

高等数学：工科类

朱丽平 雷育红 主编



西北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:工科类/朱丽平,雷育红主编. —西安:西北
大学出版社, 2013. 9

ISBN 978-7-5604-3247-2

I. ①高… II. ①朱… ②雷 III. ①高等数学—高
等职业教育—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 182376 号

高等数学 (工科类)

主 编:朱丽平 雷育红

出版发行:西北大学出版社

地 址:西安市太白北路 229 号

邮 编:710069

电 话:029-88303313

经 销:全国新华书店

印 装:陕西奇彩印务有限责任公司

开 本:787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张:21

字 数:511 千字

版 次:2013 年 9 月第 1 版 2014 年 9 月第 2 次印刷

书 号:ISBN 978-7-5604-3247-2

定 价:36.00 元

前 言

高等数学是高职学生必修的一门重要课程. 高等数学的思想、内容和方法已成为现代文化的重要组成部分. 因此, 从全面提高素质来说, 高等数学是一门重要的基础课, 把握其思想方法能极大提升学生的认知能力; 从综合职业能力的培养来说, 高等数学又是学习后续课程以及社会生活、生产不可或缺的一门工具课.

本书是按照教育部最新制定的《高职高专教育高等数学基础课程教学基本要求》和编者在多年的教学实践的基础上, 针对高职学生基础状况及未来发展需要而编写的. 本书注重知识的基础性, 着重使学生能够掌握基本概念, 形成基本数学思想, 会用基本方法解决基本数学问题, 并且能进行知识的迁移, 把数学方法和数学思想应用于其他领域, 达到解决实际问题的目的. 针对高职院校学生教育的特点, 在保证数学知识结构的完整性、科学性的同时, 力求做到叙述详细、通俗易懂、例题较多、便于自学等优点, 又在保证教学基本要求的前提下, 扩大了适应面, 增强了伸缩性, 因此本教材可供高职高专工科类专业的学生使用.

本书中打*的内容主要是陕西省历年专升本试题, 供有余力的学生和专升本的学生学习, 故本教材也可供专升本学生作为复习资料使用.

本书的整个编写和出版过程得到了西安航空职业技术学院基础部领导和数学教研室全体同仁的支持和帮助. 本书由西安航空职业技术学院数学教研室朱丽平、雷育红担任主编, 并由朱丽平老师负责整本书的构思和策划, 同时完成全书的统稿. 具体章节编写分配为: 第一章、第二章、第三章和附录二由西安航空职业技术学院数学教研室朱丽平老师编写; 第四章、第五章、附录一和附录三由西安航空职业技术学院数学教研室雷育红老师编写; 第六章和第七章由西安航空职业技术学院数学教研室谢歆鑫老师编写; 第八章、第九章和第十一章由西安航空职业技术学院数学教研室张兰老师编写; 第十章由西安航空职业技术学院数学教研室郑雅茹老师编写. 全书由西安航空职业技术学院数学教研室李陆军和刘铁锁两位教授担任主审, 对他们的指导和关心, 我们表示衷心的感谢.

由于编者水平有限, 时间也比较仓促, 本书难免有不足之处, 敬请读者指正.

编 者

2013 年 8 月

目 录

第一章 函数、极限与连续	(1)
§ 1.1 函 数	(1)
§ 1.2 极 限	(11)
§ 1.3 极限的运算与两个重要极限	(16)
§ 1.4 无穷小量与无穷大量	(23)
§ 1.5 函数的连续性	(27)
* § 1.6 历年考题解析	(34)
* § 1.7 技能训练	(36)
本章自测题	(36)
第二章 导数与微分	(39)
§ 2.1 导数的概念	(39)
§ 2.2 导数的运算法则	(45)
§ 2.3 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数	(50)
§ 2.4 高阶导数	(53)
§ 2.5 函数的微分	(58)
* § 2.6 历年考题解析	(64)
* § 2.7 技能训练	(66)
本章自测题	(66)
第三章 导数的应用	(68)
§ 3.1 微分中值定理与函数的单调性	(68)
§ 3.2 洛必达法则	(73)
§ 3.3 函数的极值与最值	(77)
§ 3.4 曲线的凹凸性与拐点	(82)
* § 3.5 函数图像的描绘	(86)
* § 3.6 历年考题解析	(91)
* § 3.7 技能训练	(93)
本章自测题	(93)
第四章 不定积分	(96)
§ 4.1 不定积分的概念与性质	(96)
§ 4.2 不定积分的基本积分公式	(100)
§ 4.3 不定积分的第一类换元积分法	(104)
§ 4.4 不定积分的第二类换元积分法	(110)

