



主编：蒋忠勇 许静妍

# 初中数学

## 拉分题

### 解题思想 与方法

230例+100题

代数篇



# 初中数学

## 拉分题

### 解题思想 与方法

(230例+100题)

#### 代数篇

主编：蒋忠勇 许静妍

编委会

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| 王乃芯 | 郭妍婕 | 陆娇蕾 | 瞿美娜 |
| 倪佳娣 | 许静妍 | 汤婧雯 | 郭晓云 |
| 郭 嫣 | 黄伊雯 | 孙璐怡 | 倪昶雯 |
| 蒋忠勇 | 杜秀红 | 邵秀秀 | 应雨亭 |



华东理工大学出版社  
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

· 上海 ·

## 图书在版编目(CIP)数据

赢在思维. 初中数学拉分题解题思想与方法. 代数篇 / 蒋忠勇, 许静妍主编.  
—上海: 华东理工大学出版社, 2015. 11  
ISBN 978-7-5628-4371-9  
I. ①赢… II. ①蒋… ②许… III. ①代数课—初中—题解  
IV. ①G634  
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 201647 号

赢在思维

## 初中数学拉分题解题思想与方法(230 例+100 题)(代数篇)

主 编 / 蒋忠勇 许静妍

策划编辑 / 郭 艳

责任编辑 / 刘 婧

责任校对 / 金慧娟

封面设计 / 视界创意

出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司

地 址: 上海市梅陇路 130 号, 200237

电 话: (021)64250306(营销部)

(021)64252174(编辑室)

传 真: (021)64252707

网 址: [press.ecust.edu.cn](http://press.ecust.edu.cn)

印 刷 / 常熟市华顺印刷有限公司

开 本 / 787 mm×1092 mm 1/16

印 张 / 8.5

字 数 / 212 千字

版 次 / 2015 年 11 月第 1 版

印 次 / 2015 年 11 月第 1 次

书 号 / ISBN 978-7-5628-4371-9

定 价 / 23.00 元

联系我们: 电子邮箱 [press@ecust.edu.cn](mailto:press@ecust.edu.cn)

官方微博 [e.weibo.com/ecustpress](http://e.weibo.com/ecustpress)

天猫旗舰店 <http://hdlgdxbs.tmall.com>



# 前

# 言

在初中数学学习过程中,对于一些中等以上难度的题目,即拉分题,大部分同学做相同的题型时有时对有时错,很难拿到高分.究其原因,绝大多数是因为对定型的、静态的基础知识理解不够深入,从而无法灵活掌握发展的、动态的数学思想,进而导致虽然进行了大量的训练但仍旧不得要领.解题方法之所以重要,本质原因就是解题思想与方法是数学学习的灵魂.为此,我们编写本套丛书,将初中数学最常见拉分题的解题思想与方法按代数篇和几何篇系统整理归类,依次阐述,旨在读者触类旁通,迅速得其要领,起到事半功倍作用,大大提高学习效率.本书主要有以下特点.

## 一、方法说明,带应用场合

每个专题先阐述各类数学思想解题方法,让读者头脑中存有知识框架,形成感性认识;再归类该思想方法的应用场合,包括一些常用辅助线的添加方法,在反复实践中归纳解题方法,领悟解题思想,上升到理性认识,从而达到真正理解、熟练掌握、审题后一眼看出突破口、思路尽快进入正确轨道的目的.

## 二、经典例题,配解析点评

每个专题按应用场合精挑细选每类思想方法的题型,新颖独特,覆盖面广,具有代表性.所有例题均配有解题分析,步骤详细,如同老师上课一般.同时,适当提供拓展型、有层次、综合性、发展性的题目,体现数学思想,让读者在探索中获取一种出乎意料,又在情理之中的成就感.

## 三、巩固练习,促融会贯通

精选近几年优秀试题并自编一些综合性难题,作为每个专题相应的巩固练习题.这些题目既检测了读者对前面例题的掌握程度,又帮助读者开阔视野、拓展思维.书后附有参考答案与解析,言简意赅揭示解题奥秘,读者可选择适合自己的解题技巧,提高学习效率,增强解题能力.

以下几个关键问题希望读者能特别关注:辅助线的添加形式;综合性、压轴性问题的解答;思维方法和解题方法的应用场合.

授人以鱼,只供一饭之需;授人以渔,则一生受用无穷.希望读者们能通过本套丛书收获各自想收获的,同时也希望能得到广大读者的建议与批评,使这套丛书日臻完善,不断超越.

# 目 录

---

## 思想方法篇

|      |      |    |
|------|------|----|
| 专题 1 | 分类讨论 | 1  |
| 专题 2 | 方程函数 | 7  |
| 专题 3 | 转化化归 | 15 |
| 专题 4 | 数形结合 | 20 |

