《宁夏回族自治区教育厅中小学教辅材料评议推荐目录》
推荐教辅图书
经人民教育出版社授权

配 人教版®

总主编◎李朝东

精讲精练

修订版

经纶学典

本册主编：高志强　王加轩

学生用书

选修2-2

高中数学

黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社

《宁夏回族自治区教育厅中小学教辅材料评议推荐目录》推荐教辅图书

总主编◎李朝东

君子曰：学不可以已。青，取之于蓝而青于蓝；冰，水为之而寒于水。木直中绳，輮以为轮，其曲中规；虽有槁暴，不复挺者，輮使之然也。故木受绳则直，金就砺则利，君子博学而日参省乎己，则知明而行无过矣。

吾尝终日而思矣，不如须臾之所学也；吾尝跂而望矣，不如登高之博见也。登高而招，臂非加长也，而见者远；顺风而呼，声非加疾也，而闻者彰。假舆马者，非利足也，而致千里；假舟楫者，非能水也，而绝江河。君子生非异也，善假于物也。

积土成山，风雨兴焉；

小流，无以成江海。

牙之利，筋骨之

精讲精练

经纶学典

本册主编：高志强　王加轩

学生用书

选修2-2

高中数学

人教 A 版

黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

精讲精练:人教A版.高中数学.2-2:选修/李朝东主编.
—银川:宁夏人民教育出版社,2009.11(2013.1重印)
ISBN 978-7-80764-215-2

Ⅰ.①精… Ⅱ.①李… Ⅲ.①数学课—高中—教学参考
资料 Ⅳ.① G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第197765号

精讲精练——数学　选修2-2(人教A版)　李朝东　主编

责任编辑　柳毅伟
装帧设计　红骑士
责任印制　刘　丽

黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社　出版发行

地　　址　银川市北京东路139号出版大厦(750001)
网　　址　www.yrpubm.com
网上书店　www.hh-book.com
电子信箱　jiaoyushe@yrpubm.com
邮购电话　0951-5014294
经　　销　全国新华书店
印刷装订　宁夏雅昌彩色印务有限公司

开　本　880mm×1230mm 1/16　　印　张　10
印刷委托书号　(宁)0012925　　字　数　200千　　印　数　4425册
版　次　2009年11月第1版　　印　次　2013年1月第4次印刷
书　号　ISBN 978-7-80764-215-2/G·1152
定　价　12.98元

目 录

CONTENTS

第一章　导数及其应用

1.1　变化率与导数

1.1.1　变化率问题

自·主·探·究

课标导学 kebiaodaoxue

1. 通过生活中的实例(如气球膨胀率、高台跳水中的平均速度)认识函数的平均变化率.
2. 理解函数平均变化率的概念.

基础梳理 jichushuli

平均变化率

一般地,对于函数 $y=f(x)$,$P(x_0,y_0)$是函数图象上的一点,$M(x_1,y_1)$也是函数图象上的一点,自变量从 x_0 变化到 x_1 时,相应的函数值由 y_0 变化到 y_1,则有 $\Delta x=$________,$\Delta y=$________=____________.

当 $\Delta x\neq 0$ 时,我们把$\frac{\Delta y}{\Delta x}=$__________=__________称为函数 $y=f(x)$从 x_0 到 x_1 的平均变化率. 若用 $x_0+\Delta x$ 代替 x_1,则有$\frac{\Delta y}{\Delta x}=$__________________.

【参考答案】

x_1-x_0　y_1-y_0　$f(x_1)-f(x_0)$　$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$　$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$　$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

重·难·点·突·破

疑难剖析 yinanpouxi

1. 增量

一般地,对于函数 $y=f(x)$,$P(x_0,y_0)$是函数图象上的一点,$M(x_1,y_1)$也是函数图象上的一点,自变量从 x_0 变化到 x_1 时,相应的函数值由 y_0 变化到 y_1,则有:

(1)自变量的增量:x_1-x_0 叫做自变量 x 的增量,记作:Δx,且有 $\Delta x=x_1-x_0$.

(2)函数值的增量:y_1-y_0 叫做函数值 y 的增量,记作:Δy,且有 $\Delta y=y_1-y_0=f(x_1)-f(x_0)$.

注意:(1)Δx 是一个整体符号,而不是表示 Δ 与 x 相乘.

(2)Δx是自变量 x 在 x_0 处的增量,可为正值,也可为负值.

2. 求函数 $y=f(x)$从 x_0 到 x_1 的平均变化率的步骤

(1)求函数值的增量 $\Delta y=y_1-y_0=f(x_1)-f(x_0)$.

(2)计算平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.

3. 平均变化率的几何意义和物理意义

几何意义	物理意义
平均变化率表示函数 $y=f(x)$图象上割线 P_1P_2 的斜率[其中 $P_1(x_1,f(x_1))$,$P_2(x_2,f(x_2))$],即 $k_{P_1P_2}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$	平均变化率的物理意义是把位移 s 看成时间 t 的函数 $s=s(t)$在时间段$[t_1,t_2]$内的平均速度,即 $\bar{v}=\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$

典型题解 dianxingti jie

题型1　求函数值的增量

例1　求曲线 $y=x^3+\ln x$ 上 x 从1到2的函数值的增量.

[解析]　本例主要考查对函数值的增量概念的理解,分别求出$f(2)$及 $f(1)$,用 $f(2)-f(1)$即可求解.

[答案]　令 $f(x)=x^3+\ln x$,

则 $\Delta y=f(2)-f(1)=8+\ln 2-(1+\ln 1)=7+\ln 2$,

即函数值的增量为 $7+\ln 2$.

