交大之星

新华传媒
XINHUA MEDIA

与上海二期课改教材配套

读交大之星　圆名校之梦

高中数学
重点难点18讲

18

华东师大二附中
王　平 王海霞 编著

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

交大之星

高中数学

重点难点 18 讲

王　平　王海霞　编著

上海交通大学

内 容 提 要

本书从高中数学课程中，列出了重点难点18讲。每讲中有“重点难点”、“精例导读”和“效果验收”三部分。“重点难点”分条目阐述，易于掌握。“精例导读”是对例题加以精析，突出解题的思路。“效果验收”即是提供若干练习题，针对重点难点进行解题演练。本书还提供了综合复习冲刺的三套模拟测试题。

本书适用于高中阶段学习的师生。

图书在版编目(CIP)数据

高中数学重点难点18讲/王平，王海霞编著. —上海：上海交通大学出版社，2013
ISBN 978-7-313-10312-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王…②王… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第211012号

高中数学重点难点18讲

王 平 王海霞 编著

上海交通大学 出版社出版发行
(上海市番禺路951号 邮政编码200030)
电话：64071208 出版人：韩建民
上海宝山译文印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本：787mm×1092mm 1/16 印张：15.75 字数：379千字
2013年9月第1版 2013年9月第1次印刷
印数：1～4030
ISBN 978-7-313-10312-3/G 定价：30.00元

前　　言

进入高中以后，许多学生都以为高中数学"难学"。

有不少同学不能适应数学学习，进而影响到学习的积极性，甚至成绩一落千丈。出现这样的情况，原因是很多的。其实，只要把高中数学和初中数学加以区别，使这种区别在学习过程中体现，那么你已经成功了一半；成功的另一半则需要具备坚韧不拔的毅力，养成良好的数学学习习惯以及学习模式和找到帮助你释要解难的参考书。

本书就是这样一本涉及了高中数学所有的知识重点和难点的指导参考书，愿它能成为你成功的好帮手。

编　者

目　　录

第一篇　单元知识、方法梳理

第二篇　综合复习冲刺

第一篇

单元知识、方法梳理

第 1 讲　集合、命题、逻辑初步

重点难点

1. 能够准确描述集合中的元素，熟练运用集合的各种符号，如$\in$、$\subsetneqq$、$\subseteq$、$\not\supseteq$、$=$、$\complement_U$、$\cup$，$\cap$等。

2. 准确理解集合所描述的具体内容(即读懂问题中的集合)以及各个集合之间的关系，常常根据“文氏图”来加深对集合的理解，一个集合能化简(或求解)，一般应考虑先化简(或求解)。

