同济大学研究生教材

矩阵分析

Matrix Analysis

吴 群 周羚君 殷俊锋 编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

同济大学研究生教材

矩 阵 分 析

吴 群 周羚君 殷俊锋 编著

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是为适应蓬勃发展的研究生教育，根据“矩阵分析”（或“矩阵论”）课程教学基本要求编写而成的，主要讲述大多数理学、工学、管理学、经济学等各专业常用的、一般的矩阵基本理论和方法，内容包括基础知识、矩阵的标准形、线性空间与线性变换、内积空间、矩阵分析、矩阵分解、广义逆矩阵、特征值的估计和张量．各章都配有一定数量的习题用作练习，以帮助学生巩固知识．

本书内容简明得当，主次分明，叙述通俗易懂．既具有数学的抽象性和严密性，又重视工程技术中的实用性，可用作高等院校非数学类专业研究生的教材，也可供其他师生和工程技术人员阅读参考．

图书在版编目(CIP)数据

矩阵分析/吴群，周羚君，殷俊锋编著．--上海：同济大学出版社，2017.4

ISBN 978-7-5608-6299-6

Ⅰ.①矩… Ⅱ.①吴… ②周… ③殷… Ⅲ.①矩阵分析—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 088930 号

矩阵分析

吴 群 周羚君 殷俊锋 **编著**

责任编辑 李小敏 亓福军 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 张 微

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021-65985622)

经　　销 全国各地新华书店

印　　刷 同济大学印刷厂

开　　本 787 mm×1 092 mm 1/16

印　　张 12

字　　数 300 000

版　　次 2017 年 5 月第 1 版 2017 年 5 月第 1 次印刷

书　　号 ISBN 978-7-5608-6299-6

定　　价 48.00 元

前言

随着近年来计算机领域的发展,各行业对从业人员处理海量数据的能力要求越来越高,与计算机科学密切相关的代数学在理工科、甚至管理学科中的所起的作用越来越大. 在这一背景下,以矩阵和线性方程组的基础知识为主要内容的线性代数已成为理工科和管理学科相关专业的本科基础课程,而对知识深度、广度要求更高的研究生来说,还需要更多的线性代数知识. 为上述专业的研究生开设线性代数课程,已在各大理工科院校得到共识. 本书便是针对非数学专业研究生编写的.

矩阵作为代数学的基本工具之一,贯穿整个线性代数理论的始终,因此大部分院校将研究生的线性代数课程命名为矩阵论或矩阵分析. 从内容上说,非数学专业的线性代数课程和矩阵论课程,大致与数学专业的高等代数课程内容相近,虽然深度要求稍低,但要突出与理工科、管理学科联系密切的内容. 高等代数是一门非常成熟的数学基础课,无论哪本教材,包含的内容大致都相差不多. 另一方面,多数非数学专业的线性代数教材都由数学专业的老师编写,由于当前数学下属的各个二级学科分工越来越细,不同方向的教师知识结构差异越来越大,对线性代数的理解也有一定的不同,这导致不同方向的教师在内容侧重和讲法上,会有一些差异.

本书是在同济大学应用数学系编写的《矩阵分析》(2005 年版)的基础上,参考了国内其他院校的相关课程讲义,并结合十多年来课堂教学的经验编写而成,讲述了理学、工学、管理学、经济学等学科常用的代数理论和方法. 我们力求兼顾基础理论和应用,培养学生逻辑思维、抽象思维以及实际应用的能力. 全书共分九章,内容包含基础知识、矩阵的标准形、线性空间与线性变换、内积空间、矩阵分析、矩阵分解、广义逆矩阵、特征值的估计、张量等. 为了配合实际教学的需要,我们尽量保持各个章节的内容相对独立,以便在教学中可以做适当的取舍,同时也便于不同背景、不同需求的读者自学. 同时,在每一章节之后,配备了一定数量的习题,这些习题不仅可以帮助读者巩固本章的知识点,而且有些习题还是本章内容的延伸,从而满足不同程度读者的需求.

本书由同济大学数学科学学院吴群副教授(第1，2，5章)、周羚君副教授(第3，4，9章)、殷俊锋教授(第6，7，8章)共同编写，最后由周羚君统稿. 同济大学数学系拥有丰富教学经验的优秀教师在教学方法上给予了编者大量建议和指导，可以说没有前辈的积累，就不可能有这本教材，在此向他们表示衷心的感谢.