## 解题方法篇

|         |       |     |
|---------|-------|-----|
| 专题 5    | 十字相乘法 | 27  |
| 专题 6    | 公式法   | 30  |
| 专题 7    | 反证法   | 34  |
| 专题 8    | 比例法   | 38  |
| 专题 9    | 分组分解法 | 41  |
| 专题 10   | 分析综合法 | 43  |
| 专题 11   | 分离变量法 | 46  |
| 专题 12   | 平方法   | 48  |
| 专题 13   | 立方法   | 50  |
| 专题 14   | 归纳类比  | 52  |
| 专题 15   | 列表法   | 56  |
| 专题 16   | 判别式法  | 61  |
| 专题 17   | 作差法   | 66  |
| 专题 18   | 作商法   | 68  |
| 专题 19   | 定义法   | 70  |
| 专题 20   | 枚举法   | 74  |
| 专题 21   | 拆项添项法 | 78  |
| 专题 22   | 奇偶分析法 | 81  |
| 专题 23   | 放缩法   | 85  |
| 专题 24   | 待定系数法 | 88  |
| 专题 25   | 消元法   | 91  |
| 专题 26   | 配方法   | 93  |
| 专题 27   | 换元法   | 95  |
| 专题 28   | 特殊值法  | 100 |
| 专题 29   | 还原法   | 104 |
| 专题 30   | 倒数法   | 108 |
| 专题 31   | 裂项法   | 110 |
| 专题 32   | 零点分段法 | 112 |
| 专题 33   | 整体法   | 115 |
| 参考答案与提示 |       | 117 |

# 思想方法篇

## 专题 1 分类讨论

### 【方法说明】

初中数学中的分类讨论思想,是指把要研究的数学对象按照一定的标准划分为若干不同的类别,然后逐类进行研究、求解的一种数学解题思想.

分类讨论解题的实质,是将整体问题化为部分问题来解决,以增加题设条件.

分类讨论的原则是不重复、不遗漏.讨论的方法是逐类进行,还必须注意综合讨论的结果,以使解题步骤完整.

### 【应用场合】

在初中代数中,分类讨论主要应用在含参方程、不等式、绝对值、综合应用等方面.

### 【典型应用 1】含参方程

#### (☆☆)【1.1.1】

讨论二元一次方程组解的情况:  $\begin{cases} ax+by=c, \\ dx+ey=f. \end{cases}$

#### 【解析】

将方程组的两个式子分别同乘  $d, a$ , 抵消  $x$  后可得等式  $bdy - aey = cd - af$ .

① 当  $bd - ae = 0$  且  $cd - af = 0$  时, 该方程组有无数解;

② 当  $bd - ae = 0, cd - af \neq 0$  时, 该方程组无解;

③ 当  $bd - ae \neq 0$  时, 该方程有唯一解,  $\begin{cases} x = \frac{bf - ce}{bd - ae}, \\ y = \frac{cd - af}{bd - ae}. \end{cases}$

#### 【备注】

本题还有另一种表达:  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ , 该方程组有无数解;  $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ , 该方程组有唯一解;  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ , 该方程组无解.

#### (☆☆☆)【1.1.2】

已知  $\frac{ax+b}{cx+d} = s, a, b, c, d$  为有理数,  $x$  为无理数.

(1)  $a, b, c, d$  满足何条件时,  $s$  为有理数?

(2)  $a, b, c, d$  满足何条件时,  $s$  为无理数?

【解析】

(1) 当  $a=c=0, d \neq 0$  时,  $s = \frac{b}{d}$  为有理数; 当  $c \neq 0$  时,  $s = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)}$ , 则  $c \neq 0, bc-ad=0$  时,  $s$  为有理数.

(2) 当  $c=0, d \neq 0, a \neq 0$  时,  $s = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$  为无理数; 当  $c \neq 0$  时,  $s = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)}$ , 当  $bc-ad \neq 0$  时, 即  $ad \neq bc$  且  $c \neq 0$  时,  $s$  为无理数.

(☆☆)【巩固练习 1】

求方程  $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = \frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b}$  的解.

【典型应用 2】不等式

(☆☆)【1.2.1】

解关于  $x$  的不等式组  $\begin{cases} 3mx-1 < 10-mx, \\ mx+x > (1-2m)x+8. \end{cases}$

【解析】

整理得  $\begin{cases} 4mx < 11, \\ 3mx > 8. \end{cases}$

① 当  $m=0$  时, 无解;

② 当  $m>0$  时,  $\frac{8}{3m} < x < \frac{11}{4m}$ ;

③ 当  $m<0$  时,  $\frac{11}{4m} < x < \frac{8}{3m}$ .

(☆☆☆)【1.2.2】

$m$  为何值时, 方程组  $\begin{cases} 2x+y=2m, \\ 4x-y=m-6 \end{cases}$  的解适合  $xy<0$ .

【解析】

整理得  $\begin{cases} 2x=m-2, \\ y=m+2, \end{cases}$  由  $xy<0$  得:

① 当  $\begin{cases} x<0, \\ y>0 \end{cases}$  时,  $-2 < m < 2$ ;

② 当  $\begin{cases} x>0, \\ y<0 \end{cases}$  时, 无解.

(☆☆)【巩固练习2】

若不等式组  $\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ 2x^2 + (5+2k)x + 5k < 0 \end{cases}$  的整数解只有  $x = -2$ , 求实数  $k$  的取值范围.

【典型应用3】绝对值

(☆)【1.3.1】

解方程  $|x-1| + |x+2| = 5$ .

【解析】

令  $x-1=0, x+2=0$ , 解得  $x=1, x=-2$ , 可以分成以下3种情况:

- (1) 当  $x < -2$  时,  $-(x-1) - (x+2) = 5$ , 解得  $x = -3$ , 符合  $x < -2$ ;
- (2) 当  $-2 \leq x < 1$  时,  $-(x-1) + (x+2) = 5$ , 此方程无解;
- (3) 当  $x \geq 1$  时,  $(x-1) + (x+2) = 5$ , 解得  $x = 2$ , 符合  $x \geq 1$ .