3. 确定集合的“包含关系”与求集合的“交、并、补”是学习集合的中心内容，解决问题时应根据问题所涉及的具体的数学内容来寻求方法。

4. 会运用$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$，求有限集合的元素个数。

5. 理解命题的四种形式及其相互关系，理解推出关系及命题证明的意义。

6. 理解充分条件、必要条件与充要条件的含义，能够判断给定条件之间的关系。

精例导读

【例 1】 已知$A=\{-1,\ |1-a|\}$，$B=\{a-1,\ 2\}$。

(1) 若$A\cap B=\varnothing$，求实数a的取值范围；

(2) 若$A\cap B\supsetneqq\varnothing$，求实数$a$的取值范围；

(3) 若$A\cup B=\{-1,\ 2,\ a^2-3a+2\}$，求实数$a$的值。

〖解〗 (1) 因为$A\cap B=\varnothing$，

由交集定义可知：$|1-a|\neq a-1$，即$a-1<0$，$a<1$，又因为$|1-a|\neq 2$，

所以$a\neq 3$，$a\neq -1$；又因为$a-1\neq -1$，所以$a\neq 0$。

综上可知，实数a的取值范围是$\{a\mid a<1$，且$a\neq -1,\ 0\}$。

(2) 因为$A\cap B\supsetneqq\varnothing$

所以集合A，B有公共元素

则有　$-1=a-1$，即$a=0$；

或　$|1-a|=2$，$a=3$或$a=-1$；

或　$|1-a|=a-1$，即$a-1>0$，$a>1$。

但由于集合元素的无重复性，因此$a-1\neq 2$，即$a\neq 3$。

综上可知实数a的取值范围是$\{a\mid a>1$且$a\neq 3$或$a=0$或$a=-1,\ a\in\mathbf{R}\}$。

(3) 因为$A\cup B=\{-1,\ 2,\ a^2-3a+2\}$，则有

$$a^2-3a+2=a-1，即\ a^2-4a+3=0,\ a=1\ 或\ a=3;$$

$a=1$时，$A=\{-1,\ 0\}$，$B=\{0,\ 2\}$，满足$A\cup B=\{0,\ -1,\ 2\}=\{-1,\ 2,\ a^2-3a+2\}$。

$a=3$ 时，$a-1=2$，矛盾，因此 $a=3$ 舍去。

因此 $a=1$。

〖评注〗 在考虑集合之间关系时，容易出现考虑问题不全面，如本题中很容易认为(1)和(2)中 a 的范围恰好互补，而漏考虑集合中元素的无重复性的特征。

【例 2】 (1) $A=\{y \mid y=-x^2+3x-2,\ x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y \mid y=x^2-x,\ x\in\mathbf{R}\}$，求：$A\cap B$；

(2) $A=\{(x,\ y) \mid y=-x^2+3x-2,\ x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,\ y) \mid y=x^2-x,\ x\in\mathbf{R}\}$，求：$A\cap B$。

〖解〗 (1) $A\cap B=\left\{y \mid y=-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4},\ x\in\mathbf{R}\right\}\cap\left\{y \mid y=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4},\ x\in\mathbf{R}\right\}$

$$=\left\{y \mid y\leqslant\frac{1}{4}\right\}\cap\left\{y \mid y\geqslant-\frac{1}{4}\right\}=\left\{y \mid -\frac{1}{4}\leqslant y\leqslant\frac{1}{4}\right\}。$$

(2) $A\cap B=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \begin{cases}y=-x^2+3x-2\\ y=x^2-x\end{cases}\right\}=\{(1,\ 0)\}$。

〖评注〗 (1)、(2)中的集合，学生很容易将它们混淆。(1)注意命题中集合 A，B 的代表元素是“y”，真正读懂了它们，应理解为：A，B 是两个二次函数的值域的集合，它们都可以化简。命题(2)中集合 A，B 是两个二元二次方程解集的集合(或理解为平面坐标系中的两条抛物线的点集)，这两个集合不能化简。

【例 3】 设非空集合 $A=\{x \mid -1\leqslant x\leqslant a\}$，$P=\{y \mid y=x+1,\ x\in A\}$，$Q=\{y \mid y=x^2,\ x\in A\}$，试计算：

(1) 若 $Q\subseteq P$，求实数 a 的取值范围；

(2) 是否存在实数 a，使得 $P=Q$? 并说明理由。

〖解〗 (1) 因为 $P\{y \mid 0\leqslant y\leqslant a+1\}$，而 Q 中函数值必须分类讨论。

① 当 $-1\leqslant a<0$ 时，$Q=\{y \mid a^2\leqslant y\leqslant 1\}$，因为 $Q\subseteq P$，所以，$\begin{cases}a^2\geqslant 0,\\ 1\leqslant a+1;\end{cases}$ 矛盾；

② 当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时，$Q=\{y \mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$，因为 $Q\subseteq P$，所以，$1\leqslant a+1$，得 $0\leqslant a\leqslant 1$；

③ 当 $a>1$ 时，$Q=\{y \mid 0\leqslant y\leqslant a^2\}$，因为 $Q\subseteq P$，所以，$a^2\leqslant a+1$，得 $1<a\leqslant\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$；

故，实数 a 的取值范围是：$\left[0,\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$。

(2) 在(1)②中令 $a+1=1$ 得 $a=0$，此时 $P=Q=\{y \mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$；

在(1)③中令 $a+1=a^2$ 得 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，此时 $P=Q=\left\{y \mid 0\leqslant y\leqslant\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$；