本书选取了一些新的例题，部分内容采用了新的写法，并加入了一些对实际教学有需要，但在以往教材中并没有出现的内容，这些改变是编者在教学中的一些新的尝试，有待进一步地实践检验，欢迎同行与读者提出建议和批评. 限于编者的水平，书中错误与疏漏在所难免，恳请读者不吝指正.

编　者

2017年5月15日

目　　录

第1章 基础知识

矩阵分析是以矩阵作为主要研究对象的课程,是大学线性代数课程的直接后续课程.本章的主要目的是回顾和总结一下大学线性代数的关键知识,便于以后章节的学习.对于本章中的绝大部分结论,我们将略去证明,略去的细节可以在大学线性代数教材的对应部分中找到.

1.1 矩阵的基本运算

矩阵是由 $m\times n$ 个数(或符号,表达式等),按如下顺序排成 m 行 n 列的长方形数表,一般再添加上括号表示如下

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

也称为 m 行 n 列的矩阵,或 $m\times n$ 的矩阵.通常用大写英文字母表示矩阵,例如,用 $\boldsymbol{A}$ 表示上面的矩阵,常简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$.矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的每个数称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个**元素**,而位于第 i 行第 j 列的元素称为 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元素,记为 $\mathrm{ent}_{ij}\boldsymbol{A}$,通常简记为 a_{ij}.

只有一行的矩阵称为**行矩阵**,或**行向量**;只有一列的矩阵称为**列矩阵**,或**列向量**.$n\times n$ 的矩阵称为 n 阶**方阵**.在 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中,全体行标与列标相同的元素 $\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$ 由 $\boldsymbol{A}$ 的左上角到右下角所排列成的一条线称为 $\boldsymbol{A}$ 的**主对角线**,通常简称为 $\boldsymbol{A}$ 的**对角线**.如果除主对角线上的元素以外其余的都是零,那么方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**对角矩阵**,也可记为 $\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$.特别,主对角线上的元素都是 1,其余的元素都是零的方阵 $\mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1)$ 称为 n 阶**单位矩阵**,记作 $\boldsymbol{E}_n$,常简记为 $\boldsymbol{E}$.n 阶单位阵的 (i,j) 元素记为 δ_{ij},这里 δ_{ij} 称为 **Kronecker 符号**.所有元素均为零的矩阵称为**零矩阵**,记为 $\boldsymbol{O}$.

线性代数主要研究讨论线性方程组的求解问题.引入了矩阵的概念以后,与引入之前比较,可以更方便地得出求解线性方程组的算法,以及更深入地讨论线性方程组的解的结构和性质.本节将回顾矩阵的基本运算,其中包括加法、数乘、乘法、转置、行列式、逆矩阵、迹和共轭矩阵等.

1.1.1 矩阵的加法

定义 1.1 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则矩阵$(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**和**，记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$；矩阵$(-a_{ij})_{m\times n}$称为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，记作$-\boldsymbol{A}$.

定理 1.1 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 是三个**同型矩阵**，即行数相同并且列数也相同的矩阵，则

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$，这里 $\boldsymbol{O}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 同型的零矩阵；

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

例 1.1 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

解

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 0 & -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & -6 & 3\end{pmatrix}.$$

1.1.2 数与矩阵的乘法

定义 1.2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$为一个矩阵，$k$ 为一个数，则矩阵$(ka_{ij})_{m\times n}$称为 k 与 $\boldsymbol{A}$ 的乘积，简称为 k 与 $\boldsymbol{A}$ 的**数乘**，记作 $k\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}k$.

定理 1.2 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是两个同型矩阵，k, l 是两个数，则

(1) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$, $0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;

(2) $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$;

(3) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;

(4) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$.

1.1.3 矩阵的乘法

定义 1.3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$为 $m\times s$ 的矩阵，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$为 $s\times n$ 的矩阵，则 $m\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**乘积**，记作 $\boldsymbol{AB}$，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}.$$

矩阵乘法的定义源于两个线性变换的复合运算，例如，线性变换

$$\begin{cases}x_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3,\\ x_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3,\end{cases}$$

与线性变换

$$\begin{cases}y_1=b_{11}z_1+b_{12}z_2,\\ y_2=b_{21}z_1+b_{22}z_2,\\ y_3=b_{31}z_1+b_{32}z_2\end{cases}$$

的复合为

$$\begin{cases}x_1=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31})z_1+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32})z_2,\\ x_2=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31})z_1+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32})z_2.\end{cases}$$

若记

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\end{pmatrix},$$

利用矩阵的乘法，就可以把两个线性变换分别记为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ay}$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Bz}$，它们的复合为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{ABz}$.