(☆☆)【1.3.2】

已知  $a, b, c, d$  都是整数, 且  $|a+b| + |b+c| + |c+d| + |d+a| = 2$ , 求  $|a+d|$  的值.

【解析】

由题意得:  $|a+b|, |b+c|, |c+d|, |d+a|$  是整数, 所以有两种可能: ① 3 个绝对值为 0, 1 个绝对值为 2; ② 2 个绝对值为 0, 2 个绝对值为 1. 所以  $|d+a|$  只可能取 0, 1, 2.

① 若  $|a+d| = 2$ , 则  $|a+b| = |b+c| = |c+d| = 0$ , 则  $a = -d$ , 所以  $|a+d| = 0$ , 与假设  $|a+d| = 2$  矛盾.

② 若  $|a+d| = 1, a=0, b=0, c=-1, d=1$ , 此时  $|a+d| = 1$ ;

③ 若  $|a+d| = 0, a=-1, b=0, c=0, d=1$ , 此时  $|a+d| = 0$ .

综上,  $|a+d|$  的值为 1 或 0.

(☆☆☆)【1.3.3】

$a, b, c$  均为整数, 且  $|a-b|^{2012} + |c-a|^{2013} = 1$ , 试求  $(c-a)^{2012} + |a-b| + |b-c|^{2013}$  的值.

【解析】

由  $a, b, c$  均为整数,  $|a-b|^{2012} + |c-a|^{2013} = 1$  可知, 只能是  $0+1=1$  或  $1+0=1$ .

① 当  $|a-b| = 0, |c-a| = 1$  时, 原式  $= 1+0+1=2$ ;

② 当  $|a-b| = 1, |c-a| = 0$  时, 原式  $= 0+1+1=2$ .

综上, 所求式的值为 2.

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33



(☆☆)【巩固练习 3】

已知  $a, b, c$  为不等于零的有理数, 求  $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} + \frac{|abc|}{abc}$  的值.

【典型应用 4】综合应用

(☆☆)【1.4.1】

某园艺公司对一块直角三角形的花圃进行改造, 测得两直角边长为 6 m, 8 m. 现要将其扩建成等腰三角形, 且扩充部分是以原有的 8 m 为直角边的直角三角形, 求扩建后的等腰三角形花圃的周长.

【解析】

已知原来的花圃为  $\text{Rt}\triangle ABC$ , 其中  $BC=6$  m,  $AC=8$  m,  $\angle ACB=90^\circ$ . 由勾股定理易知  $AB=10$  m.

① 如图 1-1 所示,  $AB=AD$ , 此时  $AD=10$  m,  $CD=6$  m. 故扩建后的等腰三角形花圃的周长为  $12+10+10=32$ (m).

② 如图 1-2 所示,  $BD=AB=10$  m, 在  $\text{Rt}\triangle ACD$  中, 由勾股定理得  $AD=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$ , 此时, 扩建后的等腰三角形花圃的周长为  $4\sqrt{5}+10+10=20+4\sqrt{5}$ (m).

③ 如图 1-3 所示,  $DA=DB$ , 设  $CD=x$  m, 则  $DA=(x+6)$  m, 在  $\text{Rt}\triangle ACD$  中, 由勾股定理得  $x^2+8^2=(x+6)^2$ , 解得  $x=\frac{7}{3}$ . 此时扩建后的等腰三角形花圃的周长  $=10+2(x+6)=\frac{80}{3}$ (m).

综上, 扩建后等腰三角形花圃的周长为 32 m 或  $(20+4\sqrt{5})$  m 或  $\frac{80}{3}$  m.

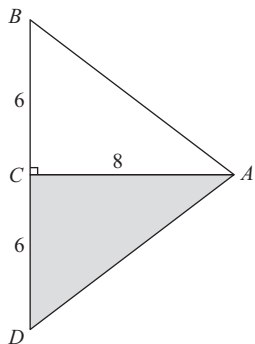


图 1-1

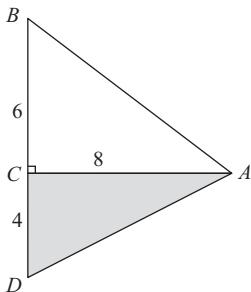


图 1-2

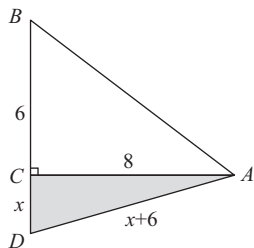


图 1-3

(☆☆☆)【1.4.2】

在 $\triangle ABC$ 中, $AC=25, AB=35, \tan A=\frac{4}{3}$ ,点 $D$ 为边 $AC$ 上一点,且 $AD=5$ ,点 $E, F$ 分别为边 $AB$ 上的动点(点 $F$ 在点 $E$ 的左边),且 $\angle EDF=\angle A$ . 设 $AE=x, AF=y$ .

(1)如图1-4所示,当 $DF \perp AB$ 时,求 $AE$ 的长.

(2)如图1-5所示,当点 $E, F$ 在边 $AB$ 上时,求 $y$ 关于 $x$ 的函数关系式,并写出函数的定义域.

(3)连接 $CE$ ,当 $\triangle DEC$ 和 $\triangle ADF$ 相似时,求 $x$ 的值.

