摄动方法简介

何善堉

中国自动化学会非线性控制理论学习班
中南矿冶学院自动化系

P 13 / 2

编者郑重声明

一、本讲义是在极仓促的情况下，几天之内临时赶写出来的，根本没有经过任何加工和润色，限于编者的水平，错误缺点一定很多，敬请指正。

二、本讲义的内容都是从现有的几本书中匆忙搬用过来的，编者个人对摄动理论了解极少，毫无贡献。

三、本讲义内容很贫乏，更谈不上完整性和系统性，目的只限于向没有接触过摄动方法的同志介绍一点点最基本的概念和方法，所以，本讲义只供参加讲习班的同志，作为参考材料，绝对算不上一本教材，恳请持有者尽量不外传，以免谬种流传，贻笑大方。

四、在编写过程中得到中南矿冶学院的王鸿贵同志等几位老师和学院领导的大力支持和帮助，得到参加讲习班的全体同志的鼓励启发和指教，使编者得益甚多，谨致谢意。

编　者

1982年11月　于中南矿冶学院

摄动方法简介

一、绪言

摄动方法（Pertubation method）有时也称为微扰法或小参数法。它是一种常用的数学工具，在解决许多物理学、力学、天文学、系统理论乃至工程设计、生物科学、社会科学等方面的数学问题时，这种方法往往能给出令人满意的结果，使一些难于得出所谓“精确解”的问题能够用系统的方法找到相当合用的近似解。这种近似解的形式不但在数量上足够准确，而且常常能提供定性方面的重要细节使我们能大大加深对研究对象的了解。所以，摄动方法已经成为应用数学的一个重要分支，关于摄动方法的数学理论就叫做摄动理论。一般地说，摄动理论难度较高，内容也很庞杂很丰富，还处于方兴未艾的阶段，很难用少数篇幅加以概括。所以从应用角度出发，我们在这里只限于介绍摄动方法的思路，具体做法和一些最基本的概念，不追求过分的严格性。

那么，到底什么是摄动方法呢？

粗略地说，摄动方法要处理的是这样一类问题：假定某一个数学问题的解已经找到，如果问题的条件发生了微小的变化，问题的解将会受到什么影响？

例如，假设太阳系中只有太阳S和地球E这两个星体，而且太阳的质量比地球的质量大得多。根据牛顿的力学定理，不难算出，地球绕太阳的公转轨道就是一个以太阳的质心为一个焦点的椭圆（已知解）

但是由于其他行星和卫星的存在，使问题的条件发生了变化，因为这些天体的质量与太阳相比十分微小，而且它们与地球的距离又相当遥远，所以它们的存在只是比较微弱地改变了问题的条件，换言之，它们的实际存在是对原来的解（椭园运动）的一个微小的扰动（这种扰动在天文学上就称为摄动）。这时，地球绕太阳的公转轨道就不再是一个严格的椭园，而是一个与这个椭园相差很小但却很复杂的曲线，研究其他行星和卫星的存在与这个差别的关系，这就是一个典型的摄动方法问题。

在系统理论中，如果一个系统是弱非线性的，也就是说，这个系统与一个线性系统的差别很小。我们就可以把表现这个差别的微小的非线性部分看做是对那个线性系统的一个摄动，如果该线性系统的解容易求得，我们就有可能以这个解为基础，用摄动方法在某种近似程度上求出原来的弱非线性系统的解。所以，摄动方法常常是分析弱非线性系统的有力工具。

在数学上，摄动方法也常被用来进行近似计算或分析某些数学对象（例如，方程的解、积分的值等）。

除此而外，还可以举出很多可以用摄动方法解决的问题。

如果考虑到任何一种客观事物与它的数学模型之间总有一些差异我们很容易想到：几乎在每一个使用数学模型对客观对象进行定量分析的场合，摄动方法都可能是有用的。

根据摄动对原问题的影响是否“怪僻”（诸如：发生突变，逼近不均匀等等），通常把摄动方法分成 正规摄动方法（regular perturbation method）与奇异摄动方法（singular perturbation method）两类，前者比较简单，后者则花样繁多，情况相当复杂，是一个日益引起人们重视研究方向。

