新世纪高等学校公共课重点建设教材

微积分

CALCULUS

（上）

王海敏　主编

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

微积分（上）

王海敏 主编

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分. 上 / 王海敏主编. —杭州：浙江工商大学出版社，2015.9

ISBN 978-7-5178-1236-4

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 192702 号

微积分(上)

王海敏 主编

责任编辑 吴岳婷 刘 韵

封面设计 鲍 涵

责任印制 包建辉

出版发行 浙江工商大学出版社

(杭州市教工路 198 号 邮政编码 310012)

(E-mail:zjgsupress@163.com)

(网址:http://www.zjgsupress.com)

电话:0571-88904980,88831806(传真)

排　　版 杭州朝曦图文设计有限公司

印　　刷 杭州五象印务有限公司

开　　本 787mm×960mm 1/16

印　　张 13.25

字　　数 274 千

版 印 次 2015 年 9 月第 1 版 2015 年 9 月第 1 次印刷

书　　号 ISBN 978-7-5178-1236-4

定　　价 30.00 元

浙江工商大学出版社营销部邮购电话 0571-88904970

前　　言

微积分是经济类和管理类专业本科生的一门数学基础课程。通过这门课的学习，不仅能为今后学习各类后继课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的连续量、离散量和随机变量方面的数学基础，还能得到抽象思维和逻辑思维能力的培养。

本教材是在多年教学实践基础上按照经济管理类本科数学基础课程教学的基本内容和要求来编写的。全书共分8章，分别介绍了一元函数微积分及其应用、多元函数微积分及其应用、无穷级数、常微分方程与差分方程初步等方面的基本概念、基本理论和基本方法。

在内容编写上，我们试图将严谨的理论推导和扎实的技巧训练结合在一起，并在使这两者之间达成合理的均衡方面做了些尝试。作为演绎学科论述微积分时，我们不忽视它对实际问题的应用。记住这样一点是十分重要的：微积分根深于实际问题，而且正是从种种应用中显示出它的力与美。在阐述每个重要的新概念之前，我们都会追溯由早期的直观概念到精确的数学描述的发展过程。这就把那些前人的努力和在本学科上最有贡献的人所取得的成就一一介绍给了读者。因此，读者在概念的发展中成了主动参与者，而不仅仅是结论的被动旁观者。我们对很多重要定理的证明常常以几何的或直观的讨论为前导，以使读者领会这些证明为什么要采取特定的形式。虽然这样的直观讨论已能满足那些对详细证明不感兴趣的读者，但对那些要求更严密表达方式的读者，我们也给出了完全的证明。

本教材的大纲和体系由集体讨论而定。第1、7章由袁中扬执笔，第2、4、5、8章由王海敏执笔，第3、6章由韩兆秀执笔，全书由王海敏统稿定稿。

本教材编写过程中参考了大量的国内外教材；浙江工商大学出版社对本书的编审和出版给予了热情支持和帮助，尤其是吴岳婷、刘韵老师在本书的编辑和出版过程中付出

了大量心血;浙江工商大学统计与数学学院自始至终对本书的出版给予了大力支持,在此一并致谢!

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,教材中一定存在不妥之处,恳请专家、同行、读者批评指正,使本书在教学实践中不断完善。

编　者

2015年6月于浙江工商大学

目　录

Contents

第 1 章　函数的极限与连续

“微积分学”是用来研讨变动事物的“变量数学”，我们用实数系去表达、计算各种“度量型”的量，如长度、质量、时间等；用变数符号来表达各种变量；用函数关系来表达一个事物或现象中各种变量之间的关联. 所以，微积分学也可以说是研究函数的一门数学.

微积分的基本方法就是极限方法. 极限方法的原理是以简御繁，是一种简单朴素的想法. 实用时，我们选用一类“已知的简”在某些性质上数量化地逼近所要研究的“未知的繁”；从而把原先未知的繁复问题简化成已知问题而加以解答.

本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质.