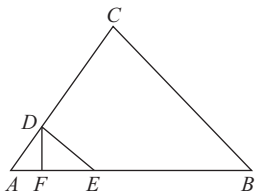


图 1-4

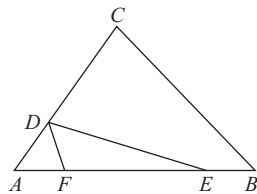


图 1-5

【解析】

(1) 因为 $DF \perp AB$ ,所以 $\angle AFD=90^\circ, \angle A+\angle ADF=90^\circ$ ,

因为 $\angle EDF=\angle A$ ,所以 $\angle EDF+\angle ADF=90^\circ$ ,

即 $\angle ADE=90^\circ$ ,

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $\angle ADE=90^\circ, AD=5, \tan A=\frac{4}{3}$ ,所以 $DE=\frac{20}{3}, AE=\frac{25}{3}$ .

(2) 如图1-6所示,过点 $D$ 作 $DG \perp AB$ ,交 $AB$ 于 $G$ .

因为 $\angle EDF=\angle DAE, \angle DEF=\angle AED$ ,所以 $\triangle EDF \sim$

$\triangle EAD$ ,所以 $\frac{ED}{EF}=\frac{AE}{ED}, ED^2=AE \cdot EF$ ,

因为 $\text{Rt}\triangle AGD$ 中, $\angle AGD=90^\circ, AD=5, \tan A=\frac{4}{3}$ ,所

以 $DG=4, AG=3$ ,所以 $EG=x-3, DE^2=4^2+(x-3)^2$ ,所以

$4^2+(x-3)^2=x \cdot (x-y)$ ,所以 $y=6-\frac{25}{x} \left( \frac{25}{6} \leq x \leq 35 \right)$ .

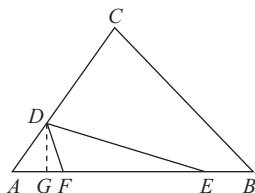


图 1-6

(3) 如图1-7所示,因为 $\angle A+\angle AFD=\angle EDF+\angle EDC$ ,且 $\angle EDF=\angle A$ . 所以 $\angle ADF=\angle EDC$ .

① 当 $\angle A=\angle CED$ 时,

因为 $\angle EDF=\angle A, \angle CED=\angle FDE$ ,所以 $DF \parallel CE$ ,

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AF}{AE},$$

所以 $\frac{5}{25}=\frac{y}{x}$ ,因为 $y=6-\frac{25}{x}$ ,所以 $5 \times \left( 6-\frac{25}{x} \right)=x$ ,

$x_1=25, x_2=5$ .

② 当 $\angle A=\angle DCE$ 时, $AE=CE=x$

因为 $\angle ADF=\angle COE$ ,所以 $\triangle ECD \sim \triangle DAF$ ,所以 $\frac{CD}{AD}=\frac{CE}{AF}$ ,所以 $\frac{20}{5}=\frac{x}{y}$ ,

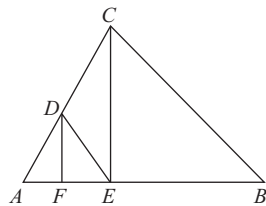


图 1-7

$$4 \times \left(6 - \frac{25}{x}\right) = x, \text{ 所以 } x = 12 \pm 2\sqrt{11}.$$

综上, 当  $\triangle DEC$  和  $\triangle ADF$  相似时,  $x = 25$  或  $x = 5$  或  $x = 12 \pm 2\sqrt{11}$ .

**(☆☆☆)【1.4.3】**

如图 1-8 所示, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ . 翻折  $\angle C$ , 使点  $C$  落在斜边  $AB$  上某一点  $D$  处, 折痕为  $EF$  (点  $E, F$  分别在边  $AC, BC$  上), 若  $\triangle CEF$  与  $\triangle ABC$  相似, 求:

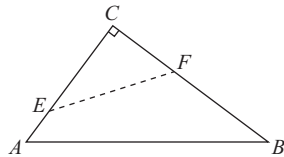


图 1-8

(1) 当  $AC = BC = 2$  时,  $AD$  的长为 \_\_\_\_\_.

(2) 当  $AC = 3, BC = 4$  时,  $AD$  的长为 \_\_\_\_\_.

**【解析】**

(1) 当  $AC = BC = 2$  时,  $\triangle ABC$  为等腰直角三角形, 如图 1-9 所示.

此时  $D$  为  $AB$  边中点,  $AD = \frac{\sqrt{2}}{2}AC = \sqrt{2}$ .

(2) 当  $AC = 3, BC = 4$  时, 有两种情况:

① 若  $CE:CF = 3:4$ , 如图 1-10 所示.

因为  $CE:CF = AC:BC$ ,

由折叠性质可知,  $CD \perp EF$ , 所以  $CD \perp AB$ , 即此刻  $CD$  为  $AB$  边上的高.

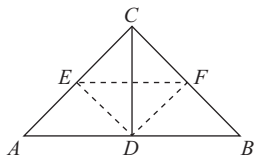


图 1-9

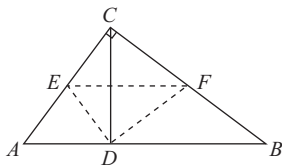


图 1-10

在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $AC = 3, BC = 4$ , 所以  $AB = 5, \cos A = \frac{3}{5}, AD = AC \cdot \cos A = 3 \times \frac{3}{5} = 1.8$ .