故，存在实数 $a=0$ 或 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 使得 $P=Q$。

〖评注〗 根据集合中元素的数学意义，应将集合 P，Q 分别理解为一次函数与二次函数值域的集合，而它们的定义域均为集合 A。

【例 4】 某班有学生 60 名，其中报名参加课外数学兴趣小组的有 22 人，报名参加课外英语兴趣小组有 36 人，而这两个小组都没有报名参加的学生有 10 人，求同时报名参加这两

个小组活动的学生人数和恰报名参加其中一个小组活动的学生人数。

〖解〗 记参加数学小组的人为集合 A，参加英语小组的人为集合 B，由条件知

$$n(A)=22,\ n(B)=36,\ n(U)=60,$$

$$n(\complement_U A\cap\complement_U B)=10,\text{所以},n(A\cup B)=60-10=50,$$

因为 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$，

同时报名参加两个小组的人数为 $n(A\cap B)=22+36-50=8$(人)；

而恰报名参加其中一个小组的人数为 $n[(A\cap\complement_U B)\cup(B\cap\complement_U A)]=50-8=42$(人)。

〖评注〗 恰当地使用维恩图(见图 1-1)，有利于准确理解问题的意图，而找到解决问题的途径。

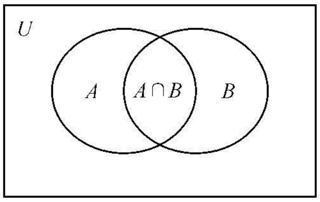

图 1-1

【例 5】 写出下述命题逆命题，否命题，逆否命题，并判断它们的真假。

(1) 若 $a\leqslant 0$，则方程 $x^2-2x+a=0$ 有实根；

(2) 乘积为奇数的两个整数都不是偶数。

〖解〗 (1) 逆命题：若方程 $x^2-2x+a=0$ 有实根，$a\leqslant 0$；

否命题：若 $a>0$，则方程 $x^2-2x+a=0$ 无实根；

逆否命题：若方程 $x^2-2x+a=0$ 无实根，则 $a>0$。

因为方程 $x^2-2x+a=0$ 有实根的充要条件是 $\Delta=4-4a\geqslant 0$，即 $a\leqslant 1$，而 $a\leqslant 0\Rightarrow a\leqslant 1$，

所以，原命题与逆否命题为真命题；

因为方程 $x^2-2x+a=0$ 有实根 $\Leftrightarrow a\leqslant 1$，而 $a\leqslant 1\Rightarrow a\leqslant 0$；所以，逆命题与否命题为假命题。

(2) 原命题可写成：若两个整数的乘积为奇数，则它们都不是偶数；

逆命题：若两个整数的乘积都不是偶数，则这两个整数的乘积为奇数；

否命题：若两个整数的乘积不为奇数，则这两个整数至少有一个是偶数；

逆否命题：若两个整数中至少有一个是偶数，则这两个整数的乘积不为奇数。

上述四种形式的命题都是真命题。

〖评注〗 如果一个命题不是“若 p 则 q“的形式，则应将它写成“若 p 则 q“的形式。学习命题的四种形式的难点是写出命题的否命题，需要同时否定命题的条件与结论，但对一些特殊的词句的否定需要积累经验，如上面第(2)小题中对“都不”的否定，许多学生都误认为是“不都”，这是错误的，“不都”是对“都”的否定。

【例 6】 命题甲：$x\neq 2$ 或 $y\neq 3$；命题乙：$x+y\neq 5$，则　(　　)

A．甲是乙的充分非必要条件

B．甲是乙的必要非充分条件

C．甲是乙的充要条件

D．甲既不是乙的充分条件，也不是乙的必要条件

〖解〗 只需判断下述两个命题是否是真命题：

(1) 如果“$x\neq 2$ 或 $y\neq 3$”那么“$x+y\neq 5$”，其逆否命题为：如果“$x+y=5$”那么

"$x=2$ 且 $y=3$" 显然不正确。

(2) 如果 "$x+y\neq 5$"，那么"$x\neq 2$ 或 $y\neq 3$"，其逆否命题为：如果 "$x=2$ 且 $y=3$" 那么"$x+y=5$" 显然为真命题。