[点评] 函数值的增量的计算方法是将变化后的函数值减去变化前的函数值,即$f(x_2)-f(x_1)$.

[借题发挥1] 某物体的位移公式为$s=s(t)$,从t_0到$t_0+\Delta t$这段时间内,下列说法正确的是 ( )

A. $(t_0+\Delta t)-t_0$称为函数值的增量

B. t_0即为函数值的增量

C. $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$称为函数值的增量

D. $\frac{\Delta s}{\Delta t}$称为函数值的增量

题型2 函数的平均变化率的求法

例2 求函数$f(x)=x^3$在x_0到$x_0+\Delta x$之间的平均变化率,并计算当$x_0=1,\Delta x=\frac{1}{2}$时平均变化率的值.

[解析] 本例主要考查求函数的平均变化率问题,解答本题应先求出平均变化率的表达式,再直接代入数据即可求解.

[答案] 当函数$f(x)=x^3$的自变量从x_0变化到$x_0+\Delta x$时,函数的平均变化率为$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0^3}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2$. 当$x_0=1,\Delta x=\frac{1}{2}$时,平均变化率的值为$3\times1^2+3\times1\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{19}{4}$.

[点评] 解答此类问题的关键是熟练掌握平均变化率的概念,只要求出平均变化率的表达式,它相应的值就很容易求出.

[借题发挥2] 试比较正弦函数$y=\sin x$的自变量x在0到$\frac{\pi}{6}$之间和$\frac{\pi}{3}$到$\frac{\pi}{2}$之间变化时函数的平均变化率.

题型3 运动物体的平均速度

例3 已知自由落体运动的方程是$s=\frac{1}{2}gt^2$(s的单位:m,t的单位:s).求:

(1)物体在时刻t_0到$t_0+\Delta t$这段时间内的平均速度$\bar{v}$;

(2)物体在$t=10$ s到$t=10.1$ s这段时间内的平均速度.

[解析] 根据平均速度的计算公式,需要先求出Δs,再计算$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

[答案] (1)当t由t_0变化到$t_0+\Delta t$时,s的相应改变量是

$$\Delta s=\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2=gt_0\cdot\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2,$$

$$\therefore \bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{gt_0\cdot\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t}=gt_0+\frac{1}{2}g\cdot\Delta t,$$

即$\bar{v}=gt_0+\frac{1}{2}g\cdot\Delta t$.

(2)由(1)知,当$t_0=10$ s,$\Delta t=0.1$ s时,

所求平均速度为
$$\bar{v}=gt_0+\frac{1}{2}g\cdot\Delta t=g\cdot10+\frac{1}{2}g\cdot0.1=10.05g\ (\text{m/s}).$$

即物体在$t=10$ s到$t=10.1$ s这段时间内的平均速度为$10.05g$ m/s.

[点评] (1)如果物体的运动规律是$s=s(t)$,那么物体在t到$t+\Delta t$这段时间内的平均变化率就是物体在这段时间内的平均速度.

(2)对于同一个t值,Δt的值不同,则平均速度也不同,而当Δt的值由0.1,0.001,0.000 1,…趋向于0时,平均速度$\bar{v}$的值趋向于一个常数值$10g$ m/s.

[借题发挥3] 自由落体运动的运动方程是$s=\frac{1}{2}gt^2$(s的单位:m,t的单位:s).计算t从3 s到3.1 s,3.01 s,3.001 s各时间段内的平均速度.

提·升·训·练

1. 设函数$y=f(x)$,当自变量x由x_0改变到$x_0+\Delta x$时,函数值的改变量Δy是 ( )

A. $f(x_0+\Delta x)$　　B. $f(x_0)+\Delta x$

C. $f(x_0)-\Delta x$　　D. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

2. 某物体的位移公式是$s=s(t)$,则该物体在t_0到$t_0+\Delta t$这段时间内的平均速度是 ( )

A. $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$

B. $\bar{v}=\frac{s(\Delta t)}{\Delta t}$

C. $\bar{v}=\frac{s(t_0)}{t_0}$

D. $\bar{v}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(\Delta t)}{\Delta t}$

3. 在曲线 $y=x^2+1$ 的图象上取一点(1,2)及附近一点($1+\Delta x,2+\Delta y$),则$\frac{\Delta y}{\Delta x}$等于 (　　)

A. $\Delta x+\frac{1}{\Delta x}+2$　　B. $\Delta x-\frac{1}{\Delta x}-2$

C. $\Delta x+2$　　D. $2+\Delta x-\frac{1}{\Delta x}$

4. 质点运动规律的方程是 $s=t^2+3$,则在时间$[3,3+\Delta t]$内,相应的平均速度是 (　　)

A. $6+\Delta t$　　B. $6+\Delta t+\frac{9}{\Delta t}$

C. $3+\Delta t$　　D. $9+\Delta t$

5. 函数 $y=x^2$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率为 k_1,在 $x_0-\Delta x$ 到 x_0 之间的平均变化率为 k_2,则 k_1、k_2 的大小关系为 (　　)

A. $k_1>k_2$　　B. $k_1<k_2$

C. $k_1=k_2$　　D. 不能确定

6. 函数 $y=f(x)=2x^3-x$ 在区间[1,3]上的平均变化率为________.

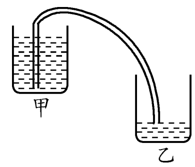
7. 质点运动规律的方程是 $s=2t^2+1$,则质点在时间$[1,1+\Delta t]$内,位移的平均变化率为______________.