② 若  $CF:CE = 3:4$ , 如图 1-11 所示.

因为  $\triangle CEF$  与  $\triangle ABC$  相似, 所以  $\angle CEF = \angle B$ . 由折叠性质可知,  $\angle CEF + \angle ECD = 90^\circ$ , 又因为  $\angle A + \angle B = 90^\circ$ , 所以  $\angle A = \angle ECD, AD = CD$ .

同理可得  $\angle B = \angle FCD, CD = BD$ .

从而  $AD = \frac{1}{2}AB = 2.5$ .

综上, 当  $AC = 3, BC = 4$  时,  $AD$  的长为 1.8 或 2.5.

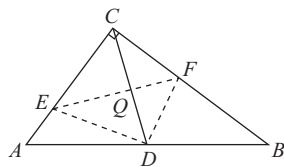


图 1-11

**(☆☆)【巩固练习 4】**

已知直线  $l$  经过  $A(6,0)$  和  $B(0,12)$  两点, 且与直线  $y=x$  交于点  $C$ .

(1) 求直线  $l$  的解析式.

(2) 若点  $P(x,0)$  在  $x$  轴上运动, 是否存在点  $P$ , 使得  $\triangle PCA$  成为等腰三角形? 若存在, 请写出点  $P$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.

## 【方法说明】

方程函数思想即为方程思想与函数思想的综合运用.

方程思想是从数学问题的数量关系出发,将问题中的条件转化为各种数学模型.

函数思想是指用函数的概念和性质去分析问题、转化问题和解决问题,求解函数解析式和灵活运用函数的性质特点是把握函数思想的关键.

同时,函数与方程密切相关,通过实现函数与方程的互相转化、接轨,达到解决问题的目的.函数和方程思想可以使数学问题变得简捷、清晰,可以化繁为简、化难为易.

## 【应用场合】

在初中代数中,方程函数主要应用在方程与不等式、几何相关、函数相关、综合应用等方面.

## 【典型应用 1】方程与不等式

## (☆☆)【2.1.1】

一辆高铁列车与另一辆动车组列车在 1 320 千米的京沪高速铁路上运行时,高铁列车比动车组列车平均速度每小时快 99 千米,用时少 3 小时,求这辆高铁列车全程的运行时间和平均速度.

## 【解析】

设高铁列车全程的运行时间为  $x$  小时,则动车组列车全程的运行时间为  $(x+3)$  小时,由题意得  $\frac{1\ 320}{x} - \frac{1\ 320}{x+3} = 99$ ,  $\frac{40}{x} - \frac{40}{x+3} = 3$ ,  $x^2 + 3x - 40 = 0$ ,  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = -8$ . 经检

验,它们都是原方程的根,但  $x_2 = -8$  不符合题意. 当  $x = 5$  时,  $\frac{1\ 320}{5} = 264$ .

综上,这辆高铁列车全程的运行时间为 5 小时,平均速度 264 千米/小时.

## (☆☆)【2.1.2】

某食品批发部准备用 10 000 元从厂家购进一批出厂价分别为 16 元和 20 元的甲、乙两种酸奶,然后将甲、乙两种酸奶分别加价 20% 和 25% 向外销售. 设购进甲种酸奶为  $x$  (箱),全部售出这批酸奶所获销售利润为  $y$  (元).

(1) 求所获销售利润为  $y$  (元)与  $x$  (箱)之间的函数关系式.

(2) 根据市场调查,甲、乙两种酸奶在保质期内销售量都不超过 300 箱,那么食品批发部怎样进货获利最大,最大销售利润是多少?

## 【解析】

(1) 根据题意,得  $y = 16 \cdot x \cdot 20\% + (10\ 000 - 16x) \cdot 25\% = -0.8x + 2\ 500$ ,

$$(0 \leq x \leq 625)$$

$$(2) \text{ 由题意, } \begin{cases} 0 \leq x \leq 300, \\ 0 \leq \frac{10\,000 - 16x}{20} \leq 300, \end{cases} \text{ 解得 } 250 \leq x \leq 300. \text{ 由 (1) 知 } y = -0.8x + 2\,500,$$

由于  $k = -0.8 < 0$ , 故  $y$  随  $x$  的增大而减小, 当  $x = 250$  时,  $y$  值最大, 此时  $y = -0.8 \times 250 + 2\,500 = 2\,300$  (元),  $\frac{10\,000 - 16x}{20} = \frac{10\,000 - 16 \times 250}{20} = 300$  (箱).

综上, 当购进甲种酸奶 250 箱, 乙种酸奶 300 箱时, 所获销售利润最大, 最大销售利润为 2 300 元.

### (☆☆)【巩固练习 1】

若实数  $a, b$  满足  $\frac{1}{2}a - ab + b^2 + 2 = 0$ , 则  $a$  的取值范围是多少?

### 【典型应用 2】几何相关

#### (☆)【2.2.1】

如图 2-1 所示, 是一个照相机成像的示意图.

(1) 如果像高  $MN$  是 35 mm, 焦距是 50 mm, 拍摄的景物高度  $AB$  是 4.9 m, 拍摄点离景物有多远?

(2) 如果要完整的拍摄高度是 2 m 的景物, 拍摄点离景物有 4 m, 像高不变, 则相机的焦距应调整为多少?

