



# 尖子生

# 高分题库

从 **课本双基** 练到 **奥数培优**

丛书主编 ○ 叶立军  
本册主编 ○ 叶事一  
本册副主编 ○ 陈华云

高一





# 尖子生

# 高分题库

从 **课本双基** 练到 **奥数培优**

高一

丛书主编：叶立军

本册主编：叶事一

本册副主编：陈华云

编者：叶事一 吕杰富 庄迁福 刘保冬 李 勇 陈芝飞 陈国恩  
陈华云 陆 季 郑 克 项凯斌 苏 敏 郑多义

 华东理工大学出版社  
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

· 上海 ·

## 图书在版编目(CIP)数据

数学尖子生高分题库:从课本双基练到奥数培优. 高一/叶事一主编.  
—上海:华东理工大学出版社,2015.1  
(给力数学·数学尖子生高分题库/叶立军)  
ISBN 978-7-5628-4025-1  
I. ①数… II. ①叶… III. ①中学数学课—高中—习题集 IV. ①G634.605  
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 204201 号

给力数学

## 数学尖子生高分题库:从课本双基练到奥数培优(高一)

---

丛书主编 / 叶立军  
本册主编 / 叶事一  
本册副主编 / 陈华云  
策划编辑 / 庄晓明  
责任编辑 / 赵子艳  
责任校对 / 张波  
封面设计 / 裘幼华  
出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司  
地 址:上海市梅陇路 130 号, 200237  
电 话:(021)64250306(营销部)  
(021)64252718(编辑室)  
传 真:(021)64252707  
网 址:press.ecust.edu.cn

印 刷 / 常熟新骅印刷有限公司  
开 本 / 787 mm×1092 mm 1/16  
印 张 / 13.25  
字 数 / 295 千字  
版 次 / 2015 年 1 月第 1 版  
印 次 / 2015 年 1 月第 1 次  
书 号 / ISBN 978-7-5628-4025-1  
定 价 / 32.00 元

联系我们:电子邮箱 [press@ecust.edu.cn](mailto:press@ecust.edu.cn)  
官方微博 [e.weibo.com/ecustpress](http://e.weibo.com/ecustpress)  
淘宝官网 <http://shop61951206.taobao.com>





随着课程改革的不断深入,人人意识到学好数学的必要性,不同的人在学习数学上得到不同的发展等数学大众化的思想逐渐被人们接受.在高考面临改革的背景下,高中数学教育也正面临着前所未有的挑战与变革.

无论如何变革,学好数学,对每位高中生而言都是有百利而无一害的.

如何学好高中数学?方法是关键.

本书在内容编排上,结合当前高中数学教与学中的难点,兼顾数学尖子生应对奥数竞赛以及名校自主招生考试的需求,设置了以下栏目:

**【知识梳理】**对每一讲所要掌握的知识点进行了提纲挈领的归纳总结(包括主要公式、定理和常用的数学思想方法),促使学生对本讲的知识体系有一个全局的了解与认识,做到胸有成竹,从而提高学习效率.

**【典型例题】**精选典型例题,进行深入分析,对每一道题的解题关键点都一一进行了解读.

**【双基训练】**本单元的基础题,立足于教材本身,通过针对性训练打好基础知识和基本技能.

**【能力提升】**本单元的中档题,题目难度中等偏上,需要综合运用所学知识,适合中等程度的学生挑战数学高分.

**【拓展资源】**本单元的压轴题,面向数学尖子生,适合学有余力、准备参加奥数竞赛或参加名校自主招生考试的学生研读.

本书具有以下特点:

(1) 注重挖掘高中数学教材中的数学思想.高中数学教材主要包括以下几类数学思想:①转化思想;②方程思想;③数形结合思想;④函数思想;⑤整体思想;⑥分类讨论思想;⑦统计思想.同学们只要能够深入地理解上述思想方法,并能灵活地应用到具体的解题实践中,就能极大地提高解题能力.

(2) 注重通过针对性训练,锻炼学生的八大数学能力.这些能力分别是:①基础运算能力;②逻辑思维能力;③空间想象能力;④数学语言表达能力;⑤将实际问题抽象为数学问题的能力;⑥数形结合相互转化的能力;⑦观察、实验、比较、猜想、归纳问题的能力;⑧研究、探讨问题的能力和创新能力.