作为一种应用数学工具，在使用摄动方法的过程中，必须把数学分析过程与物理直观概念结合起来，从物理概念取得启发，得出解答后还应该进行物理解释，并与实际现象相印证。在这个过程中不论在概念上和技巧上都有相当大的灵活性，不应也不能墨守成规所以，也可以说，摄动方法实际上有着很强的艺术性。

二、 一些数学预备知识

这里我们介绍一些将要使用的数学符号、记法、定义等预备知识。

1. 如果一个数 a，满足关系式

$$3\cdot 10^{n-1} < |a| \leq 3\cdot 10^{n} \qquad (n\text{是一个整数})$$

我们就说：a 的量级是 10^{n}

2. $f_{(x)}$和$\varphi_{(x)}$是定义在定义域 S 上的两个函数，a 是 S 中的一个点。

(i) 如果比值$f_{(x)}/\varphi_{(x)}$在 S 上有界，亦即存在一正数 K 使得

$$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right| < K \qquad x\in S$$

我们就记

$$f_{(x)} = O\left(\varphi(x)\right)$$

(ii) 对于一个极限过程 $x\to a$，$a\in S$ 而言，如果在 a 的

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongb

某一邻域 $|x-a|<\varepsilon$（ε为某一正数）内，比值 $f(x)/\varphi(x)$ 有界，我们也记

$$\text{对于 } x\to a \qquad f(x)=O(\varphi(x))$$

如果极限过程是不言而喻的，"对于 $x\to a$"这一条件陈述也可以省略，这个约定也适用于（iii）和（iv）

（iii） 如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=0$，

我们就记 $f(x)=o(\varphi(x))$。

（iv） 如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=1$，

我们就记 $f(x)\sim\varphi(x)$

3. 如果有一个函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ $n=0,1,2,\cdots\cdots$ 对于一个极限过程 $x\to a$（a可以是∞）而言，满足下列二条件就称这个序列为 $x\to a$ 时的渐近序列

（a） $\varphi_0(x)=1$

（b） $\varphi_{n+1}(x)=o(\varphi_n(x))$

4. 如果对于一个函数 $f(x)$ 和一个极限过程 $x\to a$，存在一串（与x无关的）系数 a_0，a_1，a_2，……和一个渐近序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 使得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi_k(x)+o(\varphi_n(x)) \quad n=0,1,2\cdots$$

我们就称级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\varphi_k(x) \qquad (S)$$

为函数 $f(x)$ 的渐近展开式（asymptotic expansion），记做

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \tag{A}$$

请注意：渐近级数（S）不一定收敛，（A）的实际含义只是：对于任意一个 n，估值式

$$f(x) = a_0\varphi_0(x) + \cdots\cdots + a_n\varphi_n(x)$$

的误差都是 $o[\varphi_n(x)]$ 或者 $O[\varphi_{n+1}(x)]$

5. 函数 $f(x)$ 定义在一个区域 R 上，$[\varphi(x;\ t)]$ 是定义在 R 上以 t 为连续参数的函数族，如果对于任意一个正数 ε，总是存在一个与 X 无关的正数 δ_ε，使下列事实成立：只要 t 与某一固定常数 a 的距离不超过 δ，即 $|t-a|<\delta_\varepsilon$，对于任意一个 $x\varepsilon R$ 都有 $|f(x)-\varphi(x;t)|<\varepsilon$。这时我们就说当 $t\to a$ 时 $\varphi(x;t)$ 在 R 上一致收敛于 $f(x)$。（对于 a 是 ∞ 的情况，也有类似的定义）