故选择 B。

〖评注〗 本题虽然看上去是一个基本的不等量关系，但实质逻辑性很强，容易选错，解本题的关键：一是从反面入手，利用原命题与逆否命题的等价性，二是要对逻辑联结词"或""且"深刻理解与领悟。

【例 7】 求证：关于 x 的方程 $x^2+2ax+b=0$ 有实数根，且两根均小于 2 的充分但不必要条件是 $a\geqslant 2$ 且 $|b|\leqslant 4$。

〖解〗 先证充分性，而必要性只需要通过举反例来否定。先证明条件的充分性：

因为 $\begin{cases}a\geqslant 2\\ b\leqslant 4\end{cases}\Rightarrow a^2\geqslant 4\geqslant b$，

所以，$\Delta=4(a^2-b)\geqslant 0$，　　方程有实数根　　①

因为 $\begin{cases}a\geqslant 2\\ b\geqslant -4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a\leqslant -4,\\ b\geqslant -4;\end{cases}$

所以，$(x_1-2)+(x_2-2)=(x_1+x_2)-4=-2a-4\leqslant -4-4=-8<0$，

而 $(x_1-2)(x_2-2)=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4=b+4a+4\geqslant -4+8+4=8>0$，

$\begin{cases}(x_1-2)+(x_2-2)<0\\ (x_1-2)(x_2-2)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-2<0\\ x_2-2<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1<2,\\ x_2<2;\end{cases}$　　②

由①，②知 "$a\geqslant 2$ 且 $|b|\leqslant 4$" $\Rightarrow$ "方程有实数根，且两根均小于 2"。

再验证条件不必要：

因为方程 $x^2-x=0$ 的两根为 $x_1=0$，$x_2=1$，则方程的两根均小于 2，而 $a=-\dfrac{1}{2}<2$，

所以，"方程的两根小于 2" $\not\Rightarrow$ "$a\geqslant 2$ 且 $|b|\leqslant 4$"。

综上，$a\geqslant 2$ 且 $|b|\leqslant 4$ 是方程有实数根且两根均小于 2 的充分但不必要条件。

〖评注〗 充分条件与必要条件是数学学习中的重要概念，在解答任何一个数学问题时都必须准确认识到问题所需要解决的是满足条件的充分性、必要性，还是充分且必要。对于证明题、计算题等，往往只需满足命题条件的充分性，即由条件进行推理、演绎得出结论；而对于求参数的范围，求不等式的解集，求函数的值域等许多问题，则必须保证推理的充要性。

【例 8】 已知集合 $A=\{t\mid t$ 使 $\{x\mid x^2+2tx-4t-3\neq 0\}=\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{t\mid t$ 使 $\{x\mid x^2+2tx-2t=0\}\neq\varnothing\}$，其中 x，t 均为实数。

(1) 求 $A\cap B$；

(2) 设 m 为实数，$g(m)=m^2-3$，求 $M=\{m\mid g(m)\in A\cap B\}$。

〖解〗 (1) 集合 A 实际上是：使得 $x^2+2tx-4t-3>0$ 恒成立的所有实数 t 的集合。

故令 $\Delta_1=(2t)^2-4(-4t-3)<0$，解得：$-3<t<-1$。

集合 B 实际上是：使得方程 $x^2+2tx-2t=0$ 有解的所有实数 t 的集合。

故令 $\Delta_2=(2t)^2-4\cdot(-2t)\geqslant 0$，解得：$t\geqslant 0$ 或 $t\leqslant -2$

所以，$A=(-3,-1)$，$B=(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$，$A\cap B=(-3,-2)$。

(2) 设 $g(m)=u$,则问题(2)可转化为:已知函数 $u=g(m)$ 的值域($u\in(-3,-2)$),求其定义域;

则 $-3<m^2-3<-2$,可解得:$-1<m<0$ 或 $0<m<1$。

所以,$M=\{m\mid -1<m<0$ 或 $0<m<1\}$。

〖评注〗 本题以集合和逻辑为背景,对集合元素的准确含义的理解是解决本题的关键,主要考查对数学符号语言的阅读、理解以及迁移转化的能力。

【例 9】 设全集 $U=\mathbf{R}$

(1) 解关于 x 的不等式 $|x-1|+a-1>0(a\in\mathbf{R})$;

