高等数学
典型例题解析与习题精解

主 编 付夕联 范红玲 徐 峰

西北工业大学出版社

高 等 数 学

典型例题解析与习题精解

（与同济第六版教材配套使用）

上　册

主　编　付夕联　范红玲　徐　峰

副主编　孙锦萍　周爱华　张永凤　朱训芝

编　委　付夕联　范红玲　徐　峰　孙锦萍
周爱华　张永凤　朱训芝　卢刚夫
张艳平　徐夫义　黄志霞　潘淑杰
李　霞

西北工業大學出版社

【内容简介】 本书是按照高等学校工科数学课程教学指导委员会颁布的教学大纲"高等数学教学基本要求"编写;内容结构主要参考了同济大学数学系编《高等数学》(第六版)的章节顺序. 本书共十二章,内容按节编写,每节分为释疑解惑、典型例题解析、课后习题精解. 而每一章都有单元测试与提高及其解答. 上、下册最后还分别给出了两套模拟测试题,其题型与平时学生考试题完全一致,本书可与《高等数学》(第六版)配套使用,也可独立使用.

本书可作为高等数学课程教学、学习和应试的辅导书,也可供考研人员及相关工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学典型例题解析与习题精解/付夕联,范红玲,徐峰主编. —西安:西北工业大学出版社,2010.8

ISBN 978-7-5612-2861-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①付… ②范… ③徐… Ⅲ.①高等数学—解题 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 158356 号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路 127 号　　邮编:710072
电　　话:(029)88493844　　88491757
网　　址:www.nwpup.com
印 刷 者:陕西丰源印务有限公司
开　　本:787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张:43.125
字　　数:1556 千字
版　　次:2010 年 9 月第 1 版　　2010 年 9 月第 1 次印刷
定　　价:65.00 元(¥36.00)

前　　言

高等数学是理工科院校开设的一门重要的基础课程，也是硕士研究生入学考试的必考科目。《高等数学》教材的版本较多，国内经典教材——同济大学数学系主编的《高等数学》具有体系完整、结构严谨、层次清晰和深入浅出的特点，成为多所院校的本科使用教材，我们根据多年的教学经验，在对教学大纲、课程内容以及近几年研究生入学考试的特点进行深入分析的基础上，依据同济大学数学系主编的《高等数学》第六版的内容和章节顺序，编写了本书。本书旨在帮助、指导广大读者更深入地理解课本中的基本概念、基本原理，熟练掌握解题的基本思想方法，提高应试能力和数学基本素质。

本书共分为十二章，章节的划分与标题和同济大学数学系主编的《高等数学》第六版的内容及章节顺序完全一致，每一节包括如下几部分内容：

一、释疑解惑

对本节的基本概念、重要原理及公式有选择地作出更深入、更全面地阐释；揭示出概念与概念之间应有的联系与区别；针对读者在学习本节内容常常问及的一些带有共同性的、又有较大意义的问题，给予准确的解答和详尽的剖析；对一些应用较广泛的命题或公式进行了适当的推广。

二、典型例题解析

在教材原有例题和课后习题的基础上，精选一部分典型例题，以便开拓学生视野，巩固所学知识和内容，掌握解题的基本方法和技巧；另外根据近几年研究生入学考试的特点，针对体现基本方法和重要思想的原理、命题或公式，举出了一些有一定难度的题目，其中有许多题目都是历年来研究生考试的真题，对有些题目的解答做出了分析和总结，以供学有余力的学生阅读参考。

三、课后习题解答

对本节的课后习题一一作出详细解答，以供教师和学业生参考。

另外每章都有单元测试与提高及其解答，单元测试与提高较全面地反映出本章的知识点，有填空题、选择题、简单的解答题、综合题、讨论题和证明题等；上、下册最后还分别出了两套模拟测试题，其题型与平时学生考试题型完全一致，对广大读者参加期中测验和期末考试有重要的参考价值。

本书的编写力求突出以下几个特点：

(1)注重对基本概念、基本原理、基本思想方法的理解与掌握，消除因对这些基础知识理解上的欠缺而导致解题过程中的失误；强调了知识与知识、方法与方法之间的联系与区别，有助于读者在联系中去巩固、深化知识，从而在头脑中形成清晰、稳固的认知结构。