三、摄动理论问题的数学提法

在系统理论或其他数学、物理、工程等方面的数学模型中，常常会遇到这样一类问题：在这个问题中包含有一个或若干个小参数 ε_i，$i=1, 2, \cdots\cdots, m$，我们把这个小参数组记做

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\cdots, \varepsilon_m)$$

这个 ε 会出现在描述这个问题的方程（代数方程、微分方程、差分方程等等）和相应的定解条件（初始条件、边界条件、约束条件等等）之内。

我们把这个问题称为 P_ε，当 ε 取 0 值时 $\varepsilon=0$，相应的问题 P_0，就称为问题 P_ε 的退化问题或基础问题，$P\varepsilon$ 称为（对于 P_0

的）摄动问题。

限于篇幅，我们将只讨论 $m=1$，而问题是由微分方程（包括其退化形式——代数方程）表示的摄动问题。它们的数学形式是：

$$P_\varepsilon:\begin{cases} D_\varepsilon[y(x;\varepsilon)]=f(x,\varepsilon) & x\in R \quad (3\cdot1)\\ G_{\varepsilon,i}[y(x;\varepsilon)]=g_i(x;\varepsilon) & (i=1,2,\cdots K) \quad (3\cdot2)\end{cases}$$

其中 $y(x;\varepsilon)$ 是待求的解，f 和 g_i 均为已知函数，R 是 y 的定义域 B 是 R 的边界，D_ε 和 $G_{\varepsilon,i}$ 分别是定义在 R 和 B 上的微分算子。ε 就是表示摄动作用的小参数。$|\varepsilon|\ll1$，不失一般性，可以假定 $\varepsilon\geqq0$。

（3·1）是问题 P_ε 的方程，（3·2）是它的边界条件。

在（3·1）和（3·2）中，令 $\varepsilon=0$ 即得退化问题（基础问题）P_0 的数学形式。

粗略地说，摄动理论所要研究的就是下列两个主要问题：

(1)、能不能把 P_ε 的解表示成下列展式？

$$y(x;\varepsilon)=y_0(x)+\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(\varepsilon)Y_k(x)+R_n(x;\varepsilon) \qquad (3\cdot3)$$

其中 $Y_0(x)$ 是退化问题 P_0 的解，$\{\varphi_k(\varepsilon)\}$ 是一个以 ε 为自变数的渐近序列（对于 $\varepsilon\to0$ 而言），$R_n(x;\varepsilon)$ 表示余项。

(2)、对于展式（3·3），如何估计其余项 $R_n(x;\varepsilon)$？

如果已得到一个展式（3·3），而且对其余项可得估值式

$$R_n(x;\varepsilon)=O[\varphi_{n+1}(\varepsilon)] \qquad (3\cdot4)$$

我们就说

$$Y_0(x)+\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(\varepsilon)Y_k(x)$$

是$y(x;\varepsilon)$在X点的一个n阶渐近近似.

如果对所有$n>0$，（3·3）和（3·4）都成立，就称级数

$$Y_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(\varepsilon)Y_k(x)$$

为$Y(x;\varepsilon)$在X处的有效渐近展式，记做

$$Y(x;\varepsilon)\sim Y_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(\varepsilon)Y_k(x) \qquad (3\cdot6)$$

如果（3·3）和（3·4）对所有$x\in R$都成立，我们就称（3·3）为解$Y(x;\varepsilon)$在R上的一致有效渐近展开式。

在大多数实际问题中，$\varphi_k(\varepsilon)=\varepsilon^k$，这时，（3·6）就取幂级数形式。

如果摄动问题P_ε的解$Y(x;\varepsilon)$在R上有一个一致有效的渐近幂级数展式.

$$Y(x;\varepsilon)\sim Y_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k Y_k(x) \qquad (3\cdot7)$$

我们就说P_ε是一个正则摄动问题（regular perturbation problem）；一切非正则的摄动问题统称之为奇异摄动问题（singular perturbation problem）。

例如，下列三种情况都属于奇异摄动问题：

(i)、当$\varepsilon=0$时，问题P_0无解.