(2) 记 A 为(1)中不等式的解集,集合 $B=\left\{x\mid \sin\left(\pi x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\pi x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0\right\}$,若$(\complement_U A)\cap B$ 恰有 3 个元素,求 a 的取值范围。

〖解〗 (1) 由 $|x-1|+a-1>0$ $|x-1|>1-a$;

当 $a>1$ 时,解集是 $\mathbf{R}$;

当 $a\leqslant 1$ 时,解集是 $\{x\mid x<a$ 或 $x>2-a\}$。

(2) 当 $a>1$ 时,$\complement_U A=\varnothing$;

当 $a\leqslant 1$ 时,$\complement_U A=\{x\mid a\leqslant x\leqslant 2-a\}$。

$$因\ \sin\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)=2\left[\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}+\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}\right]$$
$$=2\sin\pi x。$$

由 $\sin\pi x=0$,得 $\pi x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,即 $x=k\in\mathbf{Z}$,所以 $B=\mathbf{Z}$。

当$(\complement_U A)\cap B$ 恰有 3 个元素时,a 就满足 $\begin{cases}a\leqslant 1,\\ 2\leqslant 2-2a<4,\end{cases}$ 解得 $-1<a\leqslant 0$。

〖评注〗 本题的关键是准确理解$(\complement_U A)\cap B$ 恰有 3 个元素所对应的数量关系。

【例 10】 七名学生排成一排,甲不站在最左端和最右端的两个位置之一,乙、丙都不能站在正中间的位置,则有多少不同的排法?

〖解〗 如图 1-2 所示:设集合 $A=\{$甲站在最左端的位置$\}$,

$B=\{$甲站在最右端的位置$\}$,

$C=\{$乙站在正中间的位置$\}$,

$D=\{$丙站在正中间的位置$\}$,

则集合 A, B, C, D 的关系如图 1-2 所示,

不同的排法有 $P_7^7-4P_6^6+4P_5^5=2\,640$ 种。

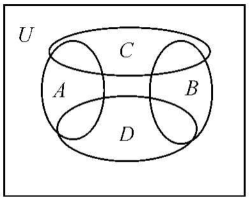

图 1-2

〖评注〗 是一道排列应用问题,如果直接分类、分步解答,比较麻烦,分类不清,容易错,若考虑运用集合思想解答,则比较容易理解。

效果验收

一、选择题

1. 已知集合 $A=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,\dfrac{y-3}{x-2}=1,\ x,\ y\in\mathbf{R}\right\}$,$B=\{(x,\ y)\mid y=ax+2,\ x,\ y\in$

$\mathbf{R}\}$，若 $A \cap B = \varnothing$，则 a 的值为 (　　)

A．$a=1$ 或 $a=\dfrac{3}{2}$　　B．$a=1$ 或 $a=\dfrac{1}{2}$

C．$a=2$ 或 $a=3$　　D．以上都不对

2．设全集为 $\mathbf{R}$，集合 $A=\{x \mid x^2-5x-6>0\}$，$B=\{x \mid |x-5|<a\}$（a 为常数），$11 \in B$，则 (　　)

A．$(\complement_{\mathbf{R}}A) \cup B = \mathbf{R}$　　B．$A \cup (\complement_{\mathbf{R}}B) = \mathbf{R}$

C．$(\complement_{\mathbf{R}}A) \cup (\complement_{\mathbf{R}}B) = \mathbf{R}$　　D．$A \cup B = \mathbf{R}$

3．某公司决定今年用 13 亿元资金投资发展项目，现有 6 个项目可供选择（每个项目或者被全部投资，或者不被投资），各项目所需资金及预计年利润如下表：

项　目	A	B	C	D	E	F
投资（亿元）	5	2	6	4	6	8
利润（千亿元）	0.55	0.4	0.6	0.5	0.9	1

如果要求所有投资项目的利润总额不得低于 1 600 万元，为使投资利润最大，应选择的项目是 (　　)