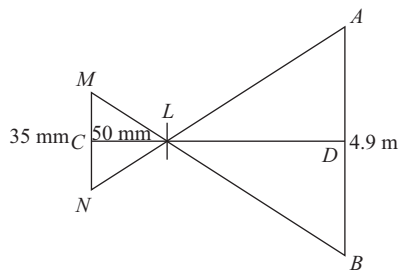


图 2-1

#### 【解析】

根据物体成像原理知:  $\triangle LMN \sim \triangle LBA$ , 得到  $\frac{MN}{AB} = \frac{LC}{LD}$ .

(1) 由题意, 像高  $MN$  是 35 mm, 焦距是 50 mm, 拍摄的景物高度  $AB$  是 4.9 m, 解得  $LD = 7$ , 因此拍摄点距景物 7 m;

(2) 拍摄高度是 2 m 的景物, 拍摄点离景物有 4 m, 像高不变, 解得  $LC = 70$ , 因此相机的焦距应调整为 70 mm.

#### (☆☆)【2.2.2】

王大伯要做一张如图 2-2 所示的梯子, 梯子共有 7 级互相平行的踏板, 每相邻两级踏板之间的距离都

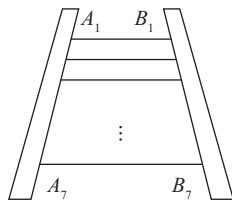


图 2-2

相等. 已知梯子最上面一级踏板的长度  $A_1B_1=0.5\text{ m}$ , 最下面一级踏板的长度  $A_7B_7=0.8\text{ m}$ . 则第 5 级踏板的长度为( ).

- A. 0.6 m      B. 0.65 m      C. 0.7 m      D. 0.75 m

### 【解析】

因为每相邻两级踏板之间的距离都相等, 所以  $A_4B_4$  为梯形  $A_1A_7B_7B_1$  的中位线, 根据梯形中位线定理,  $A_4B_4 = \frac{1}{2}(A_1B_1 + A_7B_7) = 0.65\text{ m}$ . 如图 2-3 所示, 作  $A_1C \parallel B_1B_4$  并延长  $AC$  交  $A_5B_5$  于点  $D$ , 则  $DB_5 = CB_4 = A_1B_1 = 0.5\text{ m}$ ,  $A_1C = 0.65 - 0.5 = 0.15\text{ m}$ , 于是  $\frac{A_1A_4}{A_1A_5} = \frac{A_1C}{A_5D}$  解得  $A_5D = 0.2\text{ m}$ .  $A_5B_5 = 0.2 + 0.5 = 0.7\text{ m}$ .

故选 C.

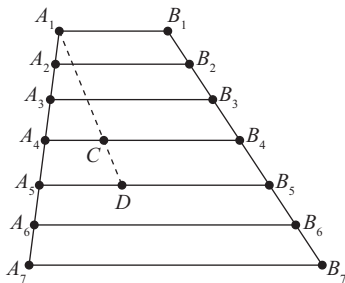


图 2-3

### (☆☆)【2.2.3】

如图 2-4 所示, 港口  $B$  位于港口  $D$  正西方向 120 海里处, 小岛  $C$  位于港口  $D$  北偏西  $60^\circ$  的方向上, 一艘科学考察船从港口  $D$  出发, 沿北偏西  $30^\circ$  的  $DA$  方向以每小时 20 海里的速度驶离港口  $D$ , 同时一艘快艇从港口  $B$  出发沿北偏东  $30^\circ$  的方向以每小时 60 海里的速度驶向小岛  $C$ . 在小岛  $C$  处用 1 小时装补给物质后, 立即按原来的速度给考察船送去.

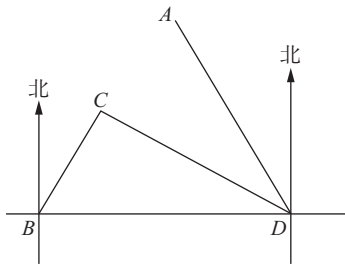


图 2-4

(1) 快艇从港口  $B$  到小岛  $C$  需要多少时间?

(2) 快艇从小岛  $C$  出发后最少需要多少时间才能和考察船相遇?

### 【解析】

(1) 由题意  $\angle BCD = 90^\circ$ ,  $BC = 60$ , 所以快艇到达  $C$  处的时间:  $t = \frac{60}{60} = 1$  (小时).

(2) 如图 2-5 所示, 作  $CF \perp DA$  于点  $F$ , 因为  $DC = \frac{\sqrt{3}}{2}BD = 60\sqrt{3}$  (海里), 所以在  $\text{Rt}\triangle CDF$  中,  $\angle CDF = 30^\circ$ . 所以  $CF = \frac{1}{2}CD = 30\sqrt{3}$  (海里),  $DF = \frac{\sqrt{3}}{2}CD = 90$

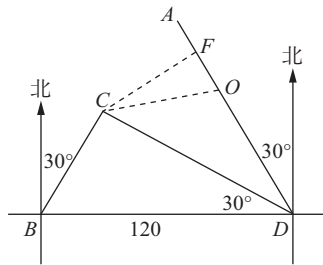


图 2-5

(海里). 所以  $t_{\text{快艇}} = \frac{30\sqrt{3}}{60} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  (小时), 而  $S_{\text{考察船}} = \left(1 + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 20 = (40 + 10\sqrt{3}) < 90$ .

所以两船不可能在点  $F$  处相遇.