由于水平有限,书中不足之处在所难免,笔者真诚地希望得到读者的建议.

编者  
2014 年秋



1	第 1 讲	集合、函数及其表示
12	第 2 讲	函数的基本性质
22	第 3 讲	指数及其指数函数
32	第 4 讲	对数及其对数函数
42	第 5 讲	幂函数、初等(二次)函数及其应用
53	第 6 讲	函数的零点与二分法
63	第 7 讲	任意角的三角函数及诱导公式
71	第 8 讲	三角函数的图像与性质
82	第 9 讲	平面向量的线性运算
91	第 10 讲	平面向量的基本定理及坐标运算
99	第 11 讲	平面向量的数量积
108	第 12 讲	两角和与差的正弦、余弦和正切公式
116	第 13 讲	简单的三角恒等变换
124	第 14 讲	正弦定理和余弦定理
132	第 15 讲	等差数列
139	第 16 讲	等比数列
148	第 17 讲	不等式与不等式的解法
156	第 18 讲	二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题
166	第 19 讲	基本不等式
174	参考答案	

IDEA



# 第 1 讲

## 集合、函数及其表示



## 知识梳理

### 1. 集合

#### (1) 集合与元素

① 元素与集合的关系有且仅有两种：属于(用符号“ $\in$ ”表示)；不属于(用符号“ $\notin$ ”表示)，如  $a \in A, b \notin B$  等.

② 集合元素的三个特征：确定性、互异性、无序性.

③ 集合的表示法：列举法、描述法、图示法.

④ 常用数集：自然数集  $\mathbf{N}$ ，正整数集  $\mathbf{N}^*$  (或  $\mathbf{N}_+$ )，整数集  $\mathbf{Z}$ ，有理数集  $\mathbf{Q}$ ，实数集  $\mathbf{R}$ .

⑤ 集合的分类：有限集；无限集. 特别地，我们把不含有任何元素的集合叫作空集，记作  $\emptyset$ .

#### (2) 集合间的基本关系

##### ① 子集、真子集及其性质

对任意的  $x \in A$ ，都有  $x \in B$ ，则  $A \subseteq B$  (或  $B \supseteq A$ ).

若  $A \subseteq B$  且在  $B$  中至少有一个元素  $x \in B$ ，但  $x \notin A$ ，则  $A \subsetneq B$  (或  $B \supsetneq A$ )，

$\emptyset \subseteq A$ ； $A \subseteq A$ ； $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ .

若  $A$  含有  $n$  个元素，则  $A$  的子集有  $2^n$  个， $A$  的非空子集有  $2^n - 1$  个， $A$  的非空真子集有  $2^n - 2$  个.

##### ② 集合相等

若  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq A$ ，则  $A = B$ .

#### (3) 集合的运算及其性质

##### ① 集合的并、交、补

并集： $A \cup B = \{x \mid x \in A, \text{或 } x \in B\}$ ；

交集： $A \cap B = \{x \mid x \in A, \text{且 } x \in B\}$ ；

补集： $\complement_U A = \{x \mid x \in U, \text{且 } x \notin A\}$ ，

$U$  为全集， $\complement_U A$  表示  $A$  相对于全集  $U$  的补集.

##### ② 集合的运算性质

并集性质： $A \cup \emptyset = A$ ； $A \cup A = A$ ； $A \cup B = B \cup A$ ； $A \cup B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$ ；

补集性质： $A \cup (\complement_U A) = U$ ； $A \cap (\complement_U A) = \emptyset$ ； $\complement_U (\complement_U A) = A$ .

## 2. 函数

### (1) 函数的基本概念

#### ① 函数的定义

设  $A, B$  是非空的数集, 如果按照某种确定的对应关系  $f$ , 使对于集合  $A$  中的任意一个数  $x$ , 在集合  $B$  中都有唯一确定的数  $f(x)$  和它对应, 那么就称“ $f: A \rightarrow B$ ”为“从集合  $A$  到集合  $B$  的一个函数”, 记作  $y = f(x), x \in A$ .

#### ② 函数的定义域、值域

在函数  $y = f(x), x \in A$  中,  $x$  叫作自变量,  $x$  的取值范围  $A$  叫作函数的定义域.

与  $x$  的值相对应的  $y$  值叫作函数值, 函数值的集合  $\{f(x) | x \in A\}$  叫作函数的值域.