A．ABC　　B．AF　　C．ABE　　D．BDE

4．设 $M=\{0, 1\}$，$N=\{11-a, \lg a, 2^a, a\}$，是否存在 a 值，使 $M \cap N=\{1\}$ (　　)

A．存在，且有两个值　　B．存在，但只有一个值

C．不存在　　D．无法确定

5．命题 p：$a^2+b^2<0(a, b\in\mathbf{R})$，命题 q：$a^2+b^2\geqslant 0(a, b\in\mathbf{R})$，则下列结论正确的是 (　　)

A．“p 或 q”为真　　B．“p 且 q”为真　　C．“非 p”为假　　D．“非 p”为真

6．已知 p：$|x-3|>1$，q：$\dfrac{x-4}{x^2+3x-10}>0$，则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的 (　　)

A．必要不充分条件　　B．充分不必要条件

C．既不充分又不必要条件　　D．充要条件

7．若 p 是一个命题，则非 p 叫做命题 p 的否定。否定命题时，要掌握一些关键词语的否定。观察下表：

关键词	大（小）于	有	是	全，都
否定	不大（小）于	无	不是	不全，不都
关键词	任何，所有的	至少有一个	至多有一个	能
否定	某些，有几个	一个也没有	至少有两个	不能

表中对关键词的否定是错误的个数有 (　　)

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

8．给出下列各组条件：

①p：$ab=0$，q：$a^2+b^2=0$；　　②p：$xy>0$，q：$|x|+|y|=|x+y|$；

③p:$m>0$,q:方程 $x^2-x-m=0$ 有实根;　④p:$|x-1|>2$,q:$x<-1$。

其中 p 是 q 的充要条件的是　(　　)

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

9. 若集合 A_1,A_2 满足 $A_1\cup A_2=A$,则称(A_1, A_2)为集合 A 的一个分拆,并规定:当且仅当 $A_1=A_2$ 时,(A_1, A_2)与(A_2, A_1)为集合 A 的同一种分拆,则集合 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$ 的不同分拆种数是　(　　)

A. 27　　B. 36　　C. 9　　D. 8

10. 图 1-3 是一人出差从 A 城出发到 B 城去,沿途可能经过的城市的示意图。通过两城市所需时间标在两城市之间的连线上(单位:时),则此人从 A 城出发到 B 城所需时间最少要________小时　(　　)

A. 48　　B. 49

C. 50　　D. 46

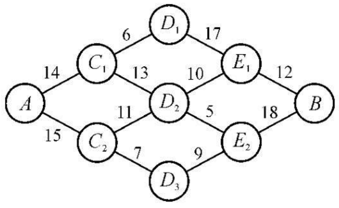

图 1-3

11. 四个孩子在罗老师的后院玩球,突然传来一阵打碎玻璃的响声,罗老师跑去察看,发现一扇窗户玻璃被打破了,老师问:“谁打破的?”宝宝说:“是可可打破的。”可可说:“是毛毛打破的。”毛毛说:“可可说谎。”多多说:“我没有打破窗子。”如果只有一个小孩说的是实话,那么打破窗户玻璃的应该是　(　　)

A. 多多　　B. 毛毛　　C. 可可　　D. 宝宝

12. M 是 N 的充分不必要条件,N 是 P 的充要条件,Q 是 P 的必要不充分条件,则 Q 是 M 的________条件　(　　)

A. 充分不必要　　B. 必要不充分

C. 充要　　D. 既不充分又不必要

二、填空题

13. 定义差集:$M-N=\{x\mid x\in M,且\ x\not\subset N\}$,若 $M=\{2, 4, 6, 8, 10\}$,$N=\{1, 2, 3, 4, 5\}$,则 $M-(M-N)=$ ________。

14. 设全集为 U,在下列条件下,那些是 $B\subseteq A$ 的充要条件?