8. 已知曲线 $y=x^2-1$ 上两点 $A(2,3)$ 和 $B(2+\Delta x,3+\Delta y)$,当 $\Delta x=1$ 时,直线 AB 的斜率是__________;当 $\Delta x=0.1$ 时,直线 AB 的斜率是________.

9. 如果一个质点关于时间 t 的位移函数是 $y=f(t)=t^3+3$,当 $t_0=4$ 且 $\Delta t=0.01$ 时,求 Δy 和$\frac{\Delta y}{\Delta t}$.

10. 设质点作直线运动,已知路程 s 是时间 t 的函数,$s=3t^2+2t+1$.求质点从 $t=2$ 到 $t=2+\Delta t$ 的平均速度,并求当 $\Delta t=1$,$\Delta t=0.1$ 与 $\Delta t=0.01$ 时的平均速度.

11. 水经过吸管从容器甲流向容器乙(如图所示),t s后容器甲中水的体积 $V(t)=5e^{-0.1t}$(单位:cm^3),计算第一个10 s内 V 的平均变化率.



(第11题)

1.1.2　导数的概念

——自·主·探·究——

课标导学 kebiaodaoxue

1. 了解瞬时速度与瞬时变化率的关系,知道瞬时变化率就是导数.

2. 理解函数在某点处的导数定义.

3. 理解函数在某点处的导数与导函数的区别与联系.

4. 体会从有限到无限的逼近思想.

基础梳理
jichushuli

1. 瞬时速度

作变速直线运动的物体在不同时刻的速度是不同的，我们把物体在________的速度叫瞬时速度，用数学语言描述为：设物体运动的路程与时间的关系式是 $s=s(t)$，函数 $s(t)$ 在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 之间的平均变化率为____________，当 Δt 趋近于 0 时，$\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$趋近于一个______，我们把这个______称为 t_0 时刻的瞬时速度，即当 $\Delta t\to 0$ 时，$\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$的极限值是 $\bar{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=$____________.

2. 瞬时变化率

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 及附近有定义，当自变量 x 在 x_0 附近的改变量为 Δx 时，函数值相应的改变量 $\Delta y=$________，若当 $\Delta x\to 0$ 时，平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}=$____________趋近于一个常数值 a，则称常数 a 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的________.

3. 导数的概念

一般地，函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，

我们称它为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数. 记作________或________，即 $f'(x_0)=$________ $=$________.

【参考答案】

1. 某一时刻　$\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$　常数　常数

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$

2. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$　$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$　瞬时变化率

3. $f'(x_0)$　$y'|_{x=x_0}$　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

重·难·点·突·破

疑难剖析
yinanpouxi

1. 求函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数的步骤

(1)求函数值的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

(2)求平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(3)取极限，得导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

2. 对导数概念的理解

在某点处的导数即为函数在该点的瞬时变化率，有以下两层含义：

(1)若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$存在，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导并且导数即为极限值；

(2)若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$不存在，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导.

注意：令 $x=x_0+\Delta x$，得 $\Delta x=x-x_0$，于是 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$与定义中的 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$意义相同.

典型题解
dianxingtijie

题型1　求瞬时速度

例 1　已知自由落体的运动方程为 $s=\frac{1}{2}gt^2$，求：

(1)物体在 t_0 时的瞬时速度；

(2)物体在 $t_0=2$ s 时的瞬时速度(其中 $g\approx 9.8$ m/s²).

[解析]　本例主要考查求运动物体的瞬时速度问题，先求出 Δs，再利用概念求当 $\Delta t\to 0$ 时，$\frac{\Delta s}{\Delta t}$的极限值.

[答案]　(1)$\because\ \Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$

$$=\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2,$$

$$\therefore\ \frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{\Delta t}=\frac{1}{2}g\frac{\Delta t(2t_0+\Delta t)}{\Delta t}$$

$$=\frac{1}{2}g(2t_0+\Delta t),$$

$$\therefore\ v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}g(2t_0+\Delta t)=gt_0(\mathrm{m/s}).$$

(2)由(1)知物体在 $t_0=2$ s 的瞬时速度为

$v=2g\approx 2\times 9.8=19.6$(m/s).

[点评]　瞬时速度即是平均速度 $\bar{v}$ 在 $\Delta t\to 0$ 时的极限值，因此，要求瞬时速度，应先求出平均速度，再求平均速度 $\bar{v}$ 在 $\Delta t\to 0$ 时的极限值.

[借题发挥 1]　质点 M 按规律 $s(t)=at^2+1$ 作直线运动(s 的单位：m，t 的单位：s). 若质点 M 在 $t=2$ s 时的瞬时速度为8 m/s，求 a 的值.

题型2 求函数的导数

例2 求函数 $y=f(x)=2x^2+4x$ 在 $x=3$ 处的导数.

［解析］ 本例主要考查求函数 $f(x)$ 在某点处的导数问题，可先求 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$，再求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 即可.

［答案］ $\because \Delta y=2(3+\Delta x)^2+4(3+\Delta x)-(2\times 3^2+4\times 3)$
$=12\Delta x+2(\Delta x)^2+4\Delta x$
$=2(\Delta x)^2+16\Delta x$,

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2(\Delta x)^2+16\Delta x}{\Delta x}=2\Delta x+16.$

$\therefore y'|_{x=3}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2\Delta x+16)=16.$

［点评］ 求函数在某点处的导数可以分为以下三个步骤：

(1)计算 Δy；

(2)计算 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$；

(3)计算 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

可简记一差、二比、三极限.

［借题发挥2］ 已知函数 $y=f(x)=ax^2+c$，且 $f'(1)=2$，求 a 的值.