§ 4.5 不定积分的分部积分法	(115)
* § 4.6 积分表的使用	(120)
* § 4.7 历年考题解析	(121)
* § 4.8 技能训练	(123)
本章自测题	(124)
第五章 定积分及其应用	(126)
§ 5.1 定积分的概念与性质	(126)
§ 5.2 微积分基本定理	(132)
§ 5.3 定积分的计算方法	(136)
§ 5.4 定积分的几何应用	(141)
* § 5.5 定积分的物理应用	(146)
* § 5.6 广义积分	(149)
* § 5.7 历年考题解析	(153)
* § 5.8 技能训练	(155)
本章自测题	(156)
第六章 微分方程	(159)
§ 6.1 微分方程的基本概念	(159)
§ 6.2 可分离变量的微分方程	(162)
§ 6.3 一阶线性微分方程	(166)
§ 6.4 二阶常系数齐次线性微分方程	(170)
* § 6.5 二阶常系数非齐次线性微分方程	(174)
* § 6.6 历年考题解析	(178)
* § 6.7 技能训练	(180)
本章自测题	(180)
第七章 向量代数与空间解析几何	(182)
§ 7.1 空间直角坐标系与向量代数	(182)
§ 7.2 空向量的数量积与向量积	(189)
§ 7.3 平面及其方程	(192)
§ 7.4 空间直线及其方程	(196)
§ 7.5 曲面与空间曲线	(199)
* § 7.6 历年考题解析	(207)
* § 7.7 技能训练	(207)
本章自测题	(208)
第八章 多元函数的微分学	(209)
§ 8.1 多元函数的概念、极限与连续	(209)
§ 8.2 偏导数	(213)
§ 8.3 全微分	(217)
§ 8.4 多元复合函数与隐函数的求导	(220)
§ 8.5 多元函数微分学的几何应用	(223)

§ 8.6 多元函数的极值	(226)
* § 8.7 历年考题解析	(232)
* § 8.8 技能训练	(233)
本章自测题	(233)
第九章 多元函数的积分学	(235)
§ 9.1 二重积分的概念与性质	(235)
§ 9.2 二重积分的计算	(238)
* § 9.3 历年考题解析	(243)
* § 9.4 技能训练	(245)
本章自测题	(245)
第十章 无穷级数	(247)
§ 10.1 常数项级数	(247)
§ 10.2 幂级数	(253)
§ 10.3 函数的幂级数展开	(258)
§ 10.4 函数的幂级数展开式的应用	(262)
* § 10.5 历年考题解析	(265)
* § 10.6 技能训练	(267)
本章自测题	(268)
第十一章 Matlab 与高等数学	(269)
§ 11.1 Matlab 语言入门	(269)
§ 11.2 Matlab 绘制一元函数的图像	(276)
§ 11.3 利用 Matlab 求一元函数的极限	(281)
§ 11.4 导数的计算	(283)
§ 11.5 Matlab 自定义函数与导数应用	(284)
§ 11.6 Matlab 一元函数积分的计算	(288)
§ 11.7 Matlab 求解常微分方程	(289)
§ 11.8 Matlab 空间图像的绘制	(291)
§ 11.9 Matlab 偏导数的计算	(292)
§ 11.10 Matlab 求重积分	(294)
§ 11.11 Matlab 求级数	(295)
附录一 初等数学常用公式	(298)
附录二 常用平面曲线及其方程	(302)
附录三 常用积分公式	(304)
参考答案	(312)
参考文献	(327)

第一章 函数、极限与连续

抽象产生提高,它可以帮助我们认识一些本质的东西,产生新的研究课题及成果;抽象便于推广,它可以使我们把一些不同领域的对象放在一起研究,并且将一个领域的突破推广到另一个领域. 无穷既能出现在一些最小的场合,也能出现在一些最大的场合. 它告诉我们:在小的东西中,没有最小,总有更小;在大的东西中,没有最大,总有更大;在好的东西中,没有最好,总有更好.

高等数学研究的主要对象是函数,而函数描述了客观世界中变量之间的依赖关系. 极限揭示了函数的变化趋势,同时也是一种解题思想和研究工具. 而连续是函数的一个重要形态,在刻画函数性态中有着举足轻重的地位. 函数、极限和连续是高等数学的基本概念,也是学习微积分的理论基础.