定理 1.3　设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 为矩阵，k 为一个数，假设以下运算都是可行的，则

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

(2) $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$；

(3) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$；

(4) $\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{O}$.

注　矩阵的乘法不满足交换律和消去律，即一般的 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，并不能得到 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$. 例如，设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&2\\1&-1\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O},\quad \boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}-6&-12\\3&6\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 又 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{O}$，但 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 不成立.

由于矩阵的乘法不满足交换律，因此 $\boldsymbol{AB}$ 可表述成 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$，或 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$.

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，规定 $\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A}$，对正整数 k，定义 $\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}$，特别约定 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$.

例 1.2　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^2$ 和 $\boldsymbol{A}^n$，这里 n 为正整数.

解　设 $\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，计算得

$$\boldsymbol{H}^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}^n=\boldsymbol{O}\ (n\geqslant 4).$$

从而

$$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{H})^2=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}^2=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{H})^n=\boldsymbol{E}+\mathrm{C}_n^1\boldsymbol{H}+\mathrm{C}_n^2\boldsymbol{H}^2+\mathrm{C}_n^3\boldsymbol{H}^3=\begin{pmatrix}1&\mathrm{C}_n^1&\mathrm{C}_n^2&\mathrm{C}_n^3\\0&1&\mathrm{C}_n^1&\mathrm{C}_n^2\\0&0&1&\mathrm{C}_n^1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\ (n\geqslant 3).$$

注 本题中使用了二项式定理，这是因为 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 满足乘积的交换律，否则二项式定理对矩阵是不成立的.

1.1.4 矩阵的转置

定义 1.4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 为一个矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的行依次变成同一标号的列所得矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

定理 1.4 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为矩阵，k 为一个数，并假设运算都是可行的，则

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(3) $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；

(4) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

例 1.3 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 型的实矩阵，试证 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

证明 充分性. 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，显然有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

必要性. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 对角线上的元素为 $a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 知

$$a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2=0$$

对一切 $1\leqslant j\leqslant n$ 成立，从而 $a_{ij}=0$ 对一切 i，j 成立，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

1.1.5　方阵的行列式

定义 1.5　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，则

$$\sum_{(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n)}(-1)^{\tau(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.1}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的**行列式**，记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$，这里 $(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n)$ 取遍集合 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 的所有全排列，$\tau(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n)$ 是这个排列的逆序数.

根据定义可以得到以下性质.

定理 1.5　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，则求和式(1.1)，

(1) 共有 $n!$ 项，

(2) 每一项都是 n 个处于 $\boldsymbol{A}$ 的不同行、不同列的元素的积，

(3) 每一项的符号是由组成该项的 n 个元素下标排列的奇、偶性所确定的.

定义 1.6　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 去掉 a_{ij} 所在的行与列后所得到的 $(n-1)$ 阶方阵的行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，用 M_{ij} 表示. $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的**代数余子式**，用 A_{ij} 表示.

由代数余子式的定义，可得 n 阶行列式 $\det(a_{ij})$ 按行(列)展开的性质.

定理 1.6　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，则

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\delta_{ij}\det\boldsymbol{A},$$
$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\delta_{ij}\det\boldsymbol{A},$$

其中，A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式，δ_{ij} 为 Kronecker 符号.

方阵的行列式关于方阵的数乘、乘法和转置满足下面的命题.

定理 1.7　设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为方阵，k 为一个数，则

(1) $|k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=k^n|\boldsymbol{A}|$，

(2) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，

(3) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$.