①$A\cup B=A$;②$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$;③$(\complement_U A)\subseteq(\complement_U B)$;④$A\cup(\complement_U B)=U$。答案是(填序号)________。

15. 某班主任计划带领全体同学开展一次参观考察活动,参观地点从 A, B, C, D, E 这 5 个地方中选定,选择时要依据下列约束条件:

①如果去 A 地,那么也必须去 B 地;②D, E 两地至少去一地;③B, C 两地只去一地;④C, D两地都去或都不去;⑤如果去 E 地,那么 A, D 两地也必须去。

请问:同学们的参观地点只可能是________。

16. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-(m+2)x+1=0, x\in\mathbf{R}\}$,$\mathbf{R}_+=\{正实数\}$,且 $A\cap\mathbf{R}_+=\varnothing$,则实数 m 的取值范围是________。

三、解答题

17. 某位同学认为:“命题 p 与非 p 可以同时为假命题。”其举例如下:

设 p:若三角形有两个内角相等,则此三角形是锐角三角形。

非 p:若三角形有两个内角相等,则此三角形不是锐角三角形。

显然 p 与非 p 都是假命题,故其结论正确。

请问:该同学的观点是否正确?若正确,请说明成立的条件,并适当推广;若不正确,请你指出上面结论的错误所在,说明错误的原因,给出正确结论,并简要总结一下经验教训。

18. 某校有 21 个学生参加了数学小组, 17 个学生参加了物理小组, 10 个学生参加了化学小组,他们之中同时参加数学、物理小组的有 12 人,同时参加数学、化学小组的有 6 人,同时参加物理、化学小组的有 5 人,同时参加 3 个小组的有 2 人,现在这三个小组的学生都要乘车去市里参加数理化竞赛,问需要预购多少张车票?

19. 已知集合 $A=\{x \mid |x+1|<m\}$, $B=\{x \mid (x^2+2x-8)(x^2+2x+4)<0\}$,求分别满足下列条件的 m 的取值范围。 (1) $A \not\subseteq B$; (2) $A \cap B=\varnothing$。

20. 设集合 S 中的元素为实数,且满足条件:①S 内不含 1;②若 $a \in S$,则必有$\dfrac{1}{1-a} \in S$。

(1) 证明:若 $2 \in S$, 则 S 中必存在另外两个元素,并求出这两个元素;

(2) 集合 S 中的元素能否有且只有一个?为什么?

21. 如图 1-4 所示,已知$\triangle ABC$ 的内切圆分别切 AB, BC, CA 于 D, E, F,求证:$\triangle DEF$ 是锐角三角形。

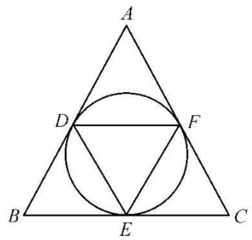

图 1-4

22. (1) 不等式 $(m^2-2m-3)x^2-(m-3)x-1<0$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 都成立,求 m 的取值范围;

(2) 不等式 $x^2-2mx-1>0$ 对一切 $1 \leqslant x \leqslant 3$ 都成立,求 m 的取值范围。

第2讲　不　等　式

重点难点

1. 掌握不等式的基本性质及其应用。

2. 掌握基本不等式,并能用于解决一些简单问题。

3. 掌握一元二次不等式的解法,了解一元二次不等式,一元二次方程和二次函数之间的关系。

4. 会解分式不等式、简单的高次不等式、无理不等式绝对值不等式。

5. 掌握不等式证明的基本方法。

6. 会用不等式解简单的应用题。

精例导读

【例 1】 已知不等式:①$ab>0$;②$-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$;③$bc>ad$。以其中任意两个为条件,余下一个为结论,则可以得到几个真命题?

〖**解**〗 共可得到三个命题:

命题 A:如果 $ab>0$ 且 $-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$,那么 $bc>ad$。

因为 $ab>0$,则

$$-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}\Rightarrow -bc<-ad\Rightarrow ad<bc,$$

所以该命题是真命题。

命题 B:如果 $ab>0$,$bc>ad$,那么 $-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$。

因为 $ab>0$,则

$$bc>ad\Rightarrow \frac{c}{a}>\frac{d}{b}\Rightarrow -\frac{c}{a}<-\frac{d}{b},$$

所以该命题是真命题。

命题 C:如果 $-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$ 且 $bc>ad$,则 $ab>0$。

若 $ab=0$,则与已知条件 $-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$ 矛盾;