第 1 节　函　数

一、函数的概念

“函数”这个词是由莱布尼茨引进数学的，他使用这一术语主要是针对某种类型的数学公式. 其后，人们认识到莱布尼茨的函数概念在范围上太受限制，而这个词的意义从那时以来经历了许多阶段的推广. 今天，函数的意义本质上是这样的：给定两个集合，比方说 X 和 Y，函数是把 X 的每个元素和 Y 的一个且只有一个元素联系在一起的一个对应. 集合 X 叫作函数的定义域. 与 X 中的元素相联系的 Y 中的元素组成的集合称为函数的值域（它可以是也可以不是 Y 的全部）.

定义 1　设 D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x \in D$，按照一定对应法则 f，总有唯一确定的值 y 与之对应，则称 f 是 D 的函数，记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为**定义域**，记作 D_f，即 $D_f = D$.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$. 当 x 遍取 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集称为函数 f 的**值域**，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

英文字母和希腊字母常用来表示函数，除了常用的 f 外，还可用如 g, F, φ 等. 相应

地，函数可记作 $y=g(x)$，$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$ 等. 有时还直接用因变量的记号来表示函数，即把函数记作 $y=y(x)$. 但在同一个问题中，讨论到几个不同的函数时，为了表示区别，须用不同的记号来表示它们.

这里，我们把函数的定义域和对应法则称为函数的两个**基本要素**. 如果两个函数具有相同的定义域和对应法则，那么这两个函数就是相同的，与自变量、因变量采用什么样的符号无关.

函数的定义域通常约定是使函数表达式有意义的自变量的一切实数值所组成的数集，这种定义域称为函数的**自然定义域**. 另外，在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.

表示函数的方法主要有三种：解析法(公式法)、表格法和图形法，这在中学时大家已经熟悉. 其中，用图形法表示函数是基于函数图形的概念，即坐标平面上的点集

$$\{P(x,y) \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的**图形**(图 1-1).

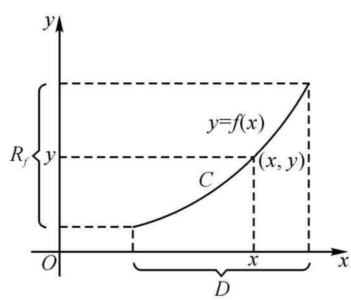

图 1-1

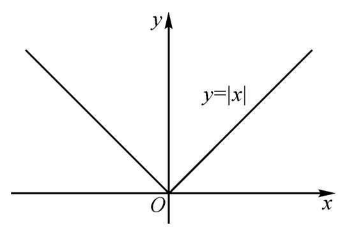

图 1-2

下面举几个函数的例子.

(1)函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

称为**绝对值函数**，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，其图形如图 1-2 所示.

(2)函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

称为**符号函数**，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，其图形如图 1-3 所示. 对于任何实数 x，下列关系成立：

$$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|.$$

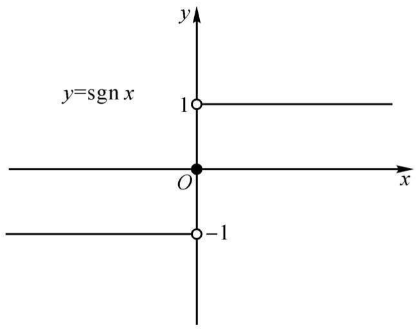

图 1-3

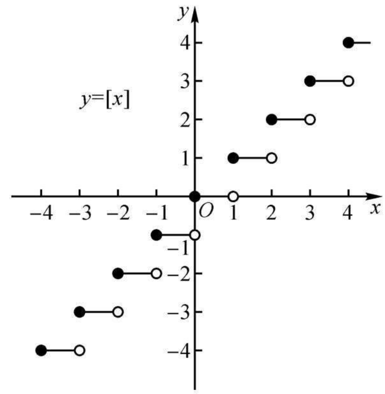

图 1-4

(3)函数

$$y=[x]$$

称为**取整函数**,其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\mathbf{Z}$,其图形如图 1-4 所示.例如,$[0.3]=0$,$[\sqrt{5}]=2$,$\left[-\dfrac{1}{3}\right]=-1$,$[-1]=-1$.

有时一个函数要用几个式子表示,这种在自变量的不同变化范围内,对应规则用不同式子来表示的函数,通常称为**分段函数**.