题型3 导数在实际问题中的应用

例3 子弹在枪筒中的运动可以看作匀加速直线运动，如果它的加速度 $a=5\times 10^5\ \mathrm{m/s^2}$，子弹从枪口射出时所用的时间为 1.6×10^{-3} s. 求子弹射出枪口时的瞬时速度.

［解析］ 本例考查导数在实际问题中的应用. 由物理学知识得子弹在枪筒中的运动方程为 $s=\frac{1}{2}at^2$，本题实质是求子弹在 $t_0=1.6\times 10^{-3}$s 时的瞬时速度.

［答案］ 设子弹在枪筒中的运动方程为 $s=s(t)=\frac{1}{2}at^2$，

$\because \Delta s=\frac{1}{2}a(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}at_0^2=at_0\Delta t+\frac{1}{2}a(\Delta t)^2$，

$\therefore \frac{\Delta s}{\Delta t}=at_0+\frac{1}{2}a\Delta t.$

$\therefore \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=at_0.$

由题意，知 $a=5\times 10^5\mathrm{m/s^2}$，$t_0=1.6\times 10^{-3}$s，

$\therefore at_0=8\times 10^2=800(\mathrm{m/s})$，

即子弹射出枪口时的瞬时速度为 800 m/s.

［点评］ 在物理中，位移的平均变化率的极限就是瞬时速度.

［借题发挥3］ 一个质量为 10 kg 的物体按照 $s=3t^2+t+4$（s 的单位：m，t 的单位：s）的规律作直线运动，物体的动能为 $E=\frac{1}{2}mv^2$，求第 4 s 时该物体的动能.

提·升·训·练

1. 设 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，且 $f'(x_0)=-2$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$ 等于 （　　）

A. 0　　B. 2　　C. -2　　D. 不存在

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}$ （　　）

A. 等于 $f'(1)$　　B. 不存在　　C. 等于 $\frac{1}{3}f'(1)$　　D. 以上都不对

3. 如果某物体的运动方程为 $s=2(1-t^2)$（s 的单位：m，t 的单位：s），那么其在 1.2 s 时的瞬时速度为 （　　）

A. -0.88 m/s　　B. 0.88 m/s　　C. -4.8 m/s　　D. 4.8 m/s

4. 已知曲线 $y=2x^2+1$ 在点 P 处的瞬时变化率为 -4，则点 P 的坐标是 （　　）

A. (1,3)　　B. $(-4,33)$　　C. $(-1,3)$　　D. 不确定

5. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x}$，若 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则 x_0 等于 （　　）

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. -2

6. 若物体运动曲线的方程是 $s=-t^2+3t+2$，则物体的初速度是________.

7. 若一物体的运动方程是 $s=t^{-\frac{1}{2}}$，则当 $t=$________时，瞬时速度为 $-\frac{1}{16}$.

8. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$，则 $f'(1)=$________.

9. 对于函数 $y=x^2$，其导数值等于原来函数值的点的坐标是________.

10. 利用导数的定义求函数 $f(x)=\sqrt{x+2}$ 在 $x=2$ 处的导数.

11. 若函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数为 m,求:

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{\Delta x}$;

(2) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+4t)-f(a+5t)}{t}$.

12. 若一物体运动方程如下(s 的单位:m,t 的单位:s):

$$s=\begin{cases}3t^2+2 & (t\geqslant 3),\\ 29+3(t-3)^2 & (0\leqslant t<3).\end{cases}$$ 求:

(1)物体在 $t\in[3,5]$ 内的平均速度;

(2)物体的初速度 v_0;

(3)物体在 $t=1$ 时的瞬时速度.

1.1.3 导数的几何意义

自·主·探·究

课标导学 kebiaodaoxue

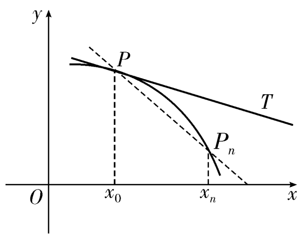
1. 进一步了解导数产生的背景,感受极限思想.

2. 理解导数的几何意义.

3. 掌握曲线的切线概念,理解切线斜率的含义和求法.

基础梳理 jichushuli

1. 已知曲线 $y=f(x)$ 上的两点 $P(x_0,f(x_0))$ 和 $P_n(x_n,f(x_n))$.(如图所示)



(1)当点 P_n 沿着曲线 $f(x)$ 趋近于点________时,割线 PP_n 趋近于确定位置,这个确定位置的________称为点 P 处的切线.

(2)割线 PP_n 的斜率是 $k_n=$________. 当点 P_n 无限趋近于点 P,即 $x_n\to$________时,k_n 无限趋近于________.

2. 导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是曲线 $y=f(x)$ 在点__________处的切线的斜率,即 $k=$____________.

3. 导函数

从求函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处导数的过程可以看到,当 $x=x_0$ 时,$f'(x_0)$ 是一个________. 这样,当 x 变化时,$f'(x)$ 便是 x 的一个________,我们称它为 $f(x)$ 的导函数(简称导数). $y=f(x)$ 的导函数有时也记作____________,即 $f'(x)=y'=$______________.

【参考答案】

1. (1)P　直线 PT　(2)$\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$　x_0　切线 PT 的斜率 k

2. $(x_0,f(x_0))$　$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

3. 确定的数　函数　y'　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

重·难·点·突·破

疑难剖析
yinanpouxi

1. 函数平均变化率的几何意义以及函数导数的几何意义

(1)函数 $y=f(x)$ 的平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$,实际上是过曲线上两点 $(x_1,f(x_1))$ 和 $(x_2,f(x_2))$ 的直线的斜率;而导数是指当 $\Delta x\to 0$ 时平均变化率的极限,即 Δx 越小,任意两点的连线越趋近于一点处的切线.