§ 1.1 函 数

1.1.1 函数的概念

1. 函数的定义

定义 1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的非空数集. 如果对于每一个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定的法则 f 总有唯一确定的数值与其对应, 则称 y 为 x 的函数. 记作 $y = f(x)$. 其中 x 称为自变量, y 称为函数或因变量.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时, 函数 y 的对应值 y_0 称为函数在点 x_0 处的函数值, 记作:

$$y_0 = f(x_0) \text{ 或 } y \Big|_{x=x_0} = f(x_0).$$

当 x 取遍 D 的各个数值时, 对应的函数值全体组成的数集(即函数的值域), 记作:

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

注:

① 在函数 $y = f(x)$ 中, 记号 f 表示自变量 x 与因变量 y 的对应关系, 也可以用其他字母如 F, φ, f_1, f_2 等表示, 这时函数记作 $y = F(x), y = \varphi(x), y = f_1(x), y = f_2(x)$.

② 注意对函数定义中的两个关键词“有”、“确定”的深层理解. 函数 y 的值无论是通过公式计算、查表、看图, 还是查阅资料、叙述、口答等任何形式, 只要“有”、“确定”的值即可. 所以函数含义的深远广大是初学者难以想象的, 人们身边的万事万物都存在着函数关系, 函数无处不在.

③ 函数的定义域通常由实际背景确定. 如果只给出解析表达式, 未指明定义域, 这时约定: 函数的定义域是这个解析表达式有意义的自变量所取实数的集合.

④ 函数不仅揭示了事物相互联系的规律,也向人们揭示了一种思想:“通过某一事实的信息去推知探究另一事实”.这种思想的认知、理解、掌握与运用将会使人们终身受用.

2. 函数的两要素

由函数定义可知,一个函数的构成要素为:定义域、对应关系和值域.由于值域是由定义域和对应关系决定,所以定义域 D 、对应关系(法则) f 构成了函数的两要素,二者缺一不可.故要判断两个函数是否相同,只需检验它们的定义域和对关系则是否相同即可.

例如,函数 $f(x) = \ln x^2$ 与 $g(x) = 2 \ln x$ 不是同一个函数,因为前者的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 后者的定义域是 $(0, +\infty)$.

3. 函数的表示法

函数的常用表示方法有三种,分别是解析法、表格法与图示法.

(1) 解析法:就是用数学表达式表示函数的方法.其优点是便于理论推导和计算.如在直角坐标系中 $y = 2x$.

(2) 表格法:就是将一系列自变量与对应的函数值列成表表示函数的方法.其优点是查表容易得到函数值,如三角函数表、对数表等.

(3) 图示法:就是用坐标系中的曲线或图像表示函数的方法.其优点是形象直观、能看到函数的变化趋势,如正弦曲线、双曲线等.

例 1 确定下列函数的定义域:

$$(1) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 6}} \quad (2) g(x) = \sqrt{3 + 2x - x^2} + \ln(x - 2)$$

解: (1) 要使得函数 $f(x)$ 有意义, x 需满足不等式 $x^2 - x - 6 > 0$, 解不等式得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$, 也可用集合形式表示为

$$D = \{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 3, x \in \mathbb{R}\}.$$

(2) 要使得函数 $g(x)$ 有意义, x 需满足不等式组 $\begin{cases} 3 + 2x - x^2 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$, 解不等式组得函数 $g(x)$ 的定义域 $(2, 3]$, 也可用集合形式表示为 $D = \{x \mid 2 < x \leq 3\}$.

例 2 设 $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$, 求 $f(-1), f(\frac{1}{a})(a > 0)$.

$$\text{解: } f(-1) = \sqrt{4 + (-1)^2} = \sqrt{5}, f(\frac{1}{a}) = \sqrt{4 + (\frac{1}{a})^2} = \sqrt{\frac{4a^2 + 1}{a^2}} = \frac{1}{a} \sqrt{4a^2 + 1}.$$

1.1.2 函数的四大特性

1. 函数的有界性

定义 2 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subseteq D$, 如果存在正数 M , 使得对于任意一个 $x \in X$ 所对应的函数值都满足不等式 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的正数 M 不存在, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如, 函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界, 因为对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$, $|\sin x| \leq 1$ 都能成立. 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内是无界的, 因为不存在正数 M , 使 $|\frac{1}{x}| \leq M$ 对于 $(0, 1)$ 内的一切 x 都成立. 而 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $[1, 2]$ 上是有界的. 可见函数的有界性与区间

有关.