二、具有某种特性的函数

关于函数还有几个常用的概念必须作叙述,这些概念都和函数图形的几何特性有关.

1.有界函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subseteq D$.如果存在正数 M,使得对任一数 $x\in X$,都满足

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**,或称 $f(x)$ 为 X 上的**有界函数**;否则称为**无界函数**,这就是说,如果对于任何正数 M,总存在 $x_1\in X$,使得 $|f(x_1)|>M$,那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

函数有界的定义也可以这样表述:如果存在常数 M_1 和 M_2,使得对任一数 $x\in X$,都有

$$M_1<f(x)<M_2,$$

就称 $f(x)$ 在 X 上有界,并分别称 M_1 和 M_2 为 $f(x)$ 在 X 上的一个**下界**和**上界**.

不难看出,有界函数 $y=f(x)$ 的图形必介于两条平行线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间(如图 1-5).

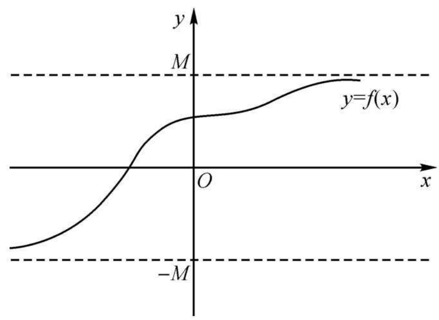

图 1-5

例如,余弦函数 $f(x)=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内,由于 $|\cos x|\leqslant 1$ 对任一实数 x 都成立,故函数 $f(x)=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的,这里 $M=1$(当然也可以取大于 1 的任何数作为 M).

又如函数 $y=\ln x$ 在开区间 $(0,\mathrm{e})$ 上有上界(如 1 就是它的一个上界),但没有下界,因而它是无界的.

2. 单调函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subseteq D$. 如果对于任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调递增**的;如果对于任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调递减**的. 单调递增函数和单调递减函数统称为**单调函数**.

单调递增函数在区间 I 上的图形是上升的曲线(图 1-6),单调递减函数在区间 I 上的图形是下降的曲线(图 1-7).

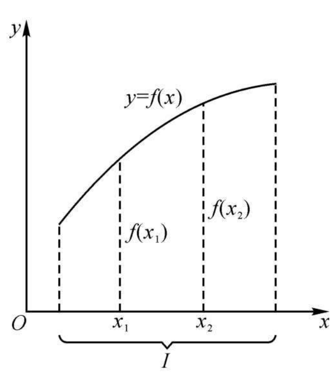

图 1-6

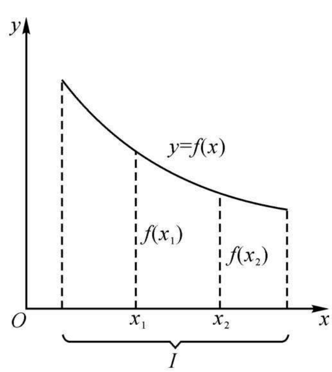

图 1-7

例如,函数 $y = x^2$ 在区间$(-\infty,0]$上是单调递减的,在区间$[0,+\infty)$上是单调递增的;在区间$(-\infty,+\infty)$上函数 $y = x^2$ 不是单调的.

3. 奇(偶)函数

设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 I 上有定义,如果对于任意的 $x \in I$,恒有 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**奇函数**. 如果对于任意的 $x \in I$,恒有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**偶函数**.

奇函数的图形关于原点中心对称(图 1-8),偶函数的图形关于 y 轴对称(图 1-9).

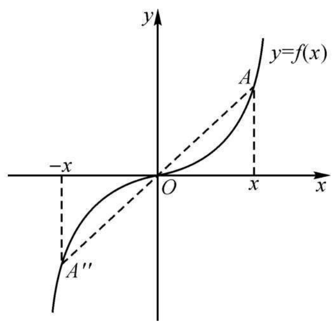

图 1-8

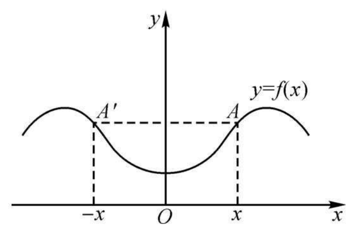

图 1-9

例如,函数 $y = x^n$,当 n 为奇数时为奇函数,当 n 为偶数时为偶函数. 这正是奇函数、偶函数名称的由来.