显然, 值域是集合  $B$  的子集.

#### ③ 函数的三要素: 定义域、值域和对应关系.

④ 相等函数: 如果两个函数的定义域和对应关系完全一致, 则这两个函数相等, 这是判断两个函数相等的依据.

### (2) 函数的表示法

表示函数的常用方法有: 解析法、图像法、列表法.

### (3) 映射的概念

设  $A, B$  是两个非空集合, 如果按某一个确定的对应关系  $f$ , 使对于集合  $A$  中的任意一个元素  $x$ , 在集合  $B$  中都有唯一确定的元素  $y$  与之对应, 那么就称“对应  $f: A \rightarrow B$ ”为“从集合  $A$  到集合  $B$  的一个映射”.

### (4) 函数与映射的关系

由映射的定义可以看出, 映射是函数概念的推广, 函数是一种特殊的映射, 要注意构成函数的两个集合  $A, B$  必须是非空数集.

## 典型例题

### 例 1

(1) 已知集合  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A = \{1, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$ , 则  $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = (\quad)$ .

A.  $\{1\}$                       B.  $\{5\}$                       C.  $\{2, 4\}$                       D.  $\{1, 2, 4, 5\}$

(2) 已知集合  $M = \{2, 3, a^2 + 4a + 2\}, N = \{0, 7, a^2 + 4a - 2, 2 - a\}$ , 且  $M \cap N = \{3, 7\}$ , 求实数  $a$  的值.

(3) 设全集  $U = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}, A = \{|2a - 1|, 2\}, \complement_U A = \{5\}$ , 求实数  $a$  的值.

**解析** (1) 由题意的  $\complement_U A = \{2, 4, 5\}, \complement_U B = \{1, 5\}$ , 得  $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{5\}$ , 故选 B.

- (2) 因为  $M \cap N = \{3, 7\}$ , 所以  $7 \in M$ , 所以  $a^2 + 4a + 2 = 7$ , 解得  $a = 1$  或  $a = -5$ .  
 当  $a = -5$  时,  $N$  中元素为  $0, 7, 3, 7$ , 这与集合中元素的互异性相矛盾, 故  $a = -5$  舍去;  
 当  $a = 1$  时,  $M = \{2, 3, 7\}$ ,  $N = \{0, 3, 7, 1\}$ , 所以  $M \cap N = \{3, 7\}$ , 符合题意, 所以  $a = 1$ .
- (3) 因为  $\complement_U A = \{5\}$ , 所以  $5 \in U$  且  $5 \notin A$ , 所以  $a^2 + 2a - 3 = 5$ , 解得  $a = 2$  或  $a = -4$ .  
 所以  $U = \{2, 3, 5\}$ .  
 当  $a = 2$  时,  $A = \{|2a - 1|, 2\} = \{3, 2\}$ ,  $A \subseteq U$ , 符合题意;  
 当  $a = -4$  时,  $A = \{|2a - 1|, 2\} = \{9, 2\}$ ,  $A$  不是  $U$  的子集, 故  $a = -4$  舍去, 所以  $a = 2$ .

## 例 2

设  $A = \{x | x^2 + 4x = 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$ .

(1)  $A \cap B = B$ , 求  $a$  的值; (2)  $A \cup B = B$ , 求  $a$  的值.

**解析** (1) 因为  $A \cap B = B$ , 所以  $B$  有四种可能情况:  $\emptyset, \{-4\}, \{0\}, \{-4, 0\}$ .

- ① 若  $B = \emptyset$ , 则  $\Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 1) < 0$ , 解得  $a < -1$ .  
 ② 若  $B = \{-4\}$ , 则方程  $x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0$  有两个相等的实根, 即  $-4$ .

$$\text{所以 } \begin{cases} -4 + (-4) = -2(a+1) \\ -4 \times (-4) = a^2 - 1 \\ \Delta = 8(a+1) = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } a \in \emptyset.$$

- ③ 若  $B = \{0\}$ , 同理可得  $a = -1$ .  
 ④ 若  $B = \{0, -4\}$ , 解得  $a = 1$ .

综上所述,  $a \leq -1$  或  $a = 1$ .

(2) 因为  $A \cup B = B$ , 则  $A \subseteq B$ . 所以  $A = \{-4, 0\}$ , 且  $B$  至多有两个元素, 则  $A = B$ , 又由 (1) 的解题过程知  $a = 1$ .