(2)所选取的典型例题以及一些单元测试中的题目具有开放性、可推广性、一题多解的特

点，这些题目有的要应用多个知识点，具有较强的综合性，由此激活学生的思维，开阔学生的思路，使学生能对考点知识融合贯通，提高其应试能力。

(3)问题是数学的心脏，知识是数学的载体，方法是数学的行为，思想则是数学的灵魂。本书在注重基础知识的同时，正是通过精选的例题和单元测试题的解答过程，对使用的方法进行总结，以方法对问题进行归类，避免了传统的题海战术。

本书注意博采众家之长，查阅了多部教学参考书和研究生入学考试指导丛书，汲取了丰富的养分，在此向这些书籍的编著者表示感谢。由于本书编者水平所限，疏漏与错误在所难免，敬请广大读者提出宝贵意见。

编　者

2010 年 5 月

目　　录

第一章 函数与极限

第一节 映射与函数

GAODENGSHUXUE

一、释疑解惑

1. 整体有界与部分有界、整体无界与部分无界之间的关系.

答 (1) 若函数 $f(x)$ 在其定义域 D 上有界,则 $f(x)$ 在 D 的任意子集上都有界;反之,若 $f(x)$ 在定义域 D 上无界,则 $f(x)$ 在 D 上不一定有界.

(2) 若函数 $f(x)$ 在其定义域 D 的某一子集 X 上无界,则 $f(x)$ 在 D 上必无界;反之,若 $f(x)$ 在定义域 D 的子集上有界,则 $f(x)$ 在 D 的子集上不一定无界.

2. 整体单调与部分单调之间的关系.

答 若函数 $f(x)$ 在其定义域 D 上单调增加(或单调减少),则 $f(x)$ 在任意区间 $I \subset D$ 上单调增加(或单调减少);反之,若 $f(x)$ 在某一区间 $I \subset D$ 上单调增加(或减少),则 $f(x)$ 在 D 上未必单调增加(或减少);

3. 单调函数必存在反函数;反之不然.

答 函数的单调性只是函数存在反函数的充分条件,而不是必要条件. 事实上,只要保证 f 是 D 到 $f(D)$ 的单射,就能保证函数 $y = f(x)$ 存在反函数. 不单调的函数也可能存在反函数,例如,函数

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-1,0] \\ x^2+1, & x \in (0,1] \end{cases}$$

在区间$[-1,1]$上并不是单调函数(见图1.1(a)),但它是从$[-1,1]$到$[0,2]$上的单射,反以存在反函数(见图1.1(b)).

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -x, & x \in [0,1] \\ \sqrt{x-1}, & x \in (1,2] \end{cases}$$

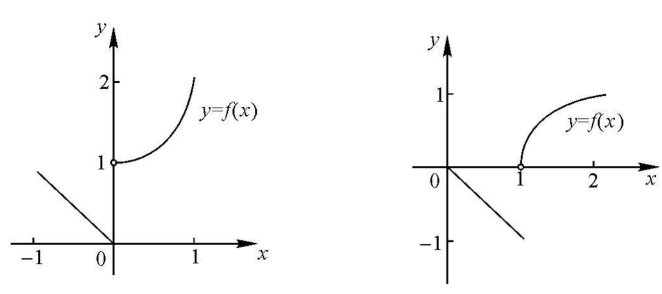

图 1.1

4. 初等函数与分段函数.

答 构成初等函数的要素是常数和基本初等函数，在这些要素之间进行的运算是四则运算和复合运算，在整个定义域内，初等函数是用一个解析式表示的.

分段函数是指在定义域的不同范围内用不同式子来表示的函数.

一些初等函数的解析表达式常常有多种等价形式.判断是否是初等函数时，不能仅仅因为其中某一种形式与定义不符合而否定.例如，形如 $y=f(x)^{g(x)}(f(x)>0,f(x)\neq 1)$ 的函数称为幂指函数.

例如，函数

$$y=(2x+1)^{\sin x}$$

可等价地表示为

$$y=\mathrm{e}^{\sin x\cdot\ln(2x+1)}$$

上述函数可看做是由函数 $y=\mathrm{e}^u,u=\sin x\cdot\ln(2x+1)$ 复合而成的，因此是初等函数.

再如，函数

$$y=\begin{cases}x^2-x+1,x\leqslant 1\\ x^2+x-1,x>1\end{cases}$$

在形式上是分段函数，但由于它可以等价地表示为

$$y=x^2-|x-1|=x^2+\sqrt{(x-1)^2}$$

因此为初等函数.