(2)函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导,其导数即为过该点的切线的斜率;若在 x_0 处不可导,其斜率不存在,但并非不存在过该点的切线,例如切线垂直于 x 轴时;导数的物理意义是:若物体的运动方程是 $s=s(t)$,则函数 $s=s(t)$ 在点 $P(t_0,s(t_0))$ 处的导数就是物体在该点处的速度.

(3)由导数的几何意义知,$f'(x_0)=k=\tan\alpha$(其中 k 为曲线上一点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率,α 为切线的倾斜角),

当 $f'(x_0)>0$ 时,切线的倾斜角为锐角;

当 $f'(x_0)<0$ 时,切线的倾斜角为钝角;

当 $f'(x_0)=0$ 时,切线与 x 轴平行;

当 $f'(x_0)$ 不存在时,切线与 y 轴平行.

2. 利用导数求曲线的切线方程的步骤

根据导数的几何意义,可以用函数的导数求出曲线的切线的斜率,进而求出切线方程,具体步骤是:

(1)求出函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)=k$.

(2)根据直线的点斜式方程,得到函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的切线方程是:$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

注意:若在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$,此时切线平行于 y 轴,导数不存在,不能用上述方法求切线方程,可根据切线的定义直接得出切线方程是 $x=x_0$.

3. "函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数""导函数""导数"三者之间的区别与联系

(1)"函数 $f(x)$ 在一点处的导数":在该点的函数值的改变量与自变量的改变量的比的极限. 它是一个数值,不是变数.

(2)"导函数":如果对于函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一个确定的值 x_0,都对应着一个导数 $f'(x_0)$,这样就在开区间 (a,b) 内构成一个新的函数,我们把这一新函数叫做 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的导函数,简称导数,记作 $f'(x)$ 或 y'. 即 $f'(x)=y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

(3)导函数也简称导数.

所以"导数" $\begin{cases} f(x)\text{ 在一点 } x_0 \text{ 处的导数} \\ \text{导函数} \end{cases}$ 个别与一般

(4)函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值,即 $f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$. 所以求函数在一点处的导数,一般是先求出该函数的导函数,再计算这点的导函数值.

典型题解
dianxingti jie

题型1 求切线方程

例1 已知曲线 $C:y=x^3$,求曲线 C 上横坐标为 2 的点的切线方程.

[**解析**] 本例考查求曲线在某点的切线方程问题,先求出切点坐标,再利用导数的定义求出斜率,利用点斜式方程求出.

[**答案**] 将 $x=2$ 代入曲线 C 的方程,得 $y=8$,

$\therefore$ 切点 $P(2,8)$.

$$\because y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\cdot\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2]=3x^2,$$

$\therefore y'\big|_{x=2}=12$,

$\therefore$ 过 P 点的切线方程为 $y-8=12(x-2)$,

即 $12x-y-16=0$.

[**点评**] 求曲线在某点的切线方程,首先根据导数的定义求出曲线在该点处切线的斜率,即函数在该点处的导数值,然后利用点斜式方程写出切线方程.

[**借题发挥1**] 已知曲线 $y=f(x)=x+\frac{1}{x}$ 上一点 $A\left(2,\frac{5}{2}\right)$,求:

(1)点 A 处的切线的斜率;

(2)点 A 处的切线方程.

例2 已知曲线 $C:y=x^2-1$,求过点$(1,-1)$的切线方程.

[**解析**] 本例考查求过曲线外一点的切线方程问题,应先设出切点,再利用斜率求出切点坐标,最后得出切线方程.

[**答案**] 根据题意,知点$(1,-1)$在曲线 $y=x^2-1$ 外,设切点坐标为(x_0,y_0),则

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-1-(x_0^2-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+2x_0\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x_0)=2x_0.$$

$\therefore \frac{y_0+1}{x_0-1}=2x_0$, ①

又 $y_0=x_0^2-1$, ②

由①②,解得$\begin{cases}x_0=0,\\y_0=-1\end{cases}$或$\begin{cases}x_0=2,\\y_0=3.\end{cases}$

$\therefore$ 切点坐标为$(0,-1)$或$(2,3)$.

当切点为$(0,-1)$时,斜率 $k=0$,

$\therefore$ 切线方程为 $y+1=0(x-0)$,即 $y=-1$.

当切点为$(2,3)$时,斜率 $k=2x_0=4$,

$\therefore$ 切线方程为 $y-3=4(x-2)$,即 $4x-y-5=0$.

$\therefore$ 所求切线方程为 $y=-1$ 或 $4x-y-5=0$.

[**点评**] 利用导数求过曲线外一点的切线方程的步骤:

(1)设切点坐标为$(x_0,f(x_0))$;

(2)求出函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$,即为切线的斜率;

(3)由斜率公式,求出已知点与切点连线的斜率 k;

(4)解方程 $k=f'(x_0)$,求得 x_0,进而得到切点坐标与所求切线的斜率;

(5)根据直线的点斜式方程写出所求切线的方程.

[**借题发挥2**] 已知曲线 $C:y=x^3$,求过点$(2,4)$的曲线的切线方程.

题型2 求曲线上点(或切点)的坐标

例3 已知抛物线 $y=2x^2+1$,求:

(1)抛物线上哪一点的切线的倾斜角为45°?

(2)抛物线上哪一点的切线平行于直线 $4x-y-2=0$?

(3)抛物线上哪一点的切线垂直于直线 $x+8y-3=0$?