## 例 3

根据题意解决下列问题.

- (1) 求函数  $y = \frac{\sqrt{-x}}{2x^2 - 3x - 2}$  的定义域;  
 (2) 已知函数  $y = \sqrt{mx^2 - 6mx + m + 8}$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 求  $m$  的取值范围;  
 (3) 已知  $y = f(x+1)$  的定义域为  $[1, 2]$ , 求下列函数的定义域:  
 ①  $f(x)$ ; ②  $f(x-3)$ ; ③  $f(x^2)$ .

**解析** (1) ① 考查函数定义域的问题, 解题关键是明确使各函数表达式有意义的条件; ② 当一个函数是由两个或两个以上的数学式子的和、差、积、商的形式构成时, 定义域是使各个部分都有意义的公共部分的集合.

$$\begin{cases} -x \geq 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \neq 2 \text{ 且 } x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}, \text{ 所以 } x \leq 0 \text{ 且 } x \neq -\frac{1}{2}, \text{ 所以函数的定义域}$$

是  $\left\{x \mid x \leq 0 \text{ 且 } x \neq -\frac{1}{2}\right\}$ .

(2) 函数  $y$  的定义域是  $\mathbf{R}$ , 即要求对任意实数  $x$ ,  $mx^2 - 6mx + m + 8 \geq 0$  恒成立.

① 当  $m = 0$  时,  $y = \sqrt{8}$ , 其定义域是  $\mathbf{R}$ ;

② 当  $m \neq 0$  时, 要使  $mx^2 - 6mx + m + 8 \geq 0$  恒成立,

$$\text{只需 } \begin{cases} m > 0 \\ \Delta = 36m^2 - 4m(m+8) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < m \leq 1,$$

综上所述,  $m$  的取值范围为  $0 < m \leq 1$ .

(3) ① 因为  $f(x+1)$  的定义域为  $[1, 2]$ , 所以  $2 \leq x+1 \leq 3$ , 即  $f(x)$  的定义域为  $[2, 3]$ ;

② 因为  $f(x)$  的定义域为  $[2, 3]$ , 所以  $2 \leq x-3 \leq 3$ , 所以  $5 \leq x \leq 6$ , 即  $f(x-3)$  的定义域为  $[5, 6]$ ;

③ 因为  $f(x)$  的定义域为  $[2, 3]$ , 所以  $2 \leq x^2 \leq 3$ , 所以  $\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3}$  或  $-\sqrt{3} \leq x \leq -\sqrt{2}$ , 即  $f(x^2)$  的定义域为  $[-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ .

#### 例 4

(1) 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & (x \leq 0) \\ 2 & (x > 0) \end{cases}$ , 若  $f(-2) = f(0)$ ,  $f(-1) = -3$ , 求关于  $x$  的方程  $f(x) = x$  的解;

(2) 设函数  $g(x) = x^2 - 2 (x \in \mathbf{R})$ ,  $f(x) = \begin{cases} g(x) + x + 4 & (x < g(x)) \\ g(x) - x & (x \geq g(x)) \end{cases}$ , 则  $f(x)$  的值域是( ).

A.  $\left[-\frac{9}{4}, 0\right] \cup (1, +\infty)$

B.  $[0, +\infty)$

C.  $\left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$

D.  $\left[-\frac{9}{4}, 0\right] \cup (2, +\infty)$

**解析** (1) 首先, 我们观察条件中  $f(-2)$ ,  $f(0)$ ,  $f(-1)$  所适合的解析式是  $f(x) = x^2 + bx + c$ , 所以可构建方程组求出  $b, c$  的值. 另外, 在方程  $f(x) = x$  中,  $f(x)$  用哪个解析式, 要进行分类讨论.

当  $x \leq 0$  时,  $f(x) = x^2 + bx + c$ , 因为  $f(-2) = f(0)$ ,

$$f(-1) = -3, \text{ 所以 } \begin{cases} (-2)^2 - 2b + c = c \\ (-1)^2 - b + c = -3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b = 2 \\ c = -2 \end{cases}.$$

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & (x \leq 0) \\ 2 & (x > 0) \end{cases}.$$

当  $x \leq 0$  时, 由  $f(x) = x$  得,  $x^2 + 2x - 2 = x$ ,

得  $x = -2$  或  $x = 1$ . 因  $x = 1 > 0$ , 所以舍去.