2. 函数的单调性

定义 3 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subseteq D$, 如果对于区间 I 内任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 就称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增 (或单调递减).

注:

① 单调递增和单调递减的函数统称为单调函数.

② 区间 I 称为函数的单调区间, 单调区间可以是有限区间也可以是无限区间.

例如, 函数 $y = x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 内单调递增, 在 $(-\infty, 0]$ 内单调递减. 又如 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调递增.

3. 函数的奇偶性

定义 4 设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称 (即若 $x \in D$, 则必有一 $x \in D$). 如果对于任意一个 $x \in D$, 都有 $f(-x) = f(x)$ (或 $f(-x) = -f(x)$), 则称 $f(x)$ 为偶函数 (或奇函数).

注:

① 偶函数的图像关于 y 轴对称, 奇函数的图像关于原点对称.

② 显然, 在定义 4 中, 定义域关于原点对称的条件是必要的, 因为在非对称区间上根本就谈不上奇偶性. 如 $y = x^2$ 在 $x \in [1, 8)$ 上无从谈及奇偶性. 所以研究函数的奇偶性时必须指明对称区间.

例如, $y = x^2$ 与 $y = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是偶函数, $y = x^3$ 与 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是奇函数. 而 $y = x + 1 + \cos x$ 则既非奇函数也非偶函数.

4. 函数的周期性

定义 5 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个正数 T , 使得对于任一 $x \in D$ 有 $(x \pm T) \in D$, 且总有:

$$f(x+T) = f(x)$$

恒成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期.

注:

① 周期函数的周期 T , 通常是指满足上述条件的最小正周期.

② 周期函数若以 T 为周期, 则在每个长度为 T 的相邻区间上函数图像形状相同.

③ 周期函数若以 T 为周期, 则 nT ($n \in \mathbb{Z}$) 也是函数的周期.

例如, 函数 $\sin x, \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数; 函数 $\tan x, \cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

注: 当讨论函数时, 必须指明函数的定义域和函数在定义域的什么范围内具有什么性质.

1.1.3 反函数与复合函数

1. 反函数

世界万物, 变化万千, 交替往复. 运动的变量相互依赖、相互关联又相互转化. 函数的自变量与因变量的主从关系在实际问题中随着时间的推移、环境的变化、要求的改变也会发生位置的交换, 原来的自变量 (或因变量) 就变成了因变量 (或自变量), 这就产生了反函

数的概念.

(1) 反函数的定义

定义 6 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W . 如果对于 W 中的任一个 y 值, 都可以由关系式 $y = f(x)$ 确定出唯一的 x 值 ($x \in D$) 与之对应, 这样就确定了一个以 y 为自变量的新函数 $x = f^{-1}(y)$, 其定义域为 W , 值域为 D . $x = f^{-1}(y)$ 称为 $y = f(x)$ 的反函数, 此时, 它们互为反函数.

考虑作图、研究、思维等多方面因素, 习惯上用 x 表示自变量, y 表示因变量, 所以将 $y = f(x)$ 的反函数记作 $y = f^{-1}(x)$, 定义域为 W , 值域为 D .

(2) 求反函数步骤

① 反解 —— 由 $y = f(x)$ 反解出 $x = f^{-1}(y)$.

② 改写 —— x, y 互换, 得反函数 $y = f^{-1}(x)$.

③ 换域 —— 反函数的定义域为原函数的值域.

(3) 反函数的图像

$y = f^{-1}(x)$ 与 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

注:

① 互为反函数的定义域与值域正好互换.

② 并不是所有的函数都有反函数, 如 $y = C$ (常量) 就无反函数.

③ 只有 x 与 y 是一一对应的函数才有反函数, 即反对应关系是单值的, 多值对应无反函数. 多值对应时, 可将定义域适当分段, 使函数在所分各段上的反对应关系是单值的, 再分别求出各段的反函数.

如 $y = x^2, x \in \mathbb{R}, x = \pm\sqrt{y}$ 多值, 对应无反函数.

但如把定义域分成 $\mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup (0, +\infty)$ 则

当 $x \in (-\infty, 0]$ 时, $y = x^2$ 有反函数 $x = -\sqrt{y}$, 即 $y = -\sqrt{x}$.

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $y = x^2$ 有反函数 $x = \sqrt{y}$, 即 $y = \sqrt{x}$.

(4) 反三角函数

定义 7 我们把三角函数的反函数称为反三角函数.