二、典型例题解析

例 1.1 判断函数 $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$ 与 $y=2\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ 是否是相同的函数.

解 由于

$$y=\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\ln\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)^2}{x^2}$$

其定义域为 $D_1=\{x\mid x\in\mathbf{R},且\ x\neq 0\}$；而 $y=2\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ 的定义域为 $D_2=\{x\mid x\in\mathbf{R},且\ x>0\}$，显然 $D_1\neq D_2$，故这两个函数是不相同的.

例 1.2 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[g(x)]=1-x$，且 $g(x)\geqslant 0$，求 $g(x)$ 的定义域.

解 要求 $g(x)$ 的定义域，必须先求出 $g(x)$ 的具体表达式.事实上，由 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[g(x)]=1-x$，可得

$$\mathrm{e}^{[g(x)]^2}=1-x$$

又 $g(x)\geqslant 0$，由此推出 $g(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，故 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0]$.

例 1.3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，求函数

$$y=f(\mathrm{e}^x-1)f(\ln x)-\frac{f(x-1)}{\sqrt{|x|-1}}$$

的定义域.

解 函数由多个复合函数的四则运算构成，其定义域即为各函数定义域的交集，于是有

$$\begin{cases}0<\mathrm{e}^x-1<1\\ 0<\ln x<1\\ 0<x-1<1\\ |x|-1>0\end{cases}\quad 亦即\quad\begin{cases}0<x<\ln 2\\ 1<x<\mathrm{e}\\ 1<x<2\\ x<-1\ 或\ x<1\end{cases}$$

所以该函数的定义域为 $(1,\ln 2)$.

例 1.4 求函数 $f(x)=\lg(1-2\cos x)$ 的值域.

解 由 $1-2\cos x>0$,可得 $\cos x<\frac{1}{2}$,$f(x)$ 的定义域为 $D=\{x\mid 2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\}$. 又因为在 D 上 $0<1-2\cos x\leqslant 3$,故 $f(x)$ 的值域为 $w=(-\infty,\lg 3)$.

例 1.5 已知 $f(\sqrt{x}-1)=x+2$,求函数 $f[f(x)]$ 的值域.

解 先求函数 $f(x)$ 的表达式,令 $u=\sqrt{x}-1$,则

$$x=(u+1)^2,\quad f(u)=(u+1)^2+2$$

在 $u=\sqrt{x}-1$ 中,$x\geqslant 0\Rightarrow u\geqslant -1$,从而 f 的定义域为 $D_f=[-1,+\infty]$,值域 $R_f=[2,+\infty)$.

又因 $f[f(u)]=[f(u)+1]^2+2=[(u+1)^2+3]^2+2$,当 $u\in D_f$ 时,$f(u)\in R_f\subset D_f$,所以 fof 的定义域为 $D_{fof}=D_f=[-1,+\infty)$. 当 $u=-1$ 时,$f[f(-1)]=11$ 是最小值,且 $f[f(u)]$ 在 D_{fof} 上无上界,于是 fof 的值域是$[11,+\infty)$.

例 1.6 设 $2f(x)+f(1-x)=\sin x$,求 $f(x)$ 的表达式.

解 在 $2f(x)+f(1-x)=\sin x$ 中,令 $1-x=u$,则有

$$2f(1-u)+f(u)=\sin(1-u)$$

将 u 换为 x 可得

$$2f(1-x)+f(x)=\sin(1-x)$$

解方程组

$$\begin{cases}2f(x)+f(1-x)=\sin x\\2f(1-x)+f(x)=\sin(1-x)\end{cases}$$

得

$$f(x)=\frac{2\sin x-\sin(1-x)}{3}$$

例 1.7 设 $g(x)=\begin{cases}2-x,x\leqslant 0\\x+2,x>0\end{cases}$,$f(x)=\begin{cases}x^2,x<0\\-x,x\geqslant 0\end{cases}$,求 $g[f(x)]$.

解 这是两个分段函数的复合运算. 令

$$y=g(u)=\begin{cases}2-u,u\leqslant 0\\u+2,u>0\end{cases},\quad u=f(x)=\begin{cases}x^2,x<0\\-x,x\geqslant 0\end{cases}$$

由于 $u=f(x)$ 的值域为 $\omega_2=(-\infty,+\infty)$,而 $y=g(u)$ 的定义域为 $D_1=(-\infty,+\infty)$,因此 $\omega_2\subset D_1$,故 $y=g(u)$ 与 $u=f(x)$ 可以复合成一个复合函数.