定理 1.8　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为一个 n 阶方阵，A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式，矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}=(A_{ij})^{\mathrm{T}}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**，则 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

证明　设 $\boldsymbol{AA}^*=(b_{ij})$，则有 $b_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=|\boldsymbol{A}|\delta_{ij}$，故

$$\boldsymbol{AA}^*=(|\boldsymbol{A}|\delta_{ij})=|\boldsymbol{A}|(\delta_{ij})=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E},$$

类似有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=(A_{i1}a_{j1}+A_{i2}a_{j2}+\cdots+A_{in}a_{jn})=(|\boldsymbol{A}|\delta_{ij})=|\boldsymbol{A}|(\delta_{ij})=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

1.1.6　逆矩阵

定义 1.7　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为一个 n 阶方阵，若存在一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得

$$AB = BA = E,$$

则称 A 是**可逆的**,并称 B 为 A 的**逆矩阵**,并记 $B=A^{-1}$.

事实上,定义中的条件形式上可以减弱.

定理 1.9 对于 n 阶方阵 A, B,若 $AB=E$,则 $BA=E$. 反之亦然.

下列命题是方阵 A 可逆的充分必要条件.

定理 1.10 A 可逆当且仅当 $|A|\neq 0$(又称 A 是**非奇异的**),此时 $A^{-1}=|A|^{-1}A^*$.

逆矩阵关于矩阵的数乘、乘法、转置和行列式运算有以下性质.

定理 1.11 设 A, B 为 n 阶可逆矩阵,则

(1) A^{-1}是可逆的,且$(A^{-1})^{-1}=A$;

(2) 当数 $k\neq 0$ 时,kA 可逆,且$(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$;

(3) AB 是可逆的,且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;

(4) A^{T}是可逆的,且$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$;

(5) $\det A^{-1}=(\det A)^{-1}$.

例 1.4 求二阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$的逆矩阵,这里 $ad-bd\neq 0$.

解 $|A|=ad-bc\neq 0$, $A^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$,故 $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

1.1.7 方阵的迹

定义 1.8 设 $A=(a_{ij})$为一个 n 阶方阵,则 A 的主对角线上元素的和称为 A 的**迹**,记作 $\mathrm{tr}\,A$,即

$$\mathrm{tr}\,A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

定理 1.12 设 A, B 为两个 n 阶方阵,k 为一个数,则

(1) $\mathrm{tr}\,A+\mathrm{tr}\,B=\mathrm{tr}(A+B)$;

(2) $\mathrm{tr}\,kA=k\,\mathrm{tr}\,A$;

(3) $\mathrm{tr}\,AB=\mathrm{tr}\,BA$.

例 1.5 试证:对任意的方阵 A, B,都有 $AB-BA\neq E$.

证明 由于 $\mathrm{tr}(AB-BA)=\mathrm{tr}\,AB-\mathrm{tr}\,BA=0$,而 $\mathrm{tr}\,E=n$,因此对任意的方阵 A, B,都有 $AB-BA\neq E$.

1.1.8 共轭矩阵

定义 1.9 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$为一个复矩阵,$\bar{a}_{ij}$为元素 a_{ij} 的共轭复数,则复矩阵$(\bar{a}_{ij})_{m\times n}$称为 A 的**共轭矩阵**,记为 $\bar{A}$.

定理 1.13 设 A, B 为复矩阵,k 为复数,则

(1) $\overline{A+B}=\bar{A}+\bar{B}$,

(2) $\overline{kA}=\bar{k}\bar{A}$,

(3) $\overline{AB}=\bar{A}\bar{B}$.

1.1.9　矩阵的分块

为了便于讨论，可以对矩阵使用分块的办法，已经被分块的矩阵称为**分块矩阵**. 原则上，如果分块矩阵的运算都是可运行的，则可先把矩阵的子块当成“元素”来对待，运算后再按通常的算法处理子块的运算. 所谓分块后矩阵的运算都是可运行的（或可称为分块是合理的）是指运算分别满足下列要求：

（1）作加法运算 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 时，要求对 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 用相同的分块方法；

（2）作数乘运算 $k\boldsymbol{A}$ 时，对 $\boldsymbol{A}$ 的分块方法没有特别要求；

（3）作乘法运算 $\boldsymbol{AB}$ 时，要求对 $\boldsymbol{A}$ 的列的分法与 $\boldsymbol{B}$ 的行的分法相同；

（4）作转置运算 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 时，对 $\boldsymbol{A}$ 分块方法没有要求.

现分别举例如下.

例 1.6　设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 为 n 阶方阵，其中 $\boldsymbol{A}$ 是可逆阵，试证：

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|.$$

证明　利用分块矩阵乘法，有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix},$$

再利用行列式的性质，就有

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|.\end{aligned}$$

例 1.7　设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，试证：

（1）$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$；

（2）$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$.