常用的反三角函数有: 反正弦函数、反余弦函数、反正切函数与反余切函数.

$y = \arcsin x$ (反正弦函数) 是正弦函数 $y = \sin x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的反函数, 其定义域是 $[-1, 1]$, 值域是 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 并在定义域上 (严格) 单调递增 (图 1-1).

$y = \arccos x$ (反余弦函数) 是余弦函数 $y = \cos x$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的反函数, 其定义域是 $[-1, 1]$, 值域是 $[0, \pi]$, 并在定义域上 (严格) 单调递减 (图 1-2).

$y = \arctan x$ (反正切函数) 是正切函数 $y = \tan x$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的反函数, 其定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 并在定义域上 (严格) 单调递增 (图 1-3).

$y = \operatorname{arccot} x$ (反余切函数) 是余切函数 $y = \cot x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的反函数, 其定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $(0, \pi)$, 并在定义域上 (严格) 单调递减 (图 1-4).

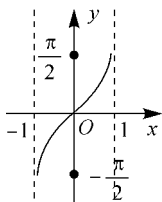


图 1-1

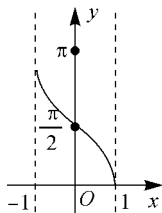


图 1-2

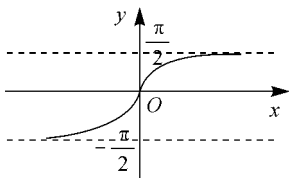


图 1-3

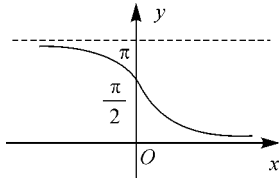


图 1-4

2. 复合函数

定义 8 如果 y 是 u 的函数, $y = f(u)$, 而 u 又是 x 的函数, $u = \varphi(x)$, 且 $u = \varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y = f(u)$ 的定义域内, 那么 y (通过 u 的关系) 也是 x 的函数, 把这样的函数叫作 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数, 简称复合函数, 记作 $y = f[\varphi(x)]$, 其中 u 称为中间变量.

注:

① 并不是任意两个或多个函数都能构成复合函数, 如 $y = \arcsin u$ 与 $u = x^2 + 3$ 便不能复合成一个函数, 因为 u 的值域为 $[3, +\infty)$, 不包含在 $y = \arcsin u$ 的定义域 $[-1, 1]$ 内.

② u 与 y 能复合的条件是 $u = \varphi(x)$ 的值域必须包含在函数 $y = f(u)$ 的定义域内.

③ “复合不同于加减乘除运算”, 它是一种既有传递又有制约的新运算.

例 3 指出下列函数的复合过程:

$$(1) y = \sin(1 - x^2) \quad (2) y = \tan^2 x \quad (3) y = \sqrt{x^2 + 2x - 8} \quad (4) y = \lg \sqrt{8x + 5}$$

解: (1) 函数 $y = \sin(1 - x^2)$ 由两个函数 $y = \sin u$ 与 $u = 1 - x^2$ 复合而成.

(2) 函数 $y = \tan^2 x$ 由两个函数 $y = u^2$ 与 $u = \tan x$ 复合而成.

(3) 函数 $y = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$ 由两个函数 $y = \sqrt{u}$ 与 $u = x^2 + 2x - 8$ 复合而成.

(4) 函数 $y = \lg \sqrt{8x + 5}$ 由三个函数 $y = \lg u$, $u = \sqrt{v}$ 与 $v = 8x + 5$ 复合而成.

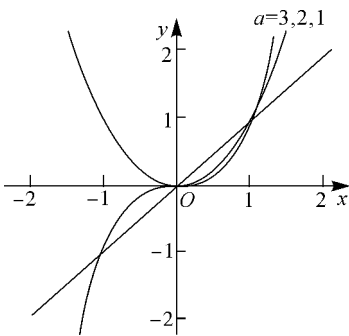
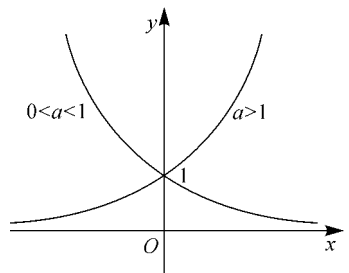
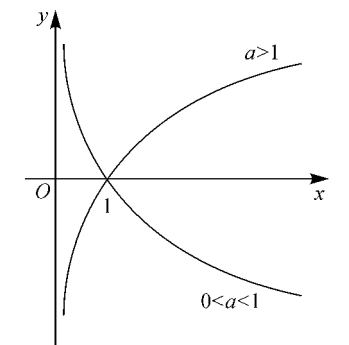
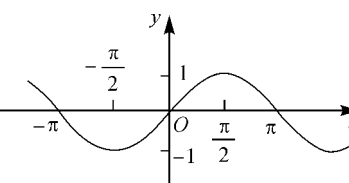
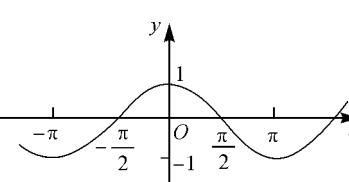
1.1.4 初等函数