4. 周期函数

设函数 $f(x)$的定义域为 D. 如果存在一个正数 T,使得对于任意的 $x \in D$,有 $x+T \in D$,且

$$f(x+T) = f(x)$$

恒成立,则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**,T 称为 $f(x)$ 的一个**周期**. 满足上式的最小正数 T_0 称为 $f(x)$ 的**最小正周期**.

通常我们说的周期就是指最小正周期. 但并非每个周期函数都有最小正周期. 例如,**狄立克莱**(Dirichlet)**函数**

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \in \mathbf{Q}^c \end{cases}.$$

这个函数的图形是画不出来的,但可以作一些直观的想象:有无数多个点稠密地分布在 x 轴上,也有无数多个点稠密地分布在直线 $y = 1$ 上.

容易验证这是一个周期函数,任何正有理数 r 都是它的周期. 因为不存在最小的正有理数,所以它没有最小正周期.

如果 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数,则在这函数的定义域内,依次相接的每个长度为 T 的区间上,函数图形有相同的形状,如图 1-10 所示.

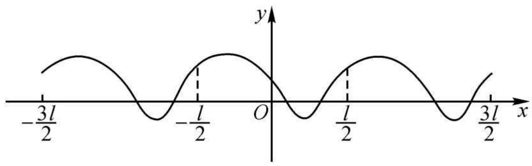

图 1-10

三、反函数与复合函数

定义 2 设函数 $y=f(x), x\in D$. 如果对任意的 $y\in f(D)$，都有唯一的 $x\in D$ 与之对应，且满足 $f(x)=y$，按此对应法则就能得到一个定义在 $f(D)$ 上的函数，称这个函数为 $f(x)$ 的**反函数**，记作

$$x=f^{-1}(y),\ y\in f(D).$$

由于习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，因而我们通常把上述反函数改写为

$$y=f^{-1}(x),\ x\in f(D).$$

根据反函数的定义，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域与值域是互换的，两者的图形在同一坐标平面上关于直线 $y=x$ 是对称的(图 1-11).

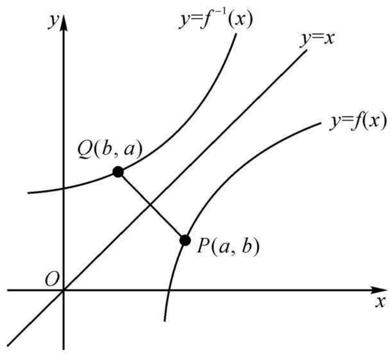

图 1-11

显然，由定义可知，单调函数一定有反函数.

例如，由 $y=e^x$，解得 $x=\ln y$，于是指数函数 $y=e^x$ 与对数函数 $y=\ln x$ 互为反函数.

定义 3 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_g，且其值域 $R_g\subseteq D_f$，则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)],\ x\in D_g,$$

称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的**复合函数**，变量 u 称为**中间变量**.

应该指出，函数 $u=g(x)$ 的值域不能超出函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_f，这是极其重要的.

例如,函数 $y=\sqrt{u+1}$,它的定义域为 $D=[-1,+\infty)$,再设函数 $u=x^2-5$,它的定义域为 $[-5,+\infty)$,作为复合函数 $y=\sqrt{(x^2-5)+1}=\sqrt{x^2-4}$,其定义域只能是 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$,这时 $u=x^2-5$ 的值域是 $[-1,+\infty)$,它没有超出 D 的范围.

又如,函数 $y=\sqrt{u-2}$,它的定义域为 $D_f=[2,+\infty)$,再设函数 $u=\sin x$,它的值域为 $R_g=[-1,1]$,由于 $R_g\cap D_f=\varnothing$,表达式 $\sqrt{\sin x-2}$ 没有任何意义,故上述两个函数不能构成复合函数.