若 $ab<0$,由 $bc>ad\Rightarrow\frac{c}{a}<\frac{d}{b}\Rightarrow-\frac{c}{a}>-\frac{d}{b}$ 与已知条件 $-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$ 矛盾。

因此命题 C 为真命题。

综上可知可得到三个真命题。

〖评注〗 熟练掌握不等式的基本性质是,判断不等式是否成立的基本工具,当直接证明有困难时,可考虑反证法。

【例 2】 设 $a \neq b$,解关于 x 的不等式 $a^2x+b^2(1-x) \geqslant [ax+b(1-x)]^2$。

〖解〗 将原不等式化为 $(a^2-b^2)x+b^2 \geqslant (a-b)^2x^2+2(a-b)bx+b^2$ 移项,整理得 $(a-b)^2(x^2-x) \leqslant 0$。

因为 $a \neq b$,即 $(a-b)^2>0$,所以,$x^2-x \leqslant 0$,$0 \leqslant x \leqslant 1$。

不等式的解集为 $\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$

〖评注〗 理解一元二次不等式与一元二次函数及一元二次方程之间的关系是:掌握一元二次不等式的解法的关键。

【例 3】 已知 $f(x)=ax^2-c$,$-4 \leqslant f(1) \leqslant -1$,$-1 \leqslant f(2) \leqslant 5$,试求 $f(3)$的取值范围。

〖解〗 解题思路分析:从条件和结论相互化归的角度看,用 $f(1)$,$f(2)$的线性组合来表示 $f(3)$,再利用不等式的性质求解。

设 $f(3)=mf(1)+nf(2)$,

$9a-c=m(a-c)+n(4a-c)$,　　$9a-c=(m+4n)a-(m+n)c$,

$\begin{cases} m+4n=9, \\ m+n=1; \end{cases}$　　$\begin{cases} m=-\dfrac{5}{3}, \\ n=\dfrac{8}{3}; \end{cases}$

$f(3)=-\dfrac{5}{3}f(1)+\dfrac{8}{3}f(2)$;

因为 $-4 \leqslant f(1) \leqslant -1$,$-1 \leqslant f(2) \leqslant 5$,　所以,$\dfrac{5}{3} \leqslant \dfrac{5}{3}f(1) \leqslant \dfrac{20}{3}$,$-\dfrac{8}{3} \leqslant \dfrac{8}{3}f(2) \leqslant \dfrac{40}{3}$,

$-1 \leqslant f(3) \leqslant 20$。

〖评注〗 (1)本题也可以先用 $f(1)$,$f(2)$表示 a,c,即 $a=\dfrac{1}{3}[f(2)-f(1)]$,$c=\dfrac{1}{3}[f(2)-4f(1)]$,然后代入 $f(3)$,达到用 $f(1)$,$f(2)$表示 $f(3)$的目的;

(2) 本题典型错误是从 $-4 \leqslant a-c \leqslant -1$,$-1 \leqslant 4a-c \leqslant 5$ 中解出 a,c 的范围,然后再用不等式的运算性质求 $f(3)=9a-c$ 的范围。错误的原因是多次运用不等式的运算性质时,不等式之间出现了不等价变形;

(3) 本题还可用线性规划知识求解。

【例 4】 设二次函数 $f(x)=x^2+bx+c$,已知 x_1 和 x_2 是二次方程 $f(x)-x=0$ 的两个实根,求:

(1) 求证:x_1 和 x_2 也是四次方程 $f[f(x)]-x=0$ 的两根;

(2) 令 $f[f(x)]-x=(f(x)-x)g(x)$,试求 $g(x)$ 的解析式;

(3) 假定四次方程 $f[f(x)]-x=0$ 的另外两个根 x_3,x_4 且 $x_3<x_4$,$x_1<x_2-2$,试比较 x_1,x_2,x_3,x_4 的大小关系。

〖解〗 (1) 因为 x_1 和 x_2 是二次方程 $f(x)-x=0$ 的两个实根,因此有:

$$f(x_1)=x_1 \Rightarrow f[f(x_1)]=f(x_1)=x_1,$$