1. 基本初等函数

定义 9 我们把常值函数、指数函数、对数函数、幂函数、三角函数与反三角函数统称为基本初等函数.

为了今后学习和查阅方便, 现将基本初等函数的定义域、值域、图像和简单性质列于表 1-1.

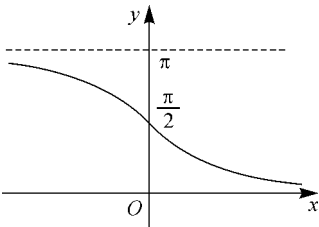
表 1-1 基本初等函数的图像及主要性质

函 数	定义域	值 域	图 像	性 质
幂函数 $y = x^a$ (a 为任意实数)	随着 a 不同而不同, 但不论 a 取什么值, x^a 在 $(0, +\infty)$ 内总有定义	随着 a 不同而不同		若 $a > 0$, 则 $y = x^a$ 在 $[0, +\infty)$ 内单调递增; 若 $a < 0$, 则 $y = x^a$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减
指数函数 $y = a^x$ (a 是常数, $a > 0$, $a \neq 1$)	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$		$a^0 = 1$, 若 $a > 1$, a^x 单调递增; 若 $0 < a < 1$, a^x 单调递减; 直线 $y = 0$ 为函数的水平渐近线
对数函数 $y = \log_a x$ (a 是常数, $a > 0$, $a \neq 1$)	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$		$\log_a 1 = 0$, 若 $a > 1$, $\log_a x$ 单调递增; 若 $0 < a < 1$, $\log_a x$ 单调递减; 直线 $x = 0$ 为函数的铅直渐近线
正弦函数 $y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$		以 2π 为周期的周期函数, 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增, 奇函数, 有界
余弦函数 $y = \cos x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$		以 2π 为周期的周期函数, 在 $[0, \pi]$ 上单调递减, 偶函数, 有界

续表

函 数	定义域	值 域	图 像	性 质
正切函数 $y = \tan x$	$(2n-1)\frac{\pi}{2} < x < (2n+1)\frac{\pi}{2} (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$	$(-\infty, +\infty)$		以 π 为周期的周期函数, 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 奇函数. 直线 $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ 为函数的铅直渐近线($n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$)
余切函数 $y = \cot x$	$n\pi < x < (n+1)\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$	$(-\infty, +\infty)$		以 π 为周期的周期函数, 在 $(0, \pi)$ 上单调递减, 奇函数, 直线 $x = n\pi$ 为函数的铅直渐近线($n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$)
反正弦函数 $y = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$		单调递增, 奇函数
反余弦函数 $y = \arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$		单调递减
反正切函数 $y = \arctan x$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$		单调递增, 有界奇函数, 直线 $y = \pm \frac{\pi}{2}$ 为函数的水平渐近线

续表

函 数	定义域	值 域	图 像	性 质
反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, \pi)$		单调递减, 有界直线 $y = 0$ 及 $y = \pi$ 为函数的水平渐近线

2. 初等函数

定义 10 由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算所构成的, 并能用一个解析式表示的函数, 称为初等函数.

例 4 判断下列各函数是不是初等函数:

$$(1) y = \lg(x^2 + \sin x) \quad (2) y = \ln x + \arctan \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$$

解: (1) 由于 $y = \lg(x^2 + \sin x)$ 是由函数 $y = \lg u$ 与 $u = x^2 + \sin x$ 复合而成, 而 $u = x^2 + \sin x$ 是由 x^2 与 $\sin x$ 作加法运算构成, 因此 $y = \lg(x^2 + \sin x)$ 是初等函数.

(2) 由于 $y = \ln x + \arctan \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$ 可化为 $y = \ln x + u, u = \arctan v, v = \sqrt{w}, w = \frac{l}{k}, l = 1 + \cos x, k = 1 - \cos x$. 故 $y = \ln x + \arctan \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$ 是初等函数.

