间接数据也可以直接得到了。

1.1.2 观测误差

大量的实践表明,当对某个量进行重复观测时就会发现,这些观测值之间往往存在一些差异。例如,对同一段距离重复丈量若干次,量得的长度通常是互有差异的。另外,观测一个平面三角形的三个内角,就会发现其观测值之和不等于 180° 。这种在同一个量的各观测值之间,或在各观测值与其理论上的应有值之间存在的偏差定义为观测误差。在后续内容中,我们将观测值与其真值之间的偏差定义为观测值的真误差,并用符号 Δ 表示。而将观测值与其相应的平差值(通过某种最优法则进行平差计算得到的最可靠值,也称为最优估值、最或然值或最或是值)之间的偏差定义为观测值的改正数,也叫最或然误差,用符号 V 表示。

若用 $\tilde{L}$ 和 $\hat{L}$ 分别表示观测值 L 的真值和平差值, 则真误差 Δ 和改正数 V 的定义式为:

$$\Delta = \tilde{L} - L \quad (1.1)$$

$$V = \hat{L} - L \quad (1.2)$$

1.1.3 观测误差产生的原因

观测误差产生的原因是多种多样的, 但由于任何观测值在获取过程中都离不开观测者、测量仪器和外界条件这三种要素, 所以观测误差产生的原因概括起来有下述三个方面。

1. 测量仪器

所谓测量仪器, 这里是指采集数据所采用的任何工具和手段。测量上常用的仪器设备主要有经纬仪、水准仪、全站仪、GPS 接收机等, 由于每一种仪器都具有一定限度的准确度, 由此观测得到的数据必然带有误差。例如, 在用只刻有厘米分划的普通水准尺进行水准测量时, 就难以保证在估读厘米以下的尾数时正确无误。同时仪器本身在设计、制造、安装、校正等方面也存在一定的误差, 如水准仪的视准轴不平行于水准轴等。此外, 还由于各类数据处理模型不完善也导致采集数据存在仪器误差, 如在地图数字化中采用的数字化仪或扫描仪, 在定位测量中使用的全站仪、GPS 接收机等。

2. 观测者

由于观测者的感觉器官的鉴别能力有一定的局限性, 所以在仪器的操作过程中也会产生误差。同时, 观测者的技术水平和工作态度, 也是对观测数据质量有直接影响的重要因素。

3. 外界条件

测量时所处的外界条件, 如温度、湿度、风力、大气折光等因素和变化都会对观测数据直接产生影响。特别是高精度测量, 更要重视外界条件产生的观测误差。例如, GPS 接收机所接收的是来自 2 万千米高空的卫星信号, 经过电离层、大气层都会发生信号延迟而产生误差等。

上述测量仪器、观测者、外界条件三方面的因素是引起误差的主要来源, 因此, 我们把这三方面的因素综合起来称为观测条件。不难想象, 观测条件的好坏与观测成果的质量有着密切的联系。当观测条件好一些时, 观测中所产生的误差平均说来就可能相应地小一些, 因而观测成果的质量就会高一些。反之, 观测条件差一些时, 观测成果的质量就会低一些。如果观测条件相同, 观测成果的质量也就可以说是相同的。因此观测成果的质量高低也就客观地反映了观测条件的优劣。

但是, 不管观测条件如何, 在整个观测过程中, 由于受到上述种种因素的影响, 观测的结果就会产生这样或那样的误差。从这个意义上来说, 在测量中产生误差是不可避免的。当然, 在客观条件允许的限度内, 测量工作者可以而且必须确保观测成果具有较高的质量。

1.2 观测误差分类

根据观测误差对测量结果的影响性质, 观测误差可分为偶然误差、系统误差和粗差

三类。

1.2.1 偶然误差

在相同的观测条件下作一系列的观测，如果误差在大小和符号上都表现出偶然性，即从单个误差看，该列误差的大小和符号没有规律性，但就大量误差的总体而言，具有一定的统计规律，这种误差称为偶然误差。