当 $x<0$ 时,$u=f(x)=x^2>0$,此时 $y=u+2$,于是 $g[f(x)]=x^2+2$.

当 $x\geqslant 0$ 时,$u=f(x)=-x\leqslant 0$,此时 $y=2-u$,于是 $g[f(x)]=2+x$.

从而有

$$g[f(x)]=\begin{cases}x^2+2,x<0\\2+x,x\geqslant 0\end{cases}$$

例 1.8 证明:函数 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^2}$ 在$(0,1)$内无界.

证 对 $\forall M>0$,总存在正整数 n,使$\sqrt{n}>M$,取 $x_0=\frac{1}{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}$,显然 $x_0\in(0,1)$,且有

$$|f(x_0)|=\left|\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})\right|=\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}>\sqrt{n}>M$$

所以 $f(x)$ 在$(0,1)$上无界.

例 1.9 证明:函数 $f(x)=x+\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上存在反函数.

证 如果能通过给定的函数 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$,则就可以说明 $y=f(x)$ 存在反函数,但这种方法对该函数来说是非常困难的. 可以转而讨论函数的单调性.

对 $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$,当 $x_1<x_2$ 时,由于

$f(x_2)-f(x_1)=x_2+\sin x_2-(x_1+\sin x_1)=x_2-x_1+(\sin x_2-\sin x_1)=$

$$x_2 - x_1 + 2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2} \geqslant x_2 - x_1 - 2\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right| >$$

$$x_2 - x_1 - 2\times\frac{x_2-x_1}{2} = 0$$

因此，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，故必存在反函数.

例 1.10 设函数 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 上单调递增，证明：

$$\varphi(x) = \max\{f(x),g(x)\},\quad \psi(x) = \min\{f(x),g(x)\}$$

在 (a,b) 内单调递增.

证 对 $\forall x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，由 $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ 及 $f(x),g(x)$ 的单调递增性，得

$$\varphi(x_2)\geqslant f(x_2)>f(x_1),\quad \varphi(x_2)\geqslant g(x_2)>g(x_1)$$

从而
$$\varphi(x_2)=\max\{f(x_2),g(x_2)\}>\max\{f(x_1),g(x_1)\}=\varphi(x_1)$$

由 $\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ 及 $f(x),g(x)$ 的单调递增性，得

$$\psi(x_1)\leqslant f(x_1)<f(x_2),\quad \psi(x_1)\leqslant g(x_1)<g(x_2)$$

从而
$$\psi(x_1)=\min\{f(x_1),g(x_1)\}<\min\{f(x_2),g(x_2)\}=\psi(x_2)$$

这就证明了 $\varphi(x),\psi(x)$ 的单调递增性.

用同样方法可以证明如下两个结论：

结论 1 若 $f(x),g(x)$ 在区间 (a,b) 内单调递减，则 $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ 与 $\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ 在 (a,b) 内也单调递减.

结论 2 若 $f(x),g(x),h(x)$ 在区间 (a,b) 内单调递增（或单调递减），则 $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x),h(x)\}$ 与 $\psi(x)=\min\{f(x),g(x),h(x)\}$ 在 (a,b) 内也单调递增（或单调递减）.

例 1.11 判断函数 $g(x)=F(x)\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$ 的奇偶性，其中 $a>0$，且 $a\neq1$，$F(x)$ 为奇函数.

解 利用奇偶函数的定义. 由于

$$g(-x)=F(-x)\left(\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}\right)=F(-x)\left(\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}\right)=$$

$$F(-x)\left(-\frac{a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)=F(-x)\left(-1-\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)=$$

$$F(-x)\left(-\frac{1}{a^x-1}-\frac{1}{2}\right)=-F(x)\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)=F(x)\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)=g(x)$$

故 $g(x)$ 为偶函数.

例 1.12 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，且 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

证 由于 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，因此对 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $f(-x)=-f(x)$，从而 $f(0)=-f(0)$，即 $f(0)=0$.

因为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以当 $x>0$ 时，$f(x)>0$.