假如两船在点  $O$  处 (点  $O$  在  $DF$  之间) 相遇, 设快艇从小岛  $C$  出发后最少需  $x$  小时与考察船相遇, 相遇时考察船共用了  $(x+2)$  小时, 所以  $OD = 20(x+2)$ ,  $CF = 30\sqrt{3}$ . 所以  $OF = DF - OD = 90 - 20x - 40 = 50 - 2x$ ,  $CO = 60x$ . 在  $\text{Rt}\triangle COF$  中, 由勾股定理

$CF^2 + FO^2 = CO^2$ , 即  $(30\sqrt{3})^2 + (50 - 20x)^2 = (60x)^2$ , 整理得  $8x^2 + 5x - 13 = 0$ , 解得  $x_1 = 1, x_2 = -\frac{13}{8}$  (不合题意, 舍去).

综上, 快艇从小岛  $C$  出发后最少需要 1 小时才能和考察船相遇.

### (☆☆)【巩固练习 2】

在同一时刻两根木杆在太阳光下的影子如图 2-6 所示, 其中木杆  $AB = 2$  m, 它的影子  $BC = 1.6$  m, 木杆  $PQ$  的影子有一部分落在了墙上,  $PM = 1.2$  m,  $MN = 0.8$  m, 则木杆  $PQ$  的长度为 \_\_\_\_\_ m.

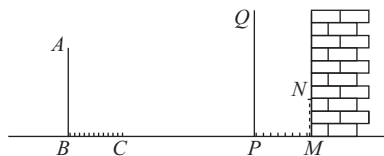


图 2-6

### 【典型应用 3】函数相关

#### (☆☆)【2.3.1】

如图 2-7 所示是一个横断面为抛物线形状的拱桥, 当水面宽 4 m 时, 拱顶 (拱桥洞的最高点) 离水面 2 m, 水面下降 1 m 时, 水面的宽度为 \_\_\_\_\_ m.

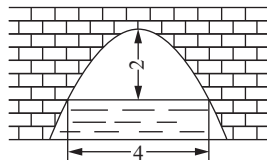


图 2-7

#### 【解析】

如图 2-8 所示, 建立平面直角坐标系, 设横轴  $x$  通过  $AB$ , 纵轴  $y$  通过  $AB$  中点  $O$  且通过点  $C$ , 则通过画图可得知  $O$  为原点.

抛物线以  $y$  轴为对称轴, 且经过  $A, B$  两点, 抛物线顶点  $C$  坐标为  $(0, 2)$ , 通过以上条件可设顶点式  $y = ax^2 + 2$ , 其中  $a$  可通过代入  $A$  点坐标  $(-2, 0)$  到抛物线解析式得出:  $a = -\frac{1}{2}$ , 所以抛物线解析式为

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2,$$

当水面下降 1 m, 通过抛物线在图上的观察可转化为: 当  $y = -1$  时对应的抛物线上两点之间的距离, 也就是直线  $y = -1$  与抛物线相交的两点之间的距离, 可以通过把  $y = -1$  代入抛物线方程, 解得  $x = \pm\sqrt{6}$ , 所以水面宽度增加到  $2\sqrt{6}$  m.

#### (☆☆)【2.3.2】

科学家为了推测最适合某种珍奇植物生长的温度, 将这种植物分别放在不同温度的环境中, 经过一段时间后, 测试出这种植物高度的增长情况, 部分数据如表:

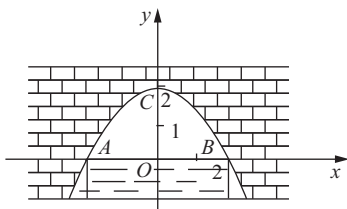


图 2-8

|                         |    |    |    |    |    |
|-------------------------|----|----|----|----|----|
| 温度 $t/^{\circ}\text{C}$ | -4 | -2 | 0  | 1  | 4  |
| 植物高度增长量 $l/\text{mm}$   | 41 | 49 | 49 | 46 | 25 |

科学家经过猜想、推测出  $l$  与  $t$  之间是二次函数关系. 由此可以推测最适合这种植物生长的温度为  $\underline{\hspace{2cm}}$   $^{\circ}\text{C}$ .

【解析】

设  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ), 将  $(0, 49)$ ,  $(1, 46)$ ,  $(4, 25)$  代入后解得:  $a = -1$ ,  $b = -2$ ,  $c = 49$ . 得函数解析式为  $y = -x^2 - 2x + 49$ , 当  $x = -\frac{b}{2a} = -1$  时,  $y$  有最大值 50, 即说明最适合这种植物生长的温度是  $-1^{\circ}\text{C}$ .

(☆☆)【巩固练习 3】

如图 2-9 所示, 已知点  $A$  在反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  的图像上, 点  $B$  在  $x$  轴的正半轴上, 且  $\triangle OAB$  是面积为  $\sqrt{3}$  的等边三角形, 那么这个反比例函数的解析式是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

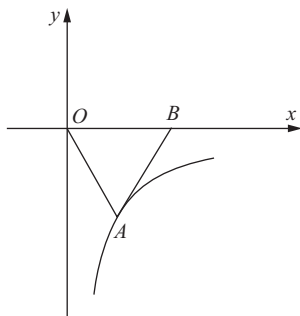


图 2-9

【典型应用 4】综合应用

(☆☆☆)【2.4.1】

如图 2-10 所示, 已知抛物线的方程  $C_1$ :  $y = -\frac{1}{m}(x+2)(x-m)$  ( $m > 0$ ) 与  $x$  轴交于点  $B, C$ , 与  $y$  轴交于点  $E$ , 且点  $B$  在点  $C$  的左侧.