例如，仪器没有严格照准目标，估读水准尺上毫米数不准，测量时气候变化对观测数据产生微小变化等都属于偶然误差。此外，如果观测数据的误差是许多微小偶然误差项的总和，则其总和也是偶然误差。例如测角误差可能是照准误差、读数误差、外界条件变化和仪器本身不完善等多项误差的代数和，因此，测角误差实际是许许多多微小误差项的总和。而每项微小误差又随着偶然因素影响的不断变化，其数值忽大忽小，其符号或正或负，这样，由它们所构成的总和，就其个体而言，无论是数值的大小或符号的正负都是不能事先预知的，这种误差也是偶然误差。这是观测数据中存在偶然误差最普遍的情况。

根据概率统计理论可知，如果各个误差项对其总和的影响都是均匀地小，即其中没有一项比其他项的影响占绝对优势时，那么它们的总和将是服从或近似地服从正态分布的随机变量。因此，偶然误差就其总体而言，都具有一定的统计规律性，故有时又把偶然误差称为随机误差。

由于偶然误差的特性，人们在测量中总是尽可能地在良好的气象条件下，使用精度高稳定性好的测量仪器，严格遵守作业规程，采用规定的观测方法，增加多余观测数，以减弱偶然误差对测量成果的影响，将偶然误差降低到最小。

1.2.2 系统误差

在相同的观测条件下作一系列的观测，如果误差在大小、符号上表现出系统性，或者在观测过程中按一定的规律变化，或者为某一常数，那么，这种误差就称为系统误差。

例如，用具有某一尺长误差的钢尺量距时，由尺长误差所引起的距离误差与所测距离的长度成正比地增加，距离愈长，所积累的误差也愈大，这种误差属于系统误差。每一把钢尺的尺长误差是一个常数，这种系统误差称为常系差。而对于全长的影响，则为线性项误差。在定点垂直形变测量中，在两固定点间每天重复进行水准测量，就会发现由于温度等外界因素变化而产生以年为周期的周期性误差，这种具有线性项、周期性现象等有规律的系统误差是一种规律性系统误差。

系统误差与偶然误差在观测过程中总是同时产生的，当观测中有显著的系统误差时，偶然误差就处于次要地位，观测误差就呈现出系统的性质；反之，则呈现出偶然的性质。

系统误差对于观测结果的影响一般具有累积的作用，它对成果质量的影响也特别显著。在实际工作中，应该采用各种方法来消除或减弱其影响，达到实际上可以忽略不计的程度。所谓忽略不计的程度，是指残余的系统误差小于或至多等于偶然误差的量级。

通过一定的观测方法和观测程序可以消除或减小系统误差对测量成果的影响。例如，进行水准测量时，使前后视距相等，以消除由于视准轴不平行于水准轴（ i 角误差）对观测高差所引起的系统误差；还有在水平角观测中，总是进行盘左和盘右观测，以消除 $2C$ 误差。另一种方法是找出产生系统误差影响的原因和规律，对观测值进行系统误差的改正。

例如,对量距用的钢尺预先检定,求出尺长误差大小,对所量的距进行改正,减弱尺长系统误差对量距的影响等。此外,应加强仪器设备的保养和维护,按要求对仪器进行定期检核,确保仪器处于良好工作状态。

如果观测列中已经排除了系统误差的影响,或者与偶然误差相比已处于次要地位,则该观测列就可认为是带有偶然误差的观测列。

1.2.3 粗差

在数据采集过程中,如果出现比在正常观测条件下所可能出现的最大误差还要大的误差,称为粗差。通俗地说,粗差要比偶然误差大上好几倍。观测数据中存在粗差,将严重地损害观测成果的质量,因此在测量成果中不允许粗差存在,应设法避免出现粗差。

传统的处理粗差的措施通常采用 3σ (3 倍中误差) 准则。由误差理论知,当观测误差的绝对值大于 3σ 时,其概率为 0.3%,是小概率事件,在一次观测中可认为是不可能发生的事件。因此视 3σ 为极限误差,超过极限误差的数据认为包含有粗差,应当剔除。此外,观测时由于观测者的粗心大意读错,计算机输入数据错误,航测相片判读错误,控制网起始数据错误等。这种错误或粗差,可以通过重复观测、数据核对、闭合差验算等方法发现并消除。当然,测量工作者应具有高度的责任心,树立质量第一的思想尽量避免错误出现。

但在使用现今的高新测量技术如全球定位系统(GPS)、地理信息系统(GIS)、遥感(RS)以及其他高精度的自动化数据采集中,经常是粗差混入信息之中,识别粗差源并不是用简单方法可以达到目的的,需要通过数据处理方法进行识别和消除其影响,这部分内容仍是测绘界探讨的课题之一。