对 $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，当 $x_1<x_2$ 时，则有

(1) 若 $0\leqslant x_1<x_2$，由于 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，故有 $f(x_1)<f(x_2)$；

(2) 若 $x_1<x_2\leqslant0$，则 $-x_1>-x_2\geqslant0$，从而有 $f(-x_1)>f(-x_2)$，又因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $-f(x_1)>-f(x_2)$，即 $f(x_1)<f(x_2)$；

(3) 若 $x_1<0,x_2\geqslant0$，则 $f(-x_1)>0$，即 $-f(x_1)>0$，也就是 $f(x_1)<0$，从而有 $f(x_1)<f(x_2)$.

综上所述，对 $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

例 1.13 假设对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$f(x)$ 都满足

$$f\left(\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$$

证明：$f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数.

证 对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$，有

$$f(1+x)=f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{f\left(\frac{1}{2}+x\right)-f^2\left(\frac{1}{2}+x\right)}=$$

$$\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}-\frac{1}{4}-\sqrt{f(x)-f^2(x)}-f(x)+f^2(x)}=$$

$$\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+f^2(x)-f(x)}=\frac{1}{2}+\sqrt{\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]^2}$$

因为
$$f\left(\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\geqslant\frac{1}{2}$$

即
$$f(x)\geqslant\frac{1}{2}$$

所以
$$f(1+x)=\frac{1}{2}+f(x)-\frac{1}{2}=f(x)$$

故 $f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数.

三、课后习题解答

习题 1-1 解答

1. 设 $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$，$B=[-10,3)$，写出 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\backslash B$ 及 $A\backslash(A\backslash B)$ 的表达式.

解 $A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$，$A\cap B=[-10,-5)$

$A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$，$A\backslash(A\backslash B)=[-10,-5)$

2. 设 A，B 是任意两个集合，证明：对偶律 $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

证 先证 $(A\cap B)^C\subset A^C\cup B^C$.

因为 $x\in(A\cap B)^C\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\in A^C$ 或 $x\in B^C\Rightarrow x\in A^C\cup B^C$，所以

$$(A\cap B)^C\subset A^C\cup B^C$$

再证 $A^C\cup B^C\subset(A\cap B)^C$.

因为 $x\in A^C\cup B^C\Rightarrow x\in A^C$ 或 $x\in B^C\Rightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\in(A\cap B)^C$，所以

$$A^C\cup B^C\subset(A\cap B)^C$$

于是
$$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$$

3. 设映射 $f:X\rightarrow Y$，$A\subset X$，$B\subset X$，证明：

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$；(2) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

证 (1) 设 $x\in A\cup B$，且 $f(x)=y$，则有 $x\in A$ 或 $x\in B$，从而有 $f(x)\in f(A)$ 或 $f(x)\in f(B)$，亦即 $f(x)\in f(A)\cup f(B)$，所以

$$f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$$

设 $y=f(x)\in f(A)\cup f(B)$，则 $y\in f(A)$ 或 $y\in f(B)$，从而有 $x\in A$ 或 $x\in B$，即 $x\in A\cup B$，亦即 $y\in f(A\cup B)$，所以

$$f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$$

于是
$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$$

(2) 设 $y=f(x)\in f(A\cap B)$，则 $x\in A\cap B$，即 $x\in A$ 且 $x\in B$，从而有 $f(x)\in f(A)$ 且 $f(x)\in f(B)$，所以 $f(x)\in f(A)\cap f(B)$，于是

$$f(A\cap B)\in f(A)\cap f(B)$$

4. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+2}$； (2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$； (3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；　(5) $y=\sin\sqrt{x}$；　(6) $y=\tan(x+1)$；

(7) $y=\arcsin(x-3)$；　(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；

(9) $y=\ln(x+1)$；　(10) $=y=e^{\frac{1}{x}}$.

解　(1) 由 $3x+2\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant -\dfrac{2}{3}$,所以函数的定义域为$\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

(2) 由 $1-x^2\neq 0\Rightarrow x\neq\pm 1$,所以函数的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(3) 由 $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0\Rightarrow x\neq 0$ 且 $|x|\leqslant 1$,所以函数的定义域为$[-1,)\cup(0,1]$.

(4) 由 $4-x^2>0\Rightarrow|x|<2$,所以函数的定义域为$(-2,2)$.

(5) 由 $x\geqslant 0$ 知,函数的定义域为$[0,+\infty)$.