[**解析**] 本例主要考查利用导数求切点坐标问题.首先设出切点坐标,求出在该点处的导数,利用已知条件建立方程,即可求解.

[**答案**] 设点的坐标为(x_0,y_0),则

$\Delta y=2(x_0+\Delta x)^2+1-2x_0^2-1=4x_0\cdot\Delta x+2(\Delta x)^2$.

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=4x_0+2\Delta x$.

$\therefore f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(4x_0+2\Delta x)=4x$.

(1)$\because$ 抛物线的切线的倾斜角为45°,

$\therefore$ 斜率为 $\tan 45°=1$,

即 $f'(x_0)=4x_0=1$,$\therefore x_0=\frac{1}{4}$.

$\therefore$ 该点为$\left(\frac{1}{4},\frac{9}{8}\right)$.

(2)$\because$ 抛物线的切线平行于直线 $4x-y-2=0$,

$\therefore$ 切线的斜率为4,

即 $f'(x_0)=4x_0=4$,$\therefore x_0=1$.

$\therefore$ 该点为$(1,3)$.

(3)$\because$ 抛物线的切线与直线 $x+8y-3=0$ 垂直,

$\therefore$ 斜率为8,

即 $f'(x_0)=4x_0=8$,$\therefore x_0=2$.

$\therefore$ 该点为$(2,9)$.

[**点评**] 解答此类题目时,所给的直线的倾斜角或斜率是解题的关键,由这些信息得知函数在某点处的导数,进而可求该点的横坐标.解题时要注意解析几何知识的应用,如直线的倾斜角与斜率的关系,两直线平行、垂直时斜率之间的关系等.

[**借题发挥3**] 已知曲线 $C:y=x^3$.

(1)求曲线 C 上横坐标为1的点处的切线方程;

(2)第(1)小题中的切线与曲线 C 是否还有其他公共点?

题型3 导数几何意义的综合应用

例4 设函数$f(x)=x^3+ax^2-9x-1(a<0)$,若曲线$y=f(x)$的斜率最小的切线与直线$12x+y=6$平行,求a的值.

[**解析**] 本例主要考查导数几何意义的综合应用问题,首先求出斜率即导数$f'(x_0)$的表达式,然后利用二次函数图象求得其最小值,从而建立等量关系,即可求解.

[**答案**] $\because \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^3+a(x_0+\Delta x)^2-9(x_0+\Delta x)-1-(x_0^3+ax_0^2-9x_0-1)=(3x_0^2+2ax_0-9)\Delta x+(3x_0+a)(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$,

$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=3x_0^2+2ax_0-9+(3x_0+a)\Delta x+(\Delta x)^2$,

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[3x_0^2+2ax_0-9+(3x_0+a)\Delta x+(\Delta x)^2]$

$=3x_0^2+2ax_0-9$,

即$f'(x_0)=3x_0^2+2ax_0-9$.

$\therefore f'(x_0)=3\left(x_0+\dfrac{a}{3}\right)^2-9-\dfrac{a^2}{3}$.

当$x_0=-\dfrac{a}{3}$时,$f'(x_0)$取最小值$-9-\dfrac{a^2}{3}$.

$\because$斜率最小的切线与$12x+y=6$平行,

$\therefore$该切线的斜率为-12.

$\therefore -9-\dfrac{a^2}{3}=-12$,解得$a=\pm 3$.

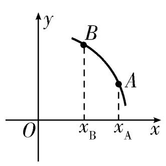
又$\because a<0$,$\therefore a=-3$.

[**点评**] 解答导数几何意义的应用题目的关键是对函数进行求导,利用题目所提供的诸如斜率的线性关系、斜率的最值、斜率的范围等关系求解相关问题.此处常与函数、不等式等知识点结合.

[**借题发挥4**] 若抛物线$y=4x^2$上的点P到直线$y=4x-5$的距离最短,求点P的坐标.

提·升·训·练

1. 已知函数$y=f(x)$的图象如图所示,则$f'(x_A)$与$f'(x_B)$的大小关系是 ( )



(第1题)

A. $f'(x_A)>f'(x_B)$　B. $f'(x_A)<f'(x_B)$

C. $f'(x_A)=f'(x_B)$　D. 不能确定

2. 曲线$y=\dfrac{1}{2}x^2-2$在点$\left(1,-\dfrac{3}{2}\right)$处的切线倾斜角为 ( )

A. 1　B. $\dfrac{\pi}{4}$

C. $\dfrac{5\pi}{4}$　D. $-\dfrac{\pi}{4}$

3. 设曲线$y=x^2+x-2$在点M处的切线斜率为3,则点M的坐标为 ( )

A. $(0,-2)$　B. $(1,0)$

C. $(0,0)$　D. $(1,1)$

4. 已知抛物线$y=-2x^2+bx+c$在点$(2,-1)$处与直线$y=x-3$相切,则$b+c$的值为 ( )

A. 20　B. 9　C. -2　D. 2

5. 若曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程为$2x+y-1=0$,则 ( )

A. $f'(x_0)>0$　B. $f'(x_0)<0$

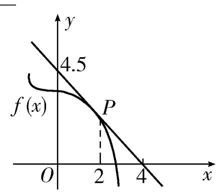
C. $f'(x_0)=0$　D. $f'(x_0)$不存在

6. 已知直线$y=kx+1$与曲线$y=x^3+ax+b$相切于点$(1,3)$,则b的值为 ( )

A. 3　B. -3　C. 5　D. -5

7. 曲线$y=f(x)=x^3+x-2$在P点处的切线平行于直线$y=4x-1$,则此切线方程为________.