当  $x > 0$  时, 由  $f(x) = x$  得  $x = 2$ ,

所以方程  $f(x) = x$  的解为  $-2$  或  $2$ .

(2) 由  $x < g(x)$ , 得  $x < x^2 - 2$ , 所以  $x < -1$  或  $x > 2$ ;

由  $x \geq g(x)$ , 得  $x \geq x^2 - 2$ , 所以  $-1 \leq x \leq 2$ .

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2 & (x < -1 \text{ 或 } x > 2) \\ x^2 - x - 2 & (-1 \leq x \leq 2) \end{cases}, \text{ 即 } f(x) = \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} & (x < -1 \text{ 或 } x > 2) \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} & (-1 \leq x \leq 2) \end{cases}.$$

当  $x < -1$  时,  $f(x) > 2$ ; 当  $x > 2$  时,  $f(x) > 8$ .

所以当  $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$  时, 函数的值域为  $(2, +\infty)$ ,

当  $-1 \leq x \leq 2$  时,  $-\frac{9}{4} \leq f(x) \leq 0$ , 所以当  $x \in [-1, 2]$  时, 函数的值域为  $\left[-\frac{9}{4}, 0\right]$

综上所述,  $f(x)$  的值域为  $\left[-\frac{9}{4}, 0\right] \cup (2, +\infty)$ .

### 例 5

已知函数  $f(x) = x^2 - 4ax + 2a + 6$  ( $a \in \mathbf{R}$ ).

(1) 若函数的值域为  $[0, +\infty)$ , 求  $a$  的值;

(2) 若函数的值域为非负数, 求函数  $g(a) = 2 - a|a + 3|$  的值域.

**解析** (1) 因为函数的值域为  $[0, +\infty)$ ,

$$\text{所以 } \Delta = 16a^2 - 4(2a + 6) = 0,$$

$$\text{所以 } 2a^2 - a - 3 = 0, \text{ 所以 } a = -1 \text{ 或 } a = \frac{3}{2}.$$

(2) 因为对一切  $x \in \mathbf{R}$  函数值均为非负,

$$\text{所以 } \Delta = 16a^2 - 4(2a + 6) = 8(2a^2 - a - 3) \leq 0.$$

$$\text{所以 } -1 \leq a \leq \frac{3}{2}, \text{ 所以 } a + 3 > 0,$$

$$\text{所以 } g(a) = 2 - a|a + 3| = -a^2 - 3a + 2$$

$$= -\left(a + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{4} \left(a \in \left[-1, \frac{3}{2}\right]\right).$$

因为二次函数  $g(a)$  在  $\left[-1, \frac{3}{2}\right]$  上单调递减,

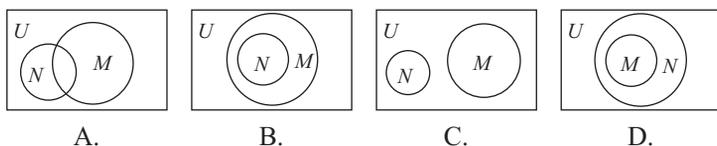
$$\text{所以 } g\left(\frac{3}{2}\right) \leq g(a) \leq g(-1).$$

$$\text{即 } -\frac{19}{4} \leq g(a) \leq 4.$$

$$\text{所以 } g(a) \text{ 的值域为 } \left[-\frac{19}{4}, 4\right].$$

## 双基训练

1. 如果全集  $U=\mathbf{R}$ ,  $A=\{x|2<x\leq 4\}$ ,  $B=\{3,4\}$ , 则  $A\cap(\complement_U B)$  等于 ( ).  
 A.  $(2,3)\cup(3,4)$     B.  $(2,4)$     C.  $(2,3)\cup(3,4]$     D.  $(2,4]$
2. 设集合  $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ ,  $B=\{4,5,6,7,8\}$ , 则满足  $S\subseteq A$  且  $S\cap B\neq\emptyset$  的集合  $S$  的个数是 ( ).  
 A. 57    B. 56    C. 49    D. 8
3. 已知全集  $U=\mathbf{R}$ , 则正确表示集合  $M=\{-1,0,1\}$  和  $N=\{x|x^2+x=0\}$  的关系的韦恩(Venn)图是 ( ).