(6) 由 $x+1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1(k\in\mathbf{Z})$,所以函数的定义域为 $D=\{x\mid x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1,k\in\mathbf{Z}\}$.

(7) 由 $|x-3|\leqslant 1\Rightarrow 2\leqslant x\leqslant 4$,所以函数的定义域为$[2,4]$.

(8) 由 $3-x\geqslant 0$ 且 $x\neq 0\Rightarrow x\leqslant 3$,且 $x\neq 0$,所以函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,3]$.

(9) 由 $x+1>0\Rightarrow x>-1$,所以函数的定义域为$(-1,+\infty)$.

(10) 由 $x\neq 0$ 知,函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

5. 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2,g(x)=2\lg x$；　(2) $f(x)=x,g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3},g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；　(4) $f(x)=1,g(x)=\sec^2x-\tan^2x$.

解　(1) 不相同,因为定义域不同.

(2) 不相同,因为对应法则不同.当 $x<0$ 时,$g(x)=-x$.

(3) 相同,因为定义域和对应法则均相同.

(4) 不相同,因为定义域不同.

6. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3}\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$,求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$,$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$,$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$,$\varphi(-2)$,并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

解　$\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right|=\dfrac{1}{2}$；$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；$\varphi(-2)=0$

$y=\varphi(x)$ 的图形如图 1.2 所示.

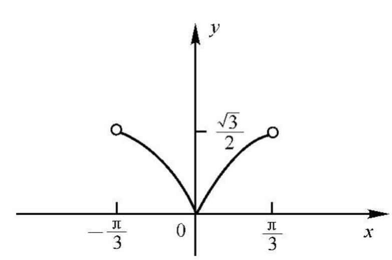

图 1.2

7. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$, $x\in(-\infty,1)$；

(2) $y=x+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

证　(1) 设 $x_1,x_2\in(-\infty,1)$ 且 $x_1<x_2$,则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1-x_1}-\frac{x_2}{1-x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}<0$$

即

$$f(x_1)<f(x_2)$$

故 $f(x)$ 在$(-\infty,1)$上单调增加.

(2) 设 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$，则

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1 + \ln x_1 - (x_2 + \ln x_2) = (x_1 - x_2) + \ln\frac{x_1}{x_2} < 0$$

即
$$f(x_1) < f(x_2)$$

故 $f(x)$ 在$(0, +\infty)$ 上单调增加.

8. 设 $f(x)$ 为定义在$(-l, l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在$(0,l)$ 内单调增加，证明：$f(x)$ 在$(-l,0)$ 内也单调增加.

证　设 $x_1, x_2 \in (-l,0)$ 且 $x_1 < x_2$，则有 $-x_1, -x_2 \in (0,l)$ 且 $-x_2 < -x_1$. 由 $f(x)$ 在$(0,l)$ 内单调增加可得 $f(-x_2) < f(-x_1)$.

因为 $f(x)$ 在$(-l,l)$ 内是奇函数，所以 $f(-x_2) = -f(x_2)$，$f(-x_1) = -f(x_1)$，$-f(x_2) < -f(x_1)$，从而 $f(x_1) < f(x_2)$，故 $f(x)$ 在$(-l,0)$ 内也单调增加.

9. 设下面所考虑的函数都是定义在区间$(-l,l)$ 上的，证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数. 两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证　(1) 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 均为偶函数，即 $f_1(-x) = f_1(x)$，$f_2(-x) = f_2(x)$，令 $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$，则

$$F(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) + f_2(x) = F(x)$$

故 $F(x)$ 是偶函数.

设 $g_1(x), g_2(x)$ 均为奇函数，即 $g_1(-x) = -g_1(x)$，$g_2(-x) = -g_2(x)$，令 $G(x) = g_1(x) + g_2(x)$，则

$$G(-x) = g_1(-x) + g_2(-x) = -g_1(x) - g_2(x) = -G(x)$$

故 $G(x)$ 是奇函数.

(2) 类似可证(略).

10. 下列函数中哪些是偶函数?哪些是奇函数?哪些既非偶函数又非奇函数?

(1) $y = x^2(1-x^2)$；　(2) $y = 3x^2 - x^3$；　(3) $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；

(4) $y = x(x-1)(x+1)$；　(5) $y = \sin x - \cos x + 1$；　(6) $y = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$.