四、基本初等函数

当人们将注意力集中在数量关系上时,他不是研究一个已知函数的性质,就是试图揭示一个未知函数的性质.函数的概念是如此广泛和普遍,以致在自然界中可以找到无数种类的函数是不足为奇的.奇怪的是一些相当特殊的函数支配了如此众多的完全不同类型的自然现象.这里我们将介绍这些函数,它们是常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数,这六类函数统称为**基本初等函数**.这里只对这些函数的有关知识作简单的综述,以供今后学习中查用.

1. 常值函数

$$y=c,$$

其中,c 为任意常数.

2. 幂函数

$$y=x^{\mu},$$

其中,μ 为任意常数,称为**幂指数**.

对于不同的 μ,幂函数的定义域及性质也随之不同,因而情况比较复杂.但不论 μ 为何值,x^{μ} 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义,而且图形都经过点 $(1,1)$.

当 μ 为正整数或零时,幂函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$;当 μ 为负整数时,幂函数的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

当 μ 为偶数时,x^{μ} 为偶函数;当 μ 为奇数时,x^{μ} 为奇函数.

当 $\mu>0$ 时,x^{μ} 在 $(0,+\infty)$ 单调增加;当 $\mu<0$ 时,x^{μ} 在 $(0,+\infty)$ 单调减少.

几个常见幂函数的图形如图 1-12,1-13 所示.

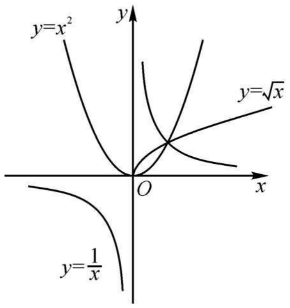

图 1-12

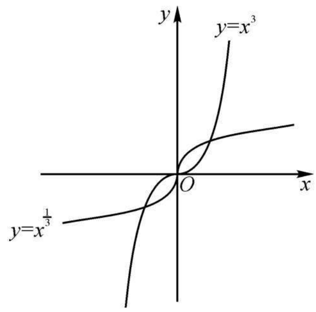

图 1-13

3. 指数函数

$$y = a^x,$$

其中,常数 $a > 0$, 且 $a \neq 1$.

定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, +\infty)$. 不论 a 取何值,函数 a^x 的图形均在 x 轴上方且通过点 $(0,1)$.

当 $a > 1$ 时,函数 a^x 单调增加;当 $0 < a < 1$ 时,函数 a^x 单调减少(图 1-14).

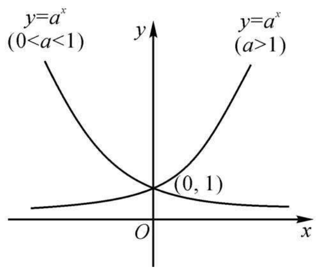

图 1-14

4. 对数函数

$$y = \log_a x,$$

其中,常数 $a > 0$, 且 $a \neq 1$, 称为对数的**底**. 变量 x 称为**真数**.

它的定义域为 $(0, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$. 对数函数是指数函数的反函数. $y = \log_a x$ 的图形与 $y = a^x$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称,总位于 y 轴的右侧且通过点 $(1,0)$.

当 $a > 1$ 时, $\log_a x$ 单调增加;当 $0 < a < 1$ 时, $\log_a x$ 单调减少(图 1-15).

常用的对数有以 10 为底和以 e 为底的,这里

$$\mathrm{e}=2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\cdots$$

是一个极其重要的无理数. 前者 $\log_{10} x$ 称为**常用对数**,简记为 $\lg x$; 后者 $\log_{\mathrm{e}} x$ 称为**自然对数**,简记为 $\ln x$.

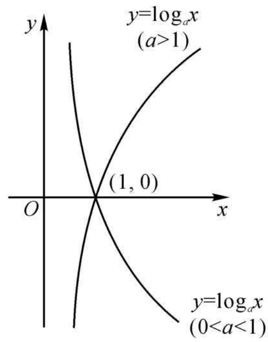

图 1-15

5. 三角函数

正弦函数　$y = \sin x$　(图 1-16),

余弦函数　$y = \cos x$　(图 1-17),

正切函数　$y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$　(图 1-18),

余切函数　$y = \cot x = \dfrac{1}{\tan x}$　(图 1-19),

正割函数　$y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$　(图 1-20),

余割函数　$y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$　(图 1-21).