1.1.5 分段函数和建立函数关系举例

1. 分段函数

定义 11 在自变量的不同取值范围内, 用不同的解析式表示的函数, 称为分段函数.

注:

① 用几个解析式表示的分段函数是一个函数, 而不是几个函数.

② 分段函数在求值、求反函数、作图以及研究性质时, 是分段进行的, 呈现的图像却可以在一个坐标系中.

③ 分段函数是不是初等函数, 关键是看它能否用一个解析式表示. 如 $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 是初等函数. 而 $y = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ \sin x + 2, & x \leq 0 \end{cases}$ 就不是初等函数, 因为 y 无法用一个解析式表示出来.

例 5 设

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 < x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x < 3 \end{cases},$$

求 $f(-\frac{1}{2}), f(0), f(0.7), f(2)$ 及函数的定义域.

解: $f(-\frac{1}{2}) = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, f(0) = 2, f(0.7) = 2; f(2) = 2 - 1 = 1$. 函数定义域为 $(-1, 3)$.

2. 建立函数关系式举例

运用数学方法解决实际问题时,首先要建立数学模型,即建立函数关系.一般的步骤为:

- (1) 分析问题中哪些是变量,哪些是常量,分别用字母表示;
- (2) 根据所给条件,运用数学、物理、经济及其他知识,确定等量关系;
- (3) 具体写出解析式 $y = f(x)$,并指出其定义域.

例 6 有一块边长为 m 的正方形薄钢板,将它的四角分别剪去一个全等的小正方形后制作一只无盖盒子,试将盒子的体积表示成小正方形边长的函数(图 1-5).

解: 设剪去的小正方形的边长为 x ,盒子的体积为 V ,则盒子的底面积为 $(m - 2x)^2$,高为 x ,因此所求的函数关系为

$$V = x(m - 2x)^2 \quad x \in (0, \frac{m}{2}).$$

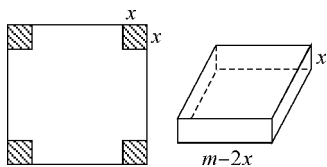


图 1-5

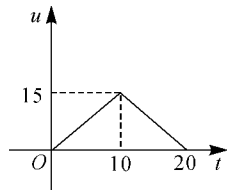


图 1-6

例 7 电脉冲发生器发出一个三角形的脉冲波(如图 1-6),求电压 u (伏) 和时间 t (微秒) 之间的函数关系式.

解: 在 0 到 10(微秒) 这段时间内,电压 u 由 0 直线上升到 15(伏),由图所给条件知这条直线方程是

$$u = \frac{15}{10}t = 1.5t \quad t \in [0, 10],$$

在 10 到 20(微秒) 这段时间内,电压 u 由 15(伏) 直线下降到 0,由图所给条件知这条直线方程是

$$u = -\frac{15}{10}t + 30 = -1.5t + 30 \quad t \in [10, 20],$$

故电压 u (伏) 和时间 t (微秒) 之间的函数关系式是

$$u = \begin{cases} 1.5t, & 0 \leq t < 10 \\ -1.5t + 30, & 10 \leq t \leq 20 \end{cases}.$$

1.1.6 邻域

邻域也是我们经常用到的一个概念.以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域,记作 $U(a)$.

定义 12 设 δ 是任意一正数,则开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 就是点 a 的一个邻域,这个邻域称为点 a 的 δ 邻域.记作 $U(a, \delta)$,即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}.$$

由于 $a - \delta < x < a + \delta$ 相当于 $|x - a| < \delta$, 因此 $U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}$. 因为 $|x - a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离, 所以 $U(a, \delta)$ 表示: 与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体. a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后, 称为点 a 去心 δ 邻域, 记作 $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$, 即

$$\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

这里 $0 < |x - a|$ 就表示 $x \neq a$.

为了方便, 有时把开区间 $(a - \delta, a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域, 记作 $U_-(a, \delta)$. 把开区间 $(a, a + \delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域, 记作 $U_+(a, \delta)$.