解　(1) 因为 $f(-x) = (-x)^2[1-(-x)^2] = x^2(1-x^2) = f(x)$，故 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 因为 $f(-x) = 3(-x)^2 - (-x)^3 = 3x^2 + x^3$，故 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(3) 因为 $f(-x) = \dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = f(x)$，故 $f(x)$ 是偶函数.

(4) 因为 $f(-x) = (-x)(-x-1)(-x+1) = -x(x+1)(x-1) = -f(x)$，故 $f(x)$ 是奇函数.

(5) 因为 $f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) + 1 = -\sin x - \cos x + 1$，故 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(6) 因为 $f(-x) = \dfrac{1}{2}(a^{-x} + a^x) = f(x)$，故 $f(x)$ 是偶函数.

11. 下列函数中哪些是周期函数?对于周期函数，指出其周期：

(1) $y = \cos(x-2)$；　(2) $y = \cos 4x$；　(3) $y = 1 + \sin\pi x$；

(4) $y = x\cos x$；　(5) $y = \sin^2 x$.

解　(1) 是周期函数，周期为 2π. (2) 是周期函数，周期为 $\dfrac{\pi}{2}$. (3) 是周期函数，周期为 2. (4) 不是周期函数. (5) $y = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ 是周期函数，周期为 π.

12. 求下列函数的反函数：

(1) $y = \sqrt[3]{x+1}$；　(2) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$；　　(4) $y=2\sin 3x$ $\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$；

(5) $y=1+\ln(x+2)$；　　(6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

解　(1) 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 解得 $x=y^3-1$，故反函数为 $y=x^3-1, x\in\mathbf{R}$.

(2) 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 解得 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$，故反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，$\{x\mid x\neq -1, x\in\mathbf{R}\}$.

(3) 由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 解得 $x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$，故反函数为 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$，$\{x\mid x\neq\dfrac{a}{c}, x\in\mathbf{R}\}$

(4) 由 $y=2\sin 3x$ 解得 $x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$，故反函数为 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$，$x\in[-2,2]$.

(5) 由 $y=1+\ln(x+2)$ 解得 $x=e^{y-1}-2$，故反函数为 $y=e^{x-1}-2$，$x\in\mathbf{R}$.

(6) 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 解得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，故反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$，$x\in(0,1)$.

13. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证　(1) 充分性：已知 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界，即存在 M_1, M_2，使得对于任意的 $x\in X$，有 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$，取 $M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$，则 $|f(x)|\leqslant M$. 故 $f(x)$ 有界.

(2) 必要性：已知 $f(x)$ 在 X 上有界，即存在常数 M，使得对于任意的 $x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，即 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$，故 $f(x)$ 有上界 M，有下界 $-M$.

14. 在下列各题中，求由所给函数构成的复合函数，并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值：

(1) $y=u^2$, $u=\sin x$, $x_1=\dfrac{\pi}{6}$, $x_2=\dfrac{\pi}{3}$；　　(2) $y=\sin u$, $u=2x$, $x_1=\dfrac{\pi}{8}$, $x_2=\dfrac{\pi}{4}$；

(3) $y=\sqrt{u}$, $u=1+x^2$, $x_1=1$, $x_2=2$；　　(4) $y=e^u$, $u=x^2$, $x_1=0$, $x_2=1$；

(5) $y=u^2$, $u=e^x$, $x_1=1$, $x_2=-1$.

解　(1) $y=\sin^2 x$, $y_1=\dfrac{1}{4}$, $y_2=\dfrac{3}{4}$　.　　(2) $y=\sin 2x$, $y_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2=1$.

(3) $y=\sqrt{1+x^2}$, $y_1=\sqrt{2}$, $y_2=\sqrt{5}$　.　　(4) $y=e^{x^2}$, $y_1=1$, $y_2=e$.

(5) $y=e^{2x}$, $y_1=e^2$, $y_2=e^{-2}$.

15. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$，求下列各函数的定义域：

(1) $f(x^2)$；　　(2) $f(\sin x)$；

(3) $f(x+a)$ $(a>0)$；　　(4) $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$.

解　(1) 由于 $0\leqslant x^2\leqslant 1\Rightarrow |x|\leqslant 1$，故定义域为 $[-1,1]$.

(2) 由于 $0\leqslant\sin x\leqslant 1\Rightarrow 2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$，故定义域为 $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}[2k\pi,(2k+1)\pi]$.