正弦函数和余弦函数的定义域均为区间$(-\infty,+\infty)$,值域均为闭区间$[-1,1]$,它们都是周期为 2π 的有界函数.

正弦函数是奇函数,余弦函数是偶函数.

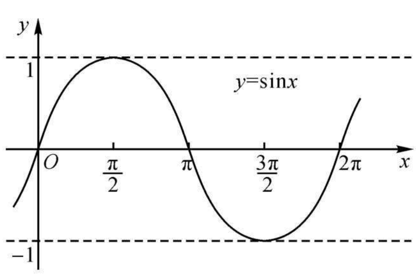

图 1-16

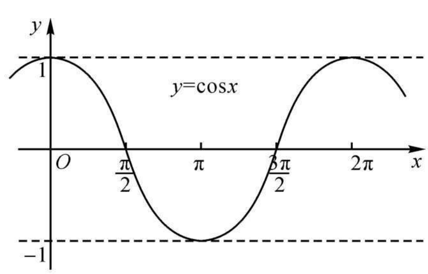

图 1-17

正切函数的定义域为

$$\{x \mid x\in \mathbf{R},\ x\neq \frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in \mathbf{Z}\}.$$

余切函数的定义域为

$$\{x \mid x \in \mathbf{R},\ x \neq n\pi,\ n \in \mathbf{Z}\}.$$

它们的值域均为区间$(-\infty,+\infty)$.

正切函数和余切函数都是以 π 为周期的无界函数,它们都是奇函数.

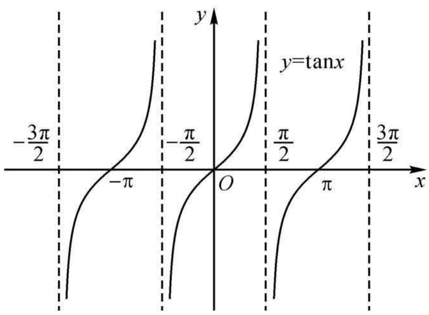

图 1-18

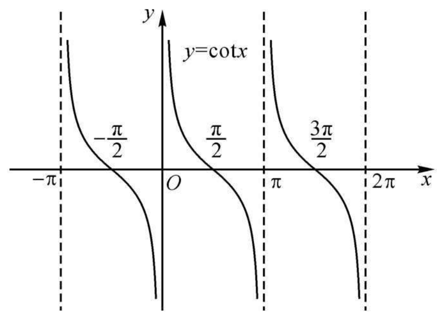

图 1-19

正割函数的定义域为

$$\{x \mid x \in \mathbf{R},\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z}\}.$$

余割函数的定义域为

$$\{x \mid x \in \mathbf{R},\ x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}.$$

它们的值域均为区间$(-\infty,+\infty)$.

正割函数和余割函数都是以 2π 为周期的无界函数.

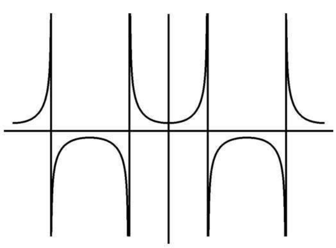

图 1-20

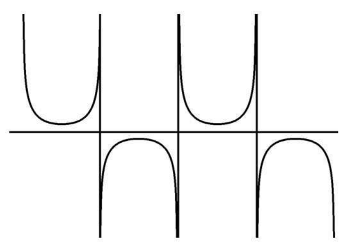

图 1-21

5. 反三角函数

由于三角函数是周期函数,所以它们在各自的自然定义域上不存在反函数. 但按前所述,将三角函数的定义域限制在某一个单调区间上,就可以得到三角函数的反函数,称为**反三角函数**.

反正弦函数 $y = \arcsin x$ (图 1-22),

反余弦函数 $y = \arccos x$ (图 1-23),

反正切函数 $y = \arctan x$ (图 1-24),