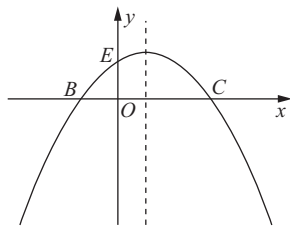


图 2-10

(1) 若抛物线  $C_1$  过点  $M(2, 2)$ , 求实数  $m$  的值.

(2) 在 (1) 的条件下, 求  $\triangle BCE$  的面积.

(3) 在 (1) 的条件下, 在抛物线的对称轴上找一点  $H$ , 使得  $BH + EH$  最小, 求出点  $H$  的坐标.

(4) 在第四象限内, 抛物线  $C_1$  上是否存在点  $F$ , 使得以点  $B, C, F$  为顶点的三角形与  $\triangle BCE$  相似? 若存在, 求  $m$  的值; 若不存在, 请说明理由.



【解析】

(1) 将  $M(2,2)$  代入  $y = -\frac{1}{m}(x+2)(x-m)$ , 得  $2 = -\frac{1}{m} \times 4 \times (2-m)$ . 解得  $m=4$ .

(2) 当  $m=4$  时,  $y = -\frac{1}{4}(x+2)(x-4) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$ . 所以  $B(-2,0)$ ,  $C(4,0)$ ,  $E(0,2)$ .

$$S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2}BC \cdot OE = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6.$$

(3) 如图 2-11 所示, 抛物线的对称轴是直线  $x=1$ , 当点  $H$  落在线段  $EC$  上时,  $BH+EH$  最小. 设对称轴与  $x$  轴的交点为  $P$ , 那么  $\frac{HP}{CP} = \frac{EO}{CO}$ . 因此  $\frac{HP}{3} = \frac{2}{4}$ . 解得  $HP = \frac{3}{2}$ . 所以点  $H$  的坐标为  $(1, \frac{3}{2})$ .

(4) ① 如图 2-12 所示, 过点  $B$  作  $EC$  的平行线交抛物线于点  $F$ , 过点  $F$  作  $FF' \perp x$  轴于  $F'$ . 由于  $\angle BCE = \angle FBC$ , 所以当  $\frac{CE}{CB} = \frac{BC}{BF}$ , 即  $BC^2 = CE \cdot BF$  时,  $\triangle BCE \sim \triangle FBC$ . 设点  $F$  的坐标为  $(x, -\frac{1}{m}(x+2)(x-m))$ , 由  $\frac{FF'}{BF'} = \frac{EO}{CO}$ , 得  $\frac{\frac{1}{m}(x+2)(x-m)}{x+2} = \frac{2}{m}$ . 解得  $x = m+2$ . 所以  $F'(m+2, 0)$ . 由  $\frac{CO}{CE} = \frac{BF'}{BF}$ , 得  $\frac{m}{\sqrt{m^2+4}} = \frac{m+4}{BF}$ . 所以  $BF = \frac{(m+4)\sqrt{m^2+4}}{m}$ . 由  $BC^2 = CE \cdot BF$ , 得  $(m+2)^2 = \sqrt{m^2+4} \times \frac{(m+4)\sqrt{m^2+4}}{m}$ . 整理得  $0=16$ . 此方程无解.

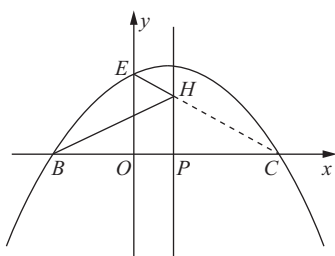


图 2-11

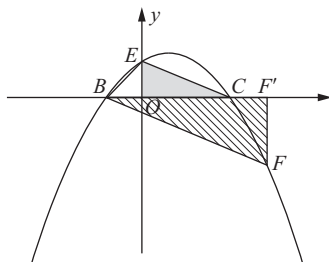


图 2-12

② 如图 2-13 所示, 作  $\angle CBF = 45^\circ$  交抛物线于点  $F$ , 过点  $F$  作  $FF' \perp x$  轴于  $F'$ , 由于  $\angle EBC = \angle CBF$ , 所以  $\frac{BE}{BC} = \frac{BC}{BF}$ , 即  $BC^2 = BE \cdot BF$  时,  $\triangle BCE \sim \triangle BFC$ . 在  $\text{Rt}\triangle BFF'$  中, 由  $FF' = BF'$ , 得  $\frac{1}{m}(x+2)(x-m) = x+2$ . 解得  $x = 2m$ . 所以  $F'(2m, 0)$ . 所以  $BF' = 2m+2$ ,  $BF = \sqrt{2}(2m+2)$ . 由  $BC^2 = BE \cdot BF$ , 得  $(m+2)^2 = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2}(2m+2)$ . 解得  $m = 2 \pm 2\sqrt{2}$ .

综合①②, 符合题意的  $m$  为  $2+2\sqrt{2}$ .

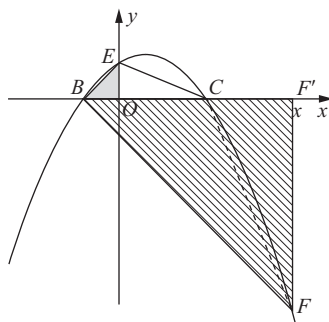


图 2-13