(ii)、问题P_0的解不唯一；

(iii)、P_0虽然有唯一解$Y_0(x)$，但问题P_ε不存在（3·7）形式的一致有效渐近展式。

以上的叙述比较抽象，下面我们将结合一些典型的具体例题说明摄动方法的概貌和基本方法。

四、摄动方法的初等考虑

在这一部分里，我们将通过例题极简单地介绍一下几种十分简单的摄动方法，这些方法几乎人人都可以想到，但是，我们的目的是通过这个介绍使读者了解到摄动问题的解决并不象想象中那样简单，相反，在实际解决问题的过程中常会碰到许多需要深刻考虑才能解决的困难问题。

1、级数法（摄动级数法）

例1、解下列定解问题P_ε

$$P_\varepsilon:\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y;\varepsilon) & (4\cdot1)\\ X=X_0\text{时},\ Y=Y_0\end{cases}$$

其中$f(x,y;\varepsilon)$是已知函数，ε是一个小参数，（4·1）是微分方程，（4·2）是初始条件。

假设退化问题P_0的解$Y(x;0)$容易求得，现假定P_ε的解可写成ε的幂级数形式：

$$Y(x;\varepsilon)=Y^{(0)}(x;0)+\varepsilon Y^{(1)}(x,0)+\varepsilon^2 Y^{(2)}(x,0)+\cdots\qquad(4\cdot3)$$

其中$Y^{(0)}$即是P_0的解，根据Taylor展开的公式，ε^n的系数，

$$Y^{(n)}(x;0)=\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n y(x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0}$$

现在设法求出这些$Y^n(x;0)$　（$n=1, 2, \cdots\cdots$）

把（4·3）代入方程（4·1）

$$\frac{d}{dx}\left[Y^{(0)}(x;0)+\varepsilon y^{(1)}(x;0)+\cdots\right]$$
$$=f\left[x;\ Y^{(0)}(x,0)+\cdots\cdots;\ \varepsilon\right] \quad (4\cdot4)$$

把（4·4）两端展开，并令ε的各次幂的系数相等，即得一系列方程（4·5·K）　$K=0, 1, 2\cdots\cdots$

$$\frac{dy^{(0)}}{dx}=f\left[x, y^{(0)}, 0\right] \qquad (4\cdot5\cdot0)$$

$$\frac{dy^{(1)}}{dx}=f_y\left(x, y^{(0)}, 0\right)y^{(1)}+f_\varepsilon\left[x, y^{(0)}0\right] \qquad (4\cdot5\cdot1)$$

…… …… …… ……

已假定$Y^{(0)}=Y(x;0)$已经求得，而且它还满足初始条件（4·2）根据假设（4·3）自然应假定方程（4·5·K）（$K=1, 2\cdots$）的初始条件应定为

$$Y^{(k)}(X_0, 0)=0 \qquad (4\cdot6)$$

这样由已知的$Y^{(0)}$即可按（4·5·1）解出$Y^{(1)}(x, 0)$，由已知的$Y^{(0)}$和$Y^{(1)}$又可以根据下一个方程（4·5·2）解出$Y^{(2)}(x;0)$，依此类推，我们就可以用递推的方式求出任意一个系数$Y^{(k)}(x;0)$，这样，从理论上说，我们就可以定出

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$Y(x;\varepsilon)$的展式（4·3）.