8. 如图所示是函数$f(x)$与$f(x)$在点P处切线的图象,则$f(2)+f'(2)=$________.



(第8题)

9. (1)已知曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 上的一点 $P(0,0)$,求过点 P 的切线方程;

(2)求过点(2,0)且与曲线 $y=\frac{1}{x}$ 相切的直线的方程.

10. 已知直线 l_1 为曲线 $y=x^2+x-2$ 在点(1,0)处的切线,l_2 为该曲线的另一条切线,且 $l_1\perp l_2$.

(1)求直线 l_2 的方程;

(2)求由直线 l_1、l_2 和 x 轴所围成的三角形的面积.

1.2 导数的计算

1.2.1 几个常用函数的导数

自·主·探·究

课标导学
kebiaodaoxue

1. 能根据导数的定义求常用函数 $y=c$(c 为常数),$y=x$,$y=x^2$,$y=x^3$,$y=\frac{1}{x}$,$y=\sqrt{x}$ 的导数.

2. 掌握并熟记这几种常见函数的求导公式.

3. 会用以上求导公式解决相关问题.

基础梳理
jichushuli

常用函数的导数:

(1)函数 $y=f(x)=c$ 的导数:$y'=f'(x)=$ ________.

(2)函数 $y=f(x)=x$ 的导数:$y'=f'(x)=$ ________.

(3)函数 $y=f(x)=x^2$ 的导数:$y'=f'(x)=$ ________.

(4)函数 $y=f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数:$y'=f'(x)=$ ________.

(5)函数 $y=f(x)=\sqrt{x}$ 的导数:$y'=f'(x)=$ ________.

【参考答案】

(1)0

(2)1

(3)$2x$

(4)$-\frac{1}{x^2}$

(5)$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

重·难·点·突·破

疑难剖析
yinanpouxi

1. 函数 $y=f(x)=c$ 的导数为 $y'=0$ 的几何意义是函数 $y=c$ 图象上每一点处的切线的斜率都为 0;若 $y=c$ 表示路程关于时间的函数,则 $y'=0$ 可以解释为某物体的瞬时速度始终为 0,即物体始终处于静止状态.

2. 函数 $y=f(x)=x$ 的导数为 $y'=1$ 的几何意义是函数 $y=x$ 图象上每一点处的切线的斜率都为 1;若 $y=x$ 表示路程关于时间的函数,则 $y'=1$ 可以解释为某物体作瞬时速度为 1 的匀速运动.

3. 函数 $y=f(x)=x^2$ 的导数为 $y'=2x$ 的几何意义是函数 $y=x^2$ 图象上点 (x,y) 处的切线的斜率为 $2x$,说明随着曲线上点的变化,相应的切线的斜率也变化,当 $x<0$ 时,$y'<0$,图象有下降趋势,当 $x=0$ 时,$y'=0$,点为图象的最低点,当 $x>0$ 时,$y'>0$,图象有上升趋势;若 $y=x^2$ 表示路程关于时间的函数,则 $y'=2x$ 可以解释为某物体作变速运动,且它在时刻 x 的瞬时速度是 $2x$.

4. 函数 $y=f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数为 $y'=-\frac{1}{x^2}<0$,说明双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 上任意一点的切线斜率都为负值,不论 $x>0$ 或 $x<0$,函数的图象都有下降的趋势.

5. 在推导函数 $y=\sqrt{x}$ 导数的公式时,注意推导过程中的变形技巧:分子有理化.由 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 可知,当 $x=0$ 时,y' 不存在;当 $x>0$ 时,$y'>0$,图象有上升的趋势.

典型题解
dianxingtijie

题型1 求曲线的切线方程

例1 已知曲线 $y=\sqrt{x}$,求:

(1)曲线上与直线 $y=2x-4$ 平行的切线方程;

(2)求过点 $P(0,1)$ 且与曲线相切的切线方程.

[解析] 本例主要考查求曲线的切线方程问题,涉及到幂函数的导数应用问题.对于(1),由函数 $y=\sqrt{x}$ 的导数,可得到曲线 $y=\sqrt{x}$ 的切线的斜率,进而可得相应切点的坐标,易求得切线方程;对于(2),设出切点坐标,利用切点在对应切线上,也在曲线上,进而求得切点坐标和相应切线的斜率.

[答案] (1)设切点为(x_0,y_0),由 $y=\sqrt{x}$,得 $y'\big|_{x=x_0}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

$\because$ 切线与 $y=2x-4$ 平行,

$\therefore \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}=2$,$\therefore x_0=\dfrac{1}{16}$,$\therefore y_0=\dfrac{1}{4}$.

则所求切线方程为 $y-\dfrac{1}{4}=2\left(x-\dfrac{1}{16}\right)$,

即 $16x-8y+1=0$.

(2)点 $P(0,1)$ 不在曲线 $y=\sqrt{x}$ 上,

故需设切点坐标为 $M(t,u)$,则切线斜率为$\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$.

又$\because$ 切线斜率为$\dfrac{u-1}{t}$,$\therefore \dfrac{1}{2\sqrt{t}}=\dfrac{u-1}{t}=\dfrac{\sqrt{t}-1}{t}$,

$\therefore 2t-2\sqrt{t}=t$,得 $t=4$ 或 $t=0$(舍去).

$\therefore$ 切点为 $M(4,2)$,斜率为$\dfrac{1}{4}$,

$\therefore$ 切线方程为 $y-2=\dfrac{1}{4}(x-4)$,即 $x-4y+4=0$.