(3) 由于 $0\leqslant x+a\leqslant 1\Rightarrow -a\leqslant x\leqslant 1-a$，故定义域为 $[-a,1-a]$.

(4) 由于 $0\leqslant x+a\leqslant 1$ 且 $0\leqslant x-a\leqslant 1\Rightarrow$ 当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，则定义域为 $[a,1-a]$；当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，则函数无定义域.

16. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

解　将 $f(x)$ 中的 x 用 $g(x)=e^x$ 替换得

$$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & |e^x|<1\\ 0, & |e^x|=1\\ -1, & |e^x|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}$$

将 $g(x)$ 中的 x 用 $f(x)$ 替换得

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e^1, & |x|<1 \\ e^0, & |x|=1 \\ e^{-1}, & |x|>1 \end{cases} = \begin{cases} e, & |x|<1 \\ 1, & |x|=1 \\ e^{-1}, & |x|>1 \end{cases}$$

$f[g(x)]$ 的图形如图 1.3(a) 所示，$g[f(x)]$ 的图形如图 1.3(b) 所示.

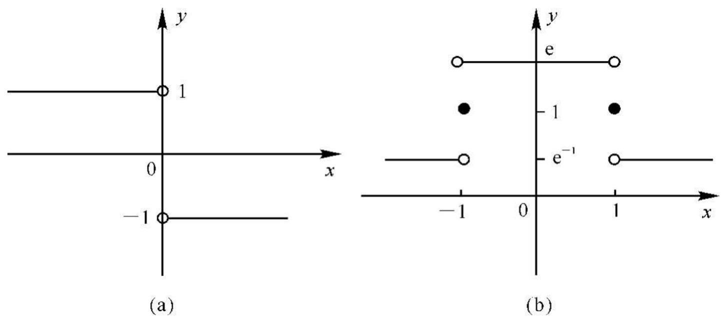

图 1.3

17. 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\varphi = 40°$（见图 1.4），当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 $L(L = AB + BC + CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式，并指明其定义域.

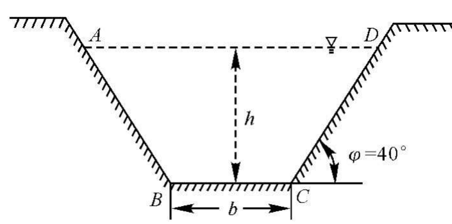

图 1.4

解 由图 1.4 可得，$h = AB\sin\varphi = DC\sin\varphi$，故 $AB = DC = \dfrac{h}{\sin\varphi}$，从梯形面积计算公式

$$S_0 = \frac{1}{2}h(BC + AD) = \frac{1}{2}h[BC + (BC + 2h\cot\varphi)]$$

得 $BC = \dfrac{S_0}{h} - h\cot\varphi$，则湿周 L 为

$$L = AB + BC + DC = \frac{S_0}{h} + \frac{2-\cos 40°}{\sin 40°}h$$

自变量 h 的取值范围由 $h > 0$，$\dfrac{S_0}{h} - h\cot 40° > 0$ 确定，故定义域为 $0 < h < \sqrt{S_0\tan 40°}$.

18. 收音机每台售价为 90 元，成本为 60 元．厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡是定购量超过 100 台以上的，每多订购 1 台，售价就降低 1 分，但最低价为每台 75 元.

(1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数； (2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数；

(3) 某一商行订购了 1 000 台，厂方可获利润多少？

解 (1) 当 x 不超过 100 台，即 $0 \leqslant x \leqslant 100$ 时，$p = 90$，令 $90-(x-100)\times 0.01 = 75$，得 $x = 1\ 600$；当 $x \geqslant 1\ 600$ 时，$p = 75$；当 $100 < x < 1\ 600$ 时，$p = 90-(x-100)\times 0.01$，故

$$p = \begin{cases} 90, & 0 \leqslant x \leqslant 100 \\ 90-(x-100)\times 0.01, & 100 < x < 1\ 600 \\ 75, & x \geqslant 1\ 600 \end{cases}$$

(2) 利润 =（销售价 − 成本价）× 销售量，故

$$P = (p-60)x = \begin{cases} 30x, & 0 \leqslant x \leqslant 100 \\ 31x - 0.01x^2, & 100 < x < 1\ 600 \\ 15x, & x \geqslant 1\ 600 \end{cases}$$