对于很多情况，级数法可以提供正确的解答。

例如，定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=1+(1+\varepsilon)y^2 & |\varepsilon|<<1 \\ x=0\text{时}，y=0 \end{cases} \tag{4·7}$$

P_ε的退化问题P_0是

$$P_0:\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=1+y^2 \\ x=0\text{时}，y=0 \end{cases}$$

容易解出，$y^{(0)}=\mathrm{tg}x$，相应于（4·5·1）的方程是

$$\frac{dy^{(1)}}{dx}=[y^{(0)}]^2+2y^{(0)}y^{(1)}=2y^{(1)}\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}^2x$$

由此又可解出，$y^{(1)}=\dfrac{x}{2}\sec^2x-\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}x$；递推下去就得

$$y=\mathrm{tg}x+\varepsilon\left(\frac{x}{2}\sec^2x-\frac{1}{2}\mathrm{tg}x\right)+\cdots\cdots \tag{4·8}$$

因为（4·7）可以求出闭合解

$$y(x;\varepsilon)=(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\mathrm{tg}[(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}x]$$

把这个解按ε展开即可验证（4·8）的确是正确解。

2　逐次逼近法（叠代法）

例2　数学单摆问题　考虑图1所表示的数学单摆，它的方程是

$$ml\ddot{\vartheta}=-mg\sin\vartheta$$

这个方程可写成

$$\ddot{\vartheta}+\omega_0^2\sin\vartheta=0\quad \omega_0=(g/l)^{\frac{1}{2}} \tag{4·9}$$

初始条件假定是：

$$t=0\text{时}，\quad \dot{\vartheta}=a \quad \dot{\vartheta}=\Omega \tag{4·10}$$

在通常的初等考虑中，人们常假定 ϑ 很小，以致（4·9）中的 $\sin\vartheta$ 项可用 ϑ 代替，因而非线性方程就化为线性方程

$$\ddot{\vartheta}+\omega_0^2\vartheta=0 \tag{4·11}$$

定解问题（4·11）和（4·10）的解极易求得，我们把它写成

$$\vartheta^{(0)}=a\cos\omega_0 t+\frac{\Omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t \tag{4·12}$$

ϑ_0 表示一个与最大振幅无关的简谐运动，其周期

$$T^{(0)}=2\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4·13}$$

然而，可以证明"真实系统（4·9）的运动周期是

$$T=T_0\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}d\varphi \tag{4·14}$$

其中 $k^2=\sin^2(\vartheta_m/2)$；$\vartheta_m=\max\limits_t|\vartheta(t)|$ 是最大振幅，由（4·14）可见，真实周期 T 是 ϑ_m 的增函数。当 $\vartheta_m=\frac{\pi}{18}=10°$ 时，由（4·14）可算出用 T_0 作为 T 的近似值，将会造成大约 2% 的误差。因此，如果用（4·12）表示幅角与时间的关系，只要经过不多几个周期就会发生相当大的差错，所以（4·12）除了提一个周期的近似值 T_0 之外，实在没有什么用处。为了克服这么个缺点我们把（4·9）改写成

$$\ddot{\vartheta}+\omega_0^2\vartheta=\omega_0^2(\vartheta-\sin\vartheta) \tag{4·15}$$

其所以这样做是因为

$$\vartheta - \sin\vartheta = \vartheta - \left(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} - \cdots\cdots\right) = \frac{\vartheta^3}{3!} - \frac{\vartheta^5}{5!} + \cdots = O(\vartheta^3)$$

或者说

$$\vartheta - \sin\vartheta \sim \frac{1}{6}\vartheta^3 = o(\vartheta)$$

可见（4·15）的右端与左端相比几乎可以忽略不计，于是我们就可以采用（4·12）中的 $\vartheta^{(0)}$ 作为 ϑ 的第0次近似。为了改进这个结果根据（4·15）可以把第1次近似 $\vartheta^{(1)}$ 的方程写成

$$\begin{cases} \ddot{\vartheta}^{(1)} + \omega_0^2\,\vartheta^{(1)} = \omega_0^2\left[\vartheta^{(0)} - \sin\vartheta^{(0)}\right] & (4\cdot16) \\ \vartheta^{(1)}(0) = a \qquad \dot{\vartheta}^{(1)}(0) = \Omega & (4\cdot17) \end{cases}$$