1.3 测量平差的研究对象和任务

测量平差是测绘学科中测量数据处理方面重要的组成部分,是根据最小二乘原理,由一系列带有观测误差的测量数据,求定未知量的最佳估值及精度的一门学科。由于观测结果不可避免地存在着误差,因此,如何处理带有误差的观测值,找出待求量(以下称未知量)的最佳估值,是测量平差学科所研究的内容。

在测绘工程和其他工程领域中,只带有偶然误差的观测列占大多数,是比较普遍的情形,它是测量平差学科研究的基础内容,也是应用最广和理论研究中最重要基础部分,一般认为属于经典测量平差范畴。本书主要学习基本的测量平差原理和方法,其平差对象是只带有偶然误差的观测值。

为了测定一条边长,丈量一次就可得出其长度,当然就不存在误差大小,也不存在数据处理问题。但如果对该边丈量 n 次,得到 n 个观测边长,取其平均值为该边长的最后长度。此时偶然误差影响得到消除或减弱,既提高了边长的精度,又可检查观测值是否有错误存在,这就是多测 $n-1$ 次所得到的效益。取平均值就是一种带有偶然观测列的数据处理方法。多测的 $n-1$ 次,称为多余观测,用 r 表示。多余观测数就是多于未知量的观测数。

在测量工作中,为了提高成果质量和检查发现错误常作多余观测。当观测中进行了多

余观测时,由于每个观测值带有偶然误差,就会产生一定的问题,如确定一个平面三角形的形状,只要测定其中两个内角就够了,现观测三个内角,三个内角观测值之和就不会等于 180° ,这就产生了闭合差或不符值。如何处理由于多余观测值之间的不符值或闭合差,求出未知量的最佳估值并评定结果的精度是测量平差的基本任务。

综上所述,测量平差的任务是:

- (1) 对一系列带有偶然误差的观测值,按最小二乘原理,消除各观测值之间的不符值,合理地配赋误差,求出未知量的最可靠值;
- (2) 运用合理的方法来评定测量成果的精度。

习 题

1. 什么叫观测误差?产生观测误差的原因主要有哪几个方面?
2. 观测条件是由哪些因素构成的?观测条件相同,其精度一定相同吗?
3. 根据观测误差对观测结果影响的不同,观测误差分为哪几类?
4. 为什么观测值中一定存在偶然误差?偶然误差能否被消除?为什么?
5. 何谓多余观测?为什么在测量中常常要进行多余观测?
6. 测量平差的任务是什么?
7. 根据本书的观点,观测值的真误差属于什么误差?
8. 在角度测量中,总是用正倒镜观测;在水准测量中,总是尽量使前后视距相等,这些规定都是为了消除什么误差?
9. 用钢尺丈量距离,下列几种情况会使测量结果含有误差,试分别判定误差的性质:
 - (1) 刻画不准确
 - (2) 尺不水平
 - (3) 估读小数不准确
 - (4) 尺垂曲
 - (5) 尺端稍偏直线方向(定线不准确)
10. 在水准测量中,下列几种情况会使水准尺读数带有误差,试分别判断误差的性质:
 - (1) 视准轴与水准轴不平行
 - (2) 仪器下沉
 - (3) 读数时估读不准确
 - (4) 水准尺下沉

第2章 误差理论与最小二乘原理

📖 学习目标

误差理论是测量平差的理论基础,最小二乘原理是测量平差的准则。通过学习,进一步理解偶然误差的统计规律和特性;正确理解精度、方差、协方差、权、协因数、最小二乘法等重要概念;掌握方差(中误差)计算、测量中常用定权方法、协方差和协因数传播律应用、由真误差计算中误差等基本技能;了解最小二乘法原理及基本应用方法。

2.1 偶然误差的统计规律

任何一个观测量,理论上总存在一个能代表其真正大小的数值,这个数值就称为该观测量的**真值**。对于某一观测量而言,若设观测值为 L ,其真值为 $\tilde{L}$,则真误差定义为:

$$\Delta = \tilde{L} - L \quad (2.1)$$

式中: Δ 称为观测值 L 的**真误差**,简称**误差**。

说明:对于某一确定的观测量,可以有多个不同的观测值,但真值只有一个。

研究 Δ 的性质及其概率特性是概率论的内容,测量平差研究的对象是一系列含有偶然误差的观测值。因此,这里的 Δ 仅指测量中的偶然误差。本节将对偶然误差的性质进行分析,最后得出偶然误差的统计规律。