证明　（1）考虑分块矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$，则有 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$. 另一方面

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \end{pmatrix},$$

于是有 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{AB}|$，即 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$.

（2）利用分块矩阵可得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} \end{pmatrix},$$

再利用行列式的性质，就有

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|.$$

例 1.8 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解 先将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分块，

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_1=3,\ \boldsymbol{A}_1^{-1}=\frac{1}{3};\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_2^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^{-1} \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

分块矩阵在讨论线性方程组的求解问题时作用也十分明显. 例如，对线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$，

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

其中，$\boldsymbol{A}$ 称为线性方程组的**系数矩阵**，$\boldsymbol{x}$ 称为**未知数矩阵**，$\boldsymbol{b}$ 称为**常数项矩阵**，$\boldsymbol{B}$ 称为**增广矩阵**，则线性方程组可表示为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$. 若把 $\boldsymbol{A}$ 按它的列分块，并记 $\boldsymbol{\alpha}_j=(a_{1j},\ a_{2j},\ \cdots,\ a_{mj})^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)$，于是线性方程组又可表示为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}.$$

Cramer 法则也可以写成：如果线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵是非奇异的，那么 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

1.2 线性方程组

在大学线性代数的有关求解线性方程组的内容中，最显著的特点是在原来的 Gauss 消元法中引入矩阵的初等变换，这种作法的优点是明显的.

1.2.1 初等变换与初等矩阵

定义 1.10 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，下列三类变换称为矩阵的**初等变换**：

(1) 对换 i, j 两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$；对换 i, j 两列，记作 $c_i \leftrightarrow c_j$，

(2) 第 i 行乘非零数 k，记作 $r_i \times k$；第 i 列乘非零数 k，记作 $c_i \times k$，

(3) 第 i 行加上第 j 行的 k 倍，记作 $r_i + k r_j$；第 i 列加上第 j 列的 k 倍，记作 $c_i + k c_j$.

相对应的三类**初等矩阵**分别为

(1) $\boldsymbol{E}(i, j)=\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j)^{\mathrm{T}}$，

(2) $\boldsymbol{E}(i(k))=\boldsymbol{E}+(k-1)\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}$，

(3) $\boldsymbol{E}(i, j(k))=\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}$.

其中，$\boldsymbol{e}_i$ 为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 列.

显然，矩阵的初等变换都是可逆的，并且其逆仍是同一种类的初等变换；相应地，初等矩阵也都是可逆的，并且其逆也仍是同一种类的初等矩阵.

对矩阵作一次初等行变换等同于对该矩阵左乘一个初等矩阵，而作一次初等列变换等同于该矩阵右乘一个初等矩阵，例如，

$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j}\boldsymbol{B}$ 当且仅当 $\boldsymbol{E}(i, j)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$；

$\boldsymbol{A}\xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j}\boldsymbol{B}$ 当且仅当 $\boldsymbol{AE}(i, j)=\boldsymbol{B}$；

$\boldsymbol{A}\xrightarrow{k \times r_i}\boldsymbol{B}$ 当且仅当 $\boldsymbol{E}(i(k))\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$；

$\boldsymbol{A}\xrightarrow{k \times c_i}\boldsymbol{B}$ 当且仅当 $\boldsymbol{AE}(i(k))=\boldsymbol{B}$；

$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i + kr_j}\boldsymbol{B}$ 当且仅当 $\boldsymbol{E}(i, j(k))\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$；

$\boldsymbol{A}\xrightarrow{c_i + kc_j}\boldsymbol{B}$ 当且仅当 $\boldsymbol{AE}(i, j(k))^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$.

定义 1.11 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{P}$ 为有限个 $\boldsymbol{E}(i, j)$ 类的初等矩阵的乘积，即存在有限个 $\boldsymbol{E}(i, j)$ 类的初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{P}_s$，使得 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$，则称 $\boldsymbol{P}$ 为 n 阶**置换阵**.

显然，置换阵就是第一类的初等矩阵.

定义 1.12 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **等价**，记作 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

有了初等矩阵，就可以把对矩阵的初等变换转换为矩阵与对应的初等矩阵的积，并且这种转换是相互的，同时还提供了矩阵之间的等价性以及方阵的可逆性的新的表示方法.