[点评] (1)求过点 P 的切线方程时应注意 P 点在曲线上还是曲线外,两种情况的解法是不同的.(2)解决此类问题应充分利用切点满足的三个关系:一是切点坐标满足曲线方程;二是切点坐标满足对应切线的方程;三是切线的斜率是曲线在此切点处的导数值.

[借题发挥1] 已知点 $P(-1,1)$,点 $Q(2,4)$ 是曲线 $y=x^2$ 上的两点,求与直线 PQ 垂直的曲线 $y=x^2$ 的切线方程.

题型2 函数求导的证明问题

例2 求证:双曲线 $xy=1$ 上任意一点处的切线与坐标轴构成的三角形的面积为常数.

[解析] 根据题意需要求出曲线在任一点处的切线方程(设切点并用导数求斜率),然后求出切线与坐标轴形成的三角形的两条直角边长,再计算面积即可.

[答案] 由 $xy=1$,得 $y=\dfrac{1}{x}$.

$\therefore y'=-\dfrac{1}{x^2}$,在双曲线 $xy=1$ 上任取一点 $P\left(x_0,\dfrac{1}{x_0}\right)$,则过点 P 的切线的斜率是 $k=-\dfrac{1}{x_0^2}$,

$\therefore$ 切线方程是 $y-\dfrac{1}{x_0}=-\dfrac{1}{x_0^2}(x-x_0)$,

即 $y=-\dfrac{1}{x_0^2}\cdot x+\dfrac{2}{x_0}$,它与坐标轴的交点是 $A\left(0,\dfrac{2}{x_0}\right)$,$B(2x_0,0)$,

$\therefore$ 形成的三角形的面积

$S=\dfrac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{2}{x_0}\right|\cdot|2x_0|=2$.

$\therefore$ 双曲线 $xy=1$ 上任意一点处的切线与坐标轴构成的三角形的面积为常数.

[点评] 挖掘题中的隐含条件:(1)切线与坐标轴形成的三角形为直角三角形,求出两条直角边的边长即可计算面积;(2)直线在坐标轴上的截距的绝对值就是两条直角边的边长.

[借题发挥2] 已知曲线 S:$y=x^3-6x^2-x+6$.

(1)曲线在哪一点处的切线的斜率取得最小值?并求此时的切线方程;

(2)设(1)中的点是 $P(x_0,y_0)$,求证:曲线 S 关于点 P 中心对称.

题型3 导数的实际应用

例3 将石块投入平静的水面,使它产生同心圆波纹,若最外一圆波纹的半径 R 以 6 m/s 的速度增大,求在 2 s 末被扰动水面面积的增长率.

[解析] 要求在 2 s 末被扰动水面面积的增长率,就是求面积 S 对时间 t 的导数在 $t=2$ s 时的值,为此需建立面积 S 与时间 t 的函数关系式.

[答案] 设被扰动水面面积为 $S(t)$,时间为 t,根据题意,得

$S(t)=\pi R^2=36\pi t^2$,

$\therefore S'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{36\pi(t+\Delta t)^2-36\pi t^2}{\Delta t}$

$=72\pi t$,

当 $t=2$ s 时,$S'(2)=144\pi$.

即在 2 s 末被扰动水面面积的增长率是 144π.

[点评] 本题是导数在实际问题中的应用,解答此类问题的关键是要明确增长率的含义,列出一个变量关于另一个变量的函数,再求导即可.

[借题发挥3] 质点的运动方程是 $s=\sqrt{t}$(s 的单位:m,t 的单位:s),求质点在 $t=8$ s 时的速度.

提·升·训·练

1. 满足$f(x)=f'(x)$的函数是 ( )

A. $f(x)=1$ B. $f(x)=0$

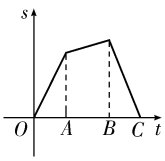
C. $f(x)=x$ D. $f(x)=1-x$

2. 抛物线$y=x^2$在点P处的切线平行于$y=4x-5$,则P点的坐标是 ( )

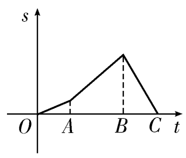
A. $(2,4)$ B. $\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ D. $(-2,4)$

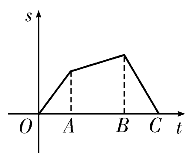
3. 物体运动的图象(t的单位:s,s的单位:m)如图所示,则其导函数的图象大致为 ( )



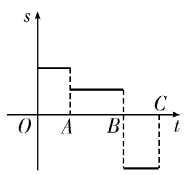
(第3题)



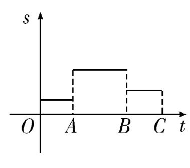
A



B



C



D

4. 函数$y=\frac{1}{x}$在点$A(1,1)$处的切线方程是 ( )

A. $x+y-2=0$ B. $x-y+2=0$

C. $x+y+2=0$ D. $x-y-2=0$

5. 曲线$y=x^2$在点P处的切线的倾斜角为$\frac{\pi}{3}$,则P点的坐标是 ( )

A. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi^2}{9}\right)$ B. $(\sqrt{3},3)$

C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{4}\right)$ D. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{4}\right)$

6. 曲线$y=x^2$上过点$M(2,4)$的切线与坐标轴围成的三角形的面积是________.

7. 质点运动的方程是$s=\frac{1}{t}$,则质点在$t=6$时的速度为________.

8. 已知函数$f(x)=x^2$,$g(x)=\sqrt{x}$,解关于x的方程$f'(x)-2=6x\cdot g'(x)$.

9. 已知直线$x+2y-4=0$与抛物线$y^2=4x$相交于A、B两点,O是坐标原点,试在抛物线的弧$\overset{\frown}{AOB}$上求一点P,使$\triangle ABP$的面积最大.