2.1.1 偶然误差的统计分析

设有一组观测值 $L_1, L_2, \dots, L_n$,其相应的真值为 $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots, \tilde{L}_n$,真误差为 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ 。为了揭示偶然误差的规律性,将该偶然误差按照以下三种方法进行统计分析。

1. 统计分析

在相同观测条件下,独立地观测了某测区162个三角形的全部内角。由于观测中含有观测误差,因此每个三角形的三个内角之和一般不会等于 180° 。由式(2.1)可求出162个三角内角和的真误差为:

$$\Delta_i = 180^\circ - (L_1 + L_2 + L_3)_i \quad (i = 1, 2, \dots, 162)$$

式中:下标 i 表示第 i 个三角形。由于三角形各内角均为独立观测值,因此三角形内角和真误差 Δ_i 相互之间是互相独立的偶然误差。这里所谓**独立**,是反映各个误差在数值的大小和符号上互不影响,与这一组误差相对应的观测值称为互相独立的观测值。

现将全部误差按其正负分成两组,并将每组中的真误差按绝对值从小到大排列,以误

差区间 $d\Delta = 0.2''$ 统计出误差落入到各个区间内的个数 μ_i ，计算出误差出现在各个区间的频率 f_i ，其计算公式为：

$$f_i = \mu_i / n \quad (2.2)$$

式中： n 为误差的总个数。现将计算结果列于表 2.1 中。

表 2.1 三角形内角和真误差统计表

误差区间 $d\Delta$	Δ 为负值		Δ 为正值	
	个数 μ	频率 μ_i/n	个数 μ	频率 μ_i/n
0.0'' ~ 0.2''	21	0.130	21	0.130
0.2'' ~ 0.4''	19	0.117	19	0.117
0.4'' ~ 0.6''	12	0.074	15	0.093
0.6'' ~ 0.8''	11	0.068	9	0.056
0.8'' ~ 1.0''	8	0.049	9	0.056
1.0'' ~ 1.2''	6	0.037	5	0.031
1.2'' ~ 1.4''	3	0.019	1	0.016
1.4'' ~ 1.6''	2	0.012	1	0.006
1.6'' 以上	0	0	0	0
总和	82	0.506	80	0.495

从表中可以看出，该组误差表现出这样的分布规律：绝对值较小的误差比绝对值较大的误差多；绝对值相等的正误差个数与负误差个数相近；误差的绝对值有一定限度，最大不超过 1.6''。

大量的统计实践告诉我们，在其他测量结果中，偶然误差也都显示出上述同样的规律。因此，上述闭合差的分布规律，实际上就是偶然误差所具有的统计规律性。

2. 频率直方图分析

为了形象地表示偶然误差的分布规律，还可以利用频率直方图来表示误差分布情况。

根据表 2.1 中的数据，以误差 Δ 的数值为横坐标，以 $\frac{\mu_i/n}{d\Delta}$ 为纵坐标可绘制出频率直方图，如图 2.1 所示。每一误差区间上的长方形面积表示误差在该区间出现的相对个数（频率）。误差较小的长方形较高，其面积 $\left(S = \frac{\mu_i/n}{d\Delta} \times d\Delta = \mu_i/n = f_i \right)$ 较大，即误差的相对个数较多；反之误差较大的长方形较矮，其面积较小，即误差的相对个数较小。所有长方形基本上对称于纵坐标轴，这说明绝对值相等的正误差和负误差出现的相对个数很接近。误差绝对值大于 1.6'' 的长方形没有，表明其面积为零，即出现的相对个数为零，亦即不会出现。我们还注意到，所有长方形面积之和等于 1，即 $\sum_{i=1}^n f_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i = 1$ 。

3. 正态分布密度函数

由于误差的取值是连续的，故当误差个数 n 无限增多，并无限缩小误差区间时，则可以想象图中各个小长方条顶边的折线就变成一条光滑的曲线。如图 2.2 所示，我们称这条