由于（4·16）的右端虽然是已知的时间函数，但形式过分复杂，使 $\vartheta^{(1)}$ 的求解极其繁重，但所获得的改进却又很少。所以，我们应该合理地把叠代方程（4·16）改写成

$$\ddot{\vartheta}^{(1)} + \omega_0^2\,\vartheta^{(1)} = \frac{\omega_0^2}{6}\left[\vartheta^{(0)}\right]^3 \qquad (4\cdot18)$$

由（4·18）和初始条件（4·17）即可算出 ϑ 的第一次近似 $\vartheta^{(1)} = \vartheta^{(1)}(t)$，用完全类似的办法，根据 $\vartheta^{(1)}$ 和叠代方程

$$\ddot{\vartheta}^{(2)} + \omega_0^2\,\vartheta^{(2)} = \frac{\omega_0^2}{6}\left[\vartheta^{(1)}\right]^3,$$

以及初始条件

$$\vartheta^{(2)}(0) = a \qquad \dot{\vartheta}^{(2)}(0) = \Omega$$

又可以求出第二次近似 $\vartheta^{(2)} = \vartheta^{(2)}(t)$，依此类推，可以把这个叠代过程进行到满足需要的程度。

3. 用摄动级数法解单摆问题

使用级数法时，引进下列无量纲（无因次）的新变量Ⓗ是有好处

的：

$$\Theta = \vartheta(t) / \vartheta m \qquad (4\cdot 19)$$

显然，总有 $|\Theta| \ll 1$，　方程（4·15）可改写成

$$\Theta + \omega_0^2 \Theta = \omega_0^2 (\Theta - \vartheta_m^{-1} \sin \vartheta_m \Theta) = \omega_0^2 \vartheta_m^2 \frac{\Theta^3}{6} + \cdots\cdots \qquad (4\cdot 20)$$

（4·20）的右端可以假定比 1 小得多，为简单起见，可以假定 $\Omega = 0$，从物理上可看出 $\vartheta_m = a > 0$，这样，问题就化为

$$P_a: \begin{cases} \Theta + \omega_0^2 \Theta = \omega_0^2 (\Theta - a^{-1} \sin a \Theta) \\ \quad = \omega_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (a^2)^n \dfrac{\Theta^{2n+1}}{(2n+1)!} & (4\cdot 21) \\ \Theta(0) = 1 \qquad \Theta(0) = 0 & (4\cdot 22) \end{cases}$$

如果 $a \ll 1$，就可以把它看做一个小参数，因而把 Pa 的解写成级数形式

$$\Theta = \Theta(t; a) = \Theta^{(0)}(t) + a\Theta^{(1)}(t) + a^2\Theta^{(2)}(t) + \cdots\cdots\cdots \qquad (4\cdot 23)$$

把（4·23）代入（4·21）比较 a 的各次幂的系数即可得出关于各个 $\Theta^{(n)}(t)$ 的一系列方程，结合初始条件：

$$t = 0\text{时} \quad \begin{matrix} \Theta^{(0)} = 1 & \Theta^{(0)} = 0 \\ \Theta^{(n)} = 0 & \Theta^{(n)} = 0 \quad n = 1, 2\cdots \end{matrix} \qquad (4\cdot 24)$$

即可定出各个 $\Theta^{(n)}(t)$。

Pa 的解（4·23）作为 a 的幂级数如果收敛自然很好，但是，即使不收敛，作为一个渐近展开式也常常能给出令人满意的结果。可以证明：只要 a 足够小，在任意一个有限时间区间 $0 \leq t \leq T$ 内

级数（4·23）是收敛的。然而这个解不能保证在很多个振荡周期内都合用。请看下列事实：可以算出

$$Θ^{(0)}=\cos\omega_0 t$$

$$Θ^{(1)}=0$$

$$Θ^{(2)}=\frac{1}{192}(\cos\omega_0 t-\cos 3\omega_0 t)+\frac{1}{16}\omega_0 t\sin\omega_0 t$$