习题 1.1

1. 下列函数是否相同? 为什么?

$$(1) f(x) = x + 1, g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1};$$

$$(2) f(x) = |x|, g(x) = \sqrt{x^2}.$$

2. 求下列函数的定义域并判断其是否是初等函数:

$$(1) y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2};$$

$$(2) y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}};$$

$$(3) y = \arccos(x - 3);$$

$$(4) y = \begin{cases} x^2 + 1, & 1 < x < 2 \\ x^3 - 1, & 2 < x \leq 4 \end{cases}.$$

3. 求下列函数值:

$$(1) f(x) = x^2 - 3x + 2, \text{求 } f(0), f(1), f(h+1).$$

$$(2) \varphi(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}, \text{求 } \varphi(-1), \varphi(0), \varphi(\frac{1}{2}), \varphi(1), \varphi(\frac{5}{4}).$$

4. 判断下列函数的奇偶性:

$$(1) y = 3x^2 - x^6;$$

$$(2) y = \frac{a^x - 1}{a^x + 1} \quad (a > 0);$$

$$(3) y = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1});$$

$$(4) y = e^{-x^2} + x.$$

$$5. \text{设 } f(x) = 2x^2 + \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x} + 5x, \text{验证 } f(\frac{1}{x}) = f(x).$$

6. 下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的?

$$(1) y = \sin 4x;$$

$$(2) y = \lg(1 + 2x);$$

$$(3) y = e^{(x+1)^2};$$

$$(4) y = \cos^3(2x + 1).$$

7. 求下列函数的反函数:

$$(1) y = \sqrt[3]{x+1};$$

$$(2) y = \frac{1-x}{1+x};$$

$$(3) y = 1 + \ln(x+2);$$

$$(4) y = \frac{2^x}{2^x + 1}.$$

8. 某工厂有电子产品 1000 只, 每只定价为 130 元, 销售量在 700 只以内时, 按原价出售, 超过 700 只时, 超过部分打 9 折出售, 试将销售总收益与总销售量表示成函数关系.

§ 1.2 极 限

变量的变化趋势始终是人们关心的一个重要问题. 极限正是研究变化趋势的一个重要手段, 是从运动中认识问题、解决问题的重要的思维方法. 极限思想揭示了变量与常量、无限与有限的对立统一关系, 要学会使用极限的思想“从有限认识无限、从不变认识变、从直线认识曲线、从近似认识精确、从量变认识质变”.

1.2.1 数列的极限

我国古代哲学著作《庄子》里有一句话:“一尺之棰, 日取其半, 万世不竭.” 这句话的意思是: 如果每天剩余量为 y , 则 y 为天数 n 的函数, 即 $y = f(n) = \frac{1}{2^n}$, 当 $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ 时, 对应的数列为

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

显然, 随着天数 n 的增加, 剩余量 $y = \frac{1}{2^n}$ 越来越小, 且无限趋近于零, 但又永远不会等于零. 如果用数轴上的点表示数列各项的值(图 1-7), 则随着 n 的增大, 对应点与原点的距离越来越近, 但永远达不到原点. 为分析这一问题, 我们引入数列极限的概念.

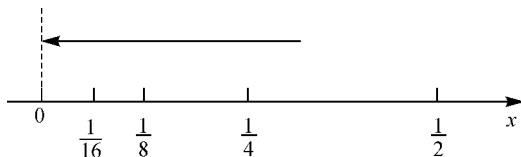


图 1-7

定义 1 设数列 $\{x_n\}$, 如果当数列的项数 n 无限增大时, 对应的数列的项 x_n 无限趋近于某一个确定的常数 A , 那么常数 A 就叫作数列 $\{x_n\}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限, 或称当 $n \rightarrow \infty$ 时数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A , 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \text{ 或 } x_n \rightarrow A \quad (n \rightarrow \infty).$$

如果当 n 无限增大时, 数列的项 x_n 不是无限趋近于某一个确定的常数, 则称数列 $\{x_n\}$ 没有极限, 或称数列 $\{x_n\}$ 发散.

例如, 对于数列 $\{x_n\} = \left\{ \frac{n+2}{n+3} \right\}$, 当项数 n 无限增大时, 数列的通项 $x_n = \frac{n+2}{n+3}$ 无限趋近于常数 1, 所以 1 是数列 $\left\{ \frac{n+2}{n+3} \right\}$ 的极限, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+3} = 1$.

例 1 考察下面数列的变化趋势, 试写出它们的极限:

$$\begin{aligned} (1) \{x_n\} &= \{-3\} & (2) \{x_n\} &= \left\{ \frac{1}{n^2} \right\} \\ (3) \{x_n\} &= \left\{ 2 - \frac{1}{3^n} \right\} & (4) \{x_n\} &= \left\{ (-1)^n \frac{1}{n} \right\} \end{aligned}$$