4. 下列各组函数中, 表示同一函数的是 ( ).  
 A.  $f(x)=\sqrt{(x-1)^2}$ ,  $g(x)=x-1$     B.  $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ ,  $g(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$   
 C.  $f(x)=(\sqrt{x-1})^2$ ,  $g(x)=\sqrt{(x-1)^2}$     D.  $f(x)=x$ ,  $g(x)=\sqrt[3]{x^3}$
5. 下列函数中值域是正实数集的是 ( ).  
 A.  $y=\sqrt{x^2+1}$     B.  $y=2x+1$     C.  $y=x^2+x+1$     D.  $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
6. 函数  $f(x)=\begin{cases} x-2 & (x<2) \\ f(x-1) & (x\geq 2) \end{cases}$ , 则  $f(100)=($  ).  
 A. -1    B. 0    C. 1    D. 2
7. 下列选项中的两个函数具有相同值域的有 ( ) 个.  
 ①  $f(x)=x+1$ ,  $g(x)=x+2$ ; ②  $f(x)=\sqrt{x+1}$ ,  $g(x)=\sqrt{x+2}$ ;  
 ③  $f(x)=x^2+1$ ,  $g(x)=x^2+2$ ; ④  $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ ,  $g(x)=\frac{x^2}{x^2+2}$ .  
 A. 1 个    B. 2 个    C. 3 个    D. 4 个

8. 如图 1-1 所示的图像所表示的函数的解析式为 ( ).

- A.  $y=\frac{3}{2}|x-1|(0\leq x\leq 2)$   
 B.  $y=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}|x-1|(0\leq x\leq 2)$   
 C.  $y=\frac{3}{2}-|x-1|(0\leq x\leq 2)$   
 D.  $y=1-|x-1|(0\leq x\leq 2)$

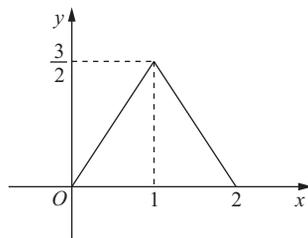


图 1-1

9. 已知  $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ , 则  $f(x)$  的解析式为( ).

- A.  $\frac{x}{1+x^2}$       B.  $-\frac{2x}{1+x^2}$       C.  $\frac{2x}{1+x^2}$       D.  $-\frac{x}{1+x^2}$

10. 函数  $y=f(x)$  与  $y=g(x)$  的图像如图 1-2(a)(b) 所示, 则函数  $y=f(x) \cdot g(x)$  的图像可能是( ).

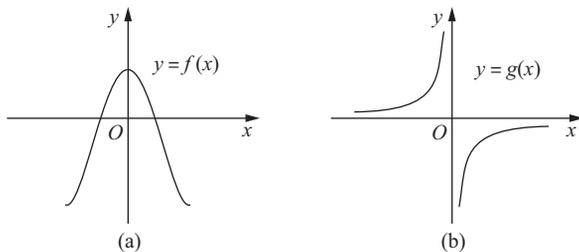
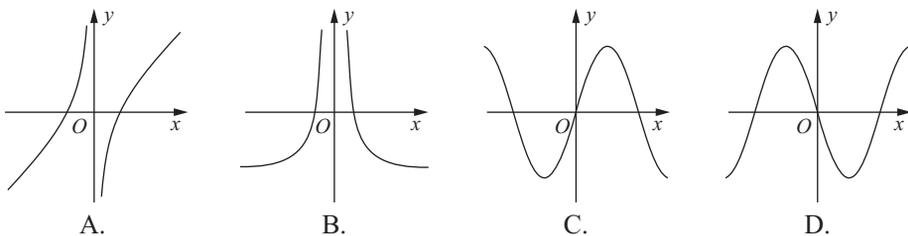


图 1-2



11. (1) 用列举法表示方程  $x^2+2x=0$  的解组成的集合\_\_\_\_\_；  
 (2) 用描述法表示被 4 整除余 1 的自然数的集合\_\_\_\_\_；  
 (3) 设集合  $A = \{(x, y) | x+y=5, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}^*\}$ , 使用列举法表示集合  $A =$ \_\_\_\_\_.
12. 函数  $f(x) = (\sqrt{x-1}-2)^0 + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$  的定义域是\_\_\_\_\_.
13. 已知集合  $A = \{1, 3, a\}$ ,  $B = \{1, a^2 - a + 1\}$ , 且  $B \subseteq A$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
14. 集合  $B = \{1, 2, 3\}$  的非空真子集有\_\_\_\_\_个.
15. 已知函数  $y = \frac{|x^2-1|}{x-1}$  的图像与函数  $y = kx - 2$  的图像恰有两个交点, 则实数  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
16. 方程  $|x^2 - 4x + 3| = a$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) 有 4 个实数解, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
17. 已知集合  $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 2mx + m^2 - 4 \leq 0, x \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{R}\}$ .
- (1) 若  $A \cap B = [0, 3]$ , 求实数  $m$  的值;  
 (2) 若  $A \subseteq \complement_{\mathbf{R}} B$ , 求实数  $m$  的取值范围.

18. 已知函数  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ ,

(1) 证明:  $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ ;

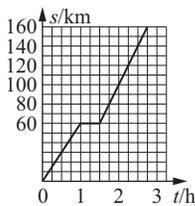
(2) 求  $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right)$  的值.

19. 已知函数  $f(x)$  的值域为  $\left[\frac{3}{8}, \frac{4}{9}\right]$ , 求函数  $g(x) = f(x) + \sqrt{1-2f(x)}$  的值域.

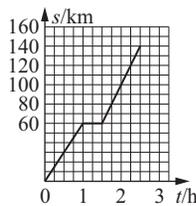
20. 已知函数  $f(x) = \frac{x}{ax+b}$  ( $a, b$  为常数且  $a \neq 0$ ) 满足  $f(2) = 1$ , 方程  $f(x) = x$  有唯一解, 求函数  $f(x)$  的解析式, 并求  $f[f(-3)]$  的值.

## 能力提升

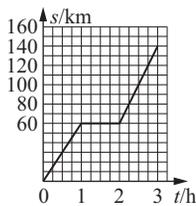
21. 客车从甲地以 60km/h 的速度匀速行驶 1h 到达乙地, 在乙地停留了半小时, 然后以 80km/h 的速度匀速行驶 1h 到达丙地, 下列描述客车从甲地出发, 经过乙地, 最后到达丙地所经过的路程  $s$  与时间  $t$  之间关系的图像中, 正确的是( ).



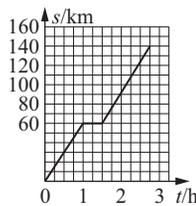
A.



B.



C.



D.

22. 若函数  $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & (x \leq 1) \\ x^2+x-2 & (x > 1) \end{cases}$ , 则  $f\left(\frac{1}{f(2)}\right)$  的值为( ).

A.  $\frac{15}{16}$

B.  $-\frac{27}{16}$

C.  $\frac{8}{9}$

D. 18

23. 设  $f(x) = \begin{cases} x^2 & (|x| \geq 1) \\ x & (|x| < 1) \end{cases}$ ,  $g(x)$  是二次函数, 若  $f[g(x)]$  的值域是  $[0, +\infty)$ , 则  $g(x)$

的值域是( ).

A.  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

B.  $(-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$

C.  $[0, +\infty)$

D.  $[1, +\infty)$

24. 设函数  $y=f(x)$  与函数  $g(x)$  的图像关于  $x=3$  对称, 则  $g(x)$  的表达式为( ).

A.  $g(x)=f\left(\frac{3}{2}-x\right)$  B.  $g(x)=f(3-x)$  C.  $g(x)=f(-3-x)$  D.  $g(x)=f(6-x)$

25. 对实数  $a$  和  $b$ , 定义运算“ $\otimes$ ”:  $a \otimes b = \begin{cases} a(a-b \leq 1) \\ b(a-b > 1) \end{cases}$ . 设函数  $f(x) = (x^2 - 2) \otimes$

$(x - x^2)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 若函数  $y = f(x) - c$  的图像与  $x$  轴恰有两个公共点, 则实数  $c$  的取值范围是( ).

A.  $(-\infty, -2] \cup \left(-1, \frac{3}{2}\right)$

B.  $(-\infty, -2] \cup \left(-1, -\frac{3}{4}\right)$

C.  $\left(-1, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$

D.  $\left(-1, -\frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$

26. 已知集合  $M = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ,  $N = \{x \mid ax + 1 = 0\}$ , 若  $N \subseteq M$ , 则由满足条件的实数  $a$  组成的集合  $P =$ \_\_\_\_\_.

27. 若函数  $f(x) = \frac{x-4}{mx^2+4mx+3}$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

28. 设函数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  满足  $f(0) = 1$ , 且对任意  $x, y \in \mathbf{R}$ , 都有  $f(xy+1) = f(x)f(y) - f(y) - x + 2$ , 则  $f(x) =$ \_\_\_\_\_.

29. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  图像如图 1-3 所示, 在区间  $[0, 4]$  上是抛物线的一部分.

(1) 写出函数的解析式;

(2) 当  $f(x) \geq 1$  时, 求  $x$  的取值范围.

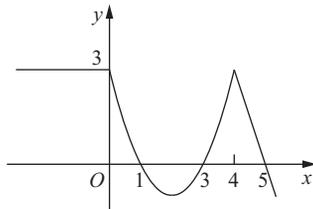


图 1-3

30. 已知定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $f(x)$  满足  $f(f(x) - x^2 + x) = f(x) - x^2 + x$ .

(1) 若  $f(2) = 3$ , 求  $f(1)$ , 若  $f(0) = a$ , 求  $f(a)$ ;

(2) 设有且仅有一个实数  $x_0$ , 使得  $f(x_0) = x_0$ , 求函数  $f(x)$  的解析表达式.

## 拓展资源

31. 若函数  $y=f(x)$  的值域是  $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ , 则函数  $F(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$  的值域是( ).

- A.  $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$       B.  $\left[2, \frac{10}{3}\right]$       C.  $\left[\frac{5}{2}, \frac{10}{3}\right]$       D.  $\left[3, \frac{10}{3}\right]$

32. 设函数  $f(x)$  是定义在  $(0, 1)$  上的函数, 且满足: ①对任意  $x \in (0, 1)$ , 恒有  $f(x) > 0$ ;

②对任意  $x_1, x_2 \in (0, 1)$ , 恒有  $\frac{f(x_1)}{f(x_2)} + \frac{f(1-x_1)}{f(1-x_2)} \leq 2$ , 则( ).

- A. 对任意  $x_1, x_2 \in (0, 1)$ , 且  $x_1 < x_2$ , 都有  $f(x_1) < f(x_2)$   
 B. 对任意  $x_1, x_2 \in (0, 1)$ , 且  $x_1 < x_2$ , 都有  $f(x_1) > f(x_2)$   
 C. 对任意  $x_1, x_2 \in (0, 1)$ , 都有  $f(x_1) = f(x_2)$   
 D. 以上都有可能

33. 具有性质  $f\left(-\frac{1}{x}\right) = -f(x)$  的函数, 我们称其为满足“倒负”变换的函数, 下列函数:

$$\textcircled{1} f(x) = x - \frac{1}{x}; \textcircled{2} f(x) = x + \frac{1}{x}; \textcircled{3} f(x) = \begin{cases} x & (0 < x < 1) \\ 0 & (x = 1) \\ -\frac{1}{x} & (x > 1) \end{cases}, \text{其中不满足“倒负”变}$$

换的函数是\_\_\_\_\_.

34. 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上且周期为 2 的函数, 在区间  $[-1, 1]$  上,  $f(x) = \begin{cases} ax+1 & (-1 \leq x < 0) \\ \frac{bx+2}{x+1} & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$ , 其中  $a, b \in \mathbf{R}$ . 若  $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right)$ , 则  $a+3b$  的值为\_\_\_\_\_.

35. 设  $[x]$  为表示不超过  $x$  的最大整数(如  $[2]=2, \left[\frac{5}{4}\right]=1$ ), 对于给定的  $n \in \mathbf{N}^*$ , 定义  $C_n^x = \frac{n(n-1)\cdots(n-[x]+1)}{x(x-1)\cdots(x-[x]+1)}, x \in [1, +\infty)$ , 则当  $x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right)$  时, 函数  $C_8^x$  的值域是( ).

- A.  $\left[\frac{16}{3}, 28\right]$       B.  $\left[\frac{16}{3}, 56\right)$   
 C.  $\left(4, \frac{28}{3}\right) \cup [28, 56)$       D.  $\left(4, \frac{16}{3}\right] \cup \left[\frac{28}{3}, 28\right)$



第2讲  
函数的基本性质