在$Θ^{(2)}=Θ^{(2)}(t)$的表达式中出现了比固有频率高3倍的$\cos 3\omega_0 t$项，这种高次谐波是一种典型的非线性现象，更引起我们兴趣的是$t\sin\omega_0 t$项，这一项对整个$Θ=Θ(t)$的供献与$a^2\omega_0 t\sin\omega_0 t$成正比。这一项在整个时间间隔上并不一致地小，当$t\gg a^{-2}\omega_0^{-1}$时，这一项就变得相当大，以致于$a^2Θ^{(2)}(t)$就远不再是对退化解$Θ^{(0)}$的一个微小的2阶修正项了。因此，近似解$Θ^{(0)}+a^2Θ^{(2)}$只在一个不长的时间区间内有用，可以证明：在这个区间内$Θ^{(0)}$本身就是一个有用的近似。所以，（4·23）这样的解并没有什么用处。

包含$t\sin\omega_0 t$之类函数的项称为长期项（Secular term）这种项的特点是：不管小参数多么小，只要经过足够长的时间，这种项就会使摄动解与退化解之差之间形成巨大的偏差。

4 Poincare 的摄动方法

为了克服“初等”摄动方法可能出现长期项的缺点，H·Poincare在研究行星运动轨道的摄动问题时提出了一种改进的方法，这种方法的关键之点在于引进了一种参数表达式，而这种表达式体现了（4·14）所表示的周期与小参数的相关性

对于单摆问题的解，Peincare参数表达式是

$$\begin{cases}\Theta=\Theta^{(0)}(\tau)+a\Theta^{(1)}(\tau)+a^2\Theta^{(2)}(\tau)+\cdots & (4\cdot25)\\ t=\tau+at^{(1)}(\tau)+a^2t^{(2)}(\tau)+\cdots & (4\cdot26)\end{cases}$$

其中τ是一个参数，$t^{(k)}(\tau)$（$k=1,2,\cdots$）是τ的函数，(4·26)(4·26)的物理意义是引进一个与小参数a有关的新的“时间”变量τ，也就是用一个与a有关的可变的时间尺度表示时间。的具体形式的选取有相当大的自由度。因为$a\to0$时，$\tau\to t$，$\Theta(t)\to$(4·23)中的$\Theta^{(0)}(t)$。所以，(4·25)中的$\Theta^{(0)}(\tau)$就是(4·23)中的$\Theta^{(0)}(\tau)$简单地把变量t改写为τ的结果。

由(4·21)看出P_a的解只与a^2有关，所以，实际的展式(4·23)和(4·25)中a的奇次方项均应为0，为消除长期项我们把(4·26)变成下列形式：

$$t=\tau(1+a^2h_2+a^4h_4+\cdots\cdots)\ (h_2\text{是一个常数}) \qquad (4\cdot27)$$

根据(4·21)(4·25)和(4·27)可得$\Theta^{(2)}(\tau)$的微分方程

$$\frac{d^2\Theta^{(2)}}{d\tau^2}+\omega_0^2\Theta^{(2)}-2h_2\frac{d^2\Theta^{(0)}}{d\tau^2}=\frac{\omega_0^2}{24}(\cos3\omega_0t+3\cos\omega_0t) \qquad (4\cdot28)$$

因为$\Theta^{(0)}(\tau)=\cos\omega_0\tau$　　(4·28)即可化为

$$\frac{d^2\Theta^{(2)}}{d\tau^2}+\omega_0^2\Theta^{(2)}=\omega_0^2\left(\frac{1}{8}-2h_2\right)\cos\omega_0t+\frac{\omega_0^2}{24}\cos3\omega_0t, \qquad (4\cdot29)$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook