陈英伟 著

全纯函数空间中的逼近理论

QUANCHUN HANSHU KONGJIAN ZHONGDE BIJINLILUN

Bernstein
Jackson
Hardy-Littlewood
K-泛函
Fejér

河北科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

全纯函数空间中的逼近理论 / 陈英伟著. —— 石家庄：河北科学技术出版社，2015.5
ISBN 978-7-5375-7607-9

Ⅰ. ①全… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①多复变函数论 Ⅳ. ①O174.56

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 097239 号

全纯函数空间中的逼近理论

陈英伟 著

出版发行	河北科学技术出版社
地　　址	石家庄市友谊北大街 330 号（邮编：050061）
印　　刷	石家庄燕赵创新印刷有限公司
开　　本	787×1092　1/16
印　　张	8.75
字　　数	150 千字
版　　次	2015 年 5 月第 1 版
	2015 年 5 月第 1 次印刷
定　　价	26.00 元

前　言

函数逼近有很久的历史，其理论研究的核心是用简单函数或较窄函数（如代数多项式、三角多项式、样条函数、整函数等）来逼近一类较为复杂或较广的函数，以及研究逼近的定性和定量问题。实变函数以及单复变全纯函数和球面调和函数的逼近理论已有丰富的内容，但是多复变全纯函数空间逼近理论尚待建立和完善。

本书是在笔者博士论文基础上加以补充完成的，涵盖了多年来较新的学术成果，其中大部分业已公开发表。本书以多复变全纯函数空间为主要研究对象，围绕中心逼近定理展开多复变全纯函数空间的逼近研究。如：引入了新的与测度 μ 相关的 Q_μ 和 A_μ 全纯函数空间，统一处理了众多函数空间包括 BMOA，Bloch，Q_p，Hardy，Bergman，Lipschitz，Q_K，$F(p, q, s)$，球代数，Bargmann 空间，建立了 Q_μ 和 A_μ 空间上的多项式逼近的正逆定理；在多复变全纯函数空间中研究了 K—泛函理论，即建立了 Q_p 空间上的强逆不等式，多项式逼近和 Riesz 算子的弱等价性、K—泛函和光滑模的等价性、Marchaud 不等式等理论；将刻画 Hardy 空间边界值光滑性的 Hardy—Littlewood 定理推广到 Bergman 空间；最后还将关于 Dirichlet 函数类的 Fejér 算子逼近理论从单位圆盘推广到单位球上等。

多复变全纯函数空间逼近论的研究丰富和完善了现有多复变函数理论，由于逼近论在实分析、复分析、调和分析、计算科学、信息理论和数理统计等领域具有重要作用，因此，多复变逼近理论具有广阔的应用前景。

由于水平有限，书中难免有不足或疏漏的地方，敬请广大读者批评指正，一并表示感谢！

著　者

2015 年 5 月

本书来源于国家自然科学基金(11126246)，河北省自然科学基金(A2015207007)，河北省教育厅科研基金(QN20131027)和河北经贸大学校内科研基金(2013KYQ07)等课题，同时感谢河北经贸大学校内出版基金和数统学院应用统计学省重点学科的特别资助。

目　录

第一章 绪 论

本书研究对象为多复变全纯函数空间，以代数多项式中心逼近定理为中心展开多复变全纯函数空间逼近的理论．本章给出相关的历史背景并列出本书的主要内容简介.

§1.1 引 言

函数逼近理论的研究具有悠久的历史[1,2]，在1885年Weierstrass发表了著名的定理，即紧区间上的连续函数（周期函数）都可由代数多项式（三角多项式）无限逼近．从此逼近论得到迅猛发展，特别在实函数逼近论已形成较为丰富的内容. 其研究的核心为用简单函数或较窄函数（如代数多项式，三角多项式，样条函数等）来逼近一类较为复杂函数或较宽函数，其中心逼近问题是研究各类函数的光滑性（如连续性，可微性，Lipschitz光滑性等）与逼近程度（逼近阶）的相互关系，即正定理（Jackson定理）与逆定理（Bernstein定理）．同时引申了许多其他的逼近问题，诸如算子的构造逼近问题，同时逼近，线性组合逼近，光滑模与K－泛函，一些相关的不等式等．函数逼近理论首先从实连续函数开始，逐渐被引入到单复变函数中去，并产生许多类似的结果[3]．但是多复变全纯函数空间逼近理论结果较少．本文将研究多复变全纯函数空间逼近理论.

本书以多复变全纯函数空间为主要研究对象，研究其上以中心逼近为中心的逼近理论．通过引入新的与测度μ相关的Q_μ和A_μ全纯函数空间，统一处理了众多函数空间包括BMOA，Bloch，Q_p，Hardy，Bergman，Lipschitz，Q_K，$F(p,q,s)$，球代数，Bargmann空间．建立了Q_μ和A_μ空间上的多项式

逼近的正逆定理，从而统一给出了众多全纯函数空间的一致的逼近结果．需要指出的是，在此工作之前尚没有发现关于多复变全纯函数空间上的 Bernstein 逆定理的结果．在多复变全纯函数空间逼近论的研究中，我们还将引入径向导数定义的 K－泛函，并以此为工具建立了 Q_p 空间上的强逆不等式，多项式逼近和 Riesz 算子的弱等价性等理论．我们将刻画 Hardy 空间边界值光滑性的 Hardy－Littlewood 定理推广到 Bergman 空间，克服了 Bergman 空间没有边界值的缺陷，这是将 Hardy 空间边界理论推广到 Bergman 空间的崭新理论．我们还将 Savchuk 关于 Dirichlet 函数类的 Fejér 算子逼近理论从单位圆盘推广到单位球上．

多复变全纯函数空间逼近论的研究丰富和完善了现有多复变函数理论．考虑到逼近论在实分析、复分析、调和分析、计算科学、工程数学、信息理论和数理统计等领域的重要作用，因此多复变逼近理论具有广阔的应用前景．

§1.2 预备知识

§1.2.1 多复变知识

为叙述本书主要内容，我们给出一些符号和概念等．

设 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 与 $w=(w_1,\cdots,w_n)$ 是 C^n 中的两点，记

$$\langle z, w\rangle = z_1\overline{w}_1+\cdots+z_n\overline{w}_n,\quad |z|=\sqrt{|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2},$$

则 $\mathrm{B}=\{z\in \mathrm{C}^n: |z|<1\}$ 是 C^n 中的单位球．当 $n=1$ 时，记 $U=\{z\in \mathrm{C}: |z|<1\}$，为单位圆盘．

设 D 为 C^n 中的域，如果对任意 $z\in D$，$\lambda\in \mathrm{C}$ 和 $|\lambda|<1$，有 $\lambda z\in D$，则称 D 为星形域．如果对任意 $z\in D$ 及 $0\leqslant\theta<2\pi$，都有 $e^{i\theta}z\in D$，则称 D 是圆型域．

域 $D\subset \mathrm{C}^n$ 上全纯函数 f 的径向导数定义为

$$Rf(z)=\sum_{k=1}^{n} z_k\frac{\partial f}{\partial z_k}(z).$$

下面各章节中，定义域 D 将具体取为单位圆盘，单位球，有界对称域或

星形圆型域等，空间 X 将取定为具体全纯函数空间，如 Q_p 空间，Bloch 空间，Besov 空间等（各函数空间定义具体看各章）.

以后各章节中，C 均表示正的常数，不同的地方取值可能不同．若对任意非负函数 f 和 g，存在一个正常数 C，满足 $f\leqslant Cg$，则记 $f\lesssim g$. 若同时成立 $f\lesssim g$ 和 $g\lesssim f$，我们记 $f\simeq g$.

对于更多关于多复变函数论的知识，读者可查阅经典教材[4,5,6].

§1.2.2 逼近论知识

光滑模（连续模）是刻画函数光滑性的基本工具，在研究函数的多项式逼近的理论中起着重要作用. 根据实际情况，光滑模（连续模）也有多种定义形式．本书中我们主要采用经典逼近论著作[1]中的记号，经典的光滑模（连续模）定义如下：

定义 1.2.1 令 X 为定义在域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 上具有半模 $\|\cdot\|_X$ 的函数空间. 对任 $f\in X$，$\delta>0$，$r\in\mathbb{N}$，X 中的 f 的 r 阶光滑模定义为

$$\omega_r(\delta,\ f,\ X):=\sup_{0<h\leqslant\delta}\|\Delta_h^r f(z)\|_X,$$

其中

$$\Delta_h^r f(z)=\Delta_h\Delta_h^{r-1}f(z)=\sum_{k=0}^{r}(-1)^{r-k}\begin{pmatrix}r\\k\end{pmatrix}f(e^{ikh}z).$$

特别地，$r=1$ 阶光滑模也称作 f 的连续模，记为

$$\omega(\delta,\ f,\ X):=\omega_1(\delta,\ f,\ X).$$

易知光滑模 $\omega_r(t,\ f,\ X)$ 为关于 t 的连续单调增加函数，且有 $\omega_r(t,\ f,\ X)\to 0, t\to 0^+$，进一步一般均拥有如下的基本性质[1,2,3,7,8]：

(a) $\omega_r(t,\ f,\ X)$ 关于 t 是不减函数且 $\lim\limits_{t\to 0}\omega_r(t,\ f,\ X)=0$.

(b) $\omega_r(t,\ f+g,\ X)\leqslant C(\omega_r(t,\ f,\ X)+\omega_r(t,\ g,\ X))$.

(c) 若 $R^rf\in X$，则 $\omega_r(t,\ f,\ X)\leqslant C\|f\|_X, \omega_r(t,\ f,\ X)\leqslant Ct^r\|R^rf\|_X$.

(d) $\omega_r(\lambda t,\ f,\ X)\leqslant C(1+\lambda)^r\omega_r(t,\ f,\ X), \lambda\geqslant 0$.

注：以后各章也会在部分函数空间对上述性质做相关证明.

我们称函数 $\omega:[0,a]\to\mathbb{R}$ 为连续模，即满足：ω 是单增的连续函数且

$\omega(0)=0$，当 $t>0$ 时，$\omega(t)>0$，及

$$\omega(t+s)\leqslant\omega(t)+\omega(s).$$

定义 1.2.2 函数 f 的多项式最佳逼近定义为

$$E_k(f,X):=\inf_{P_k\in \mathrm{P}_k}\| f-P_k\|_X,$$

其中 P_k 表示次数至多为 k 的多项式的全体.

对于更多实函数和单复变函数逼近论更多知识，读者可参考经典教材[1,2,3]及最新关于球面调和逼近的书籍[8].

§1.3 主要内容简介

本书主要内容为多复变全纯空间逼近论的下列几个方面：

§1.3.1 Jackson 定理与 Bernstein 定理

函数的光滑性究竟对函数逼近速度产生怎样影响？D. Jackson 在 1912 年证明了可微函数的一致三角逼近.

Jackson 定理：若 $f\in C^r([0,2\pi]),r\in\mathrm{N}$，则对于一切正整数 k 都成立：

$$E_k(f)\leqslant C(r)k^{-r}\omega(\frac{1}{k},f^{(r)}),$$

其中 $E_k(f)$ 表示 f 的 k 阶最佳逼近，$\omega(\frac{1}{k},f^{(r)})$ 表示 $f^{(r)}$ 的连续模，$C(r)$ 表示与 r 有关的常数.

反过来，如何利用多项式逼近的速度来刻画函数的光滑性？Bernstein 在 1912 年得到了下面重要的结果.

Bernstein 定理：若对某 $0<\alpha<1$，有 $E_k(f)\leqslant C(r)k^{-r-\alpha},k=1,2,\cdots$，则

$$f^{(r)}\in Lip\alpha,$$

其中 $Lip\alpha$ 表示 Lipschitz$-\alpha$ 函数类.

其后，Jackson 定理和 Bernstein 定理在许多实变量函数空间得到了拓展[1,2]，并在一些单复变函数空间中也得到相应的结论[3].

本书目的之一是建立单位圆盘上 Q_p 空间，Bergman 型空间等函数空间上的 Jackson 定理，Bernstein 不等式和 Bernstein 定理，并把相应结论拓展到多

复变单位球，有界对称域甚至星形圆型域上．我们引入了与测度 μ 相伴的 Q_μ 和 A_μ 空间，它们包含了 Bloch，BMOA，Q_p，Q_K，$F(p、q、s)$，Dirichlet 空间为具体例子，讨论了 Q_μ 和 A_μ 空间上的 Jackson 定理和 Bernstein 定理，从而统一得到了诸多空间上关于逼近的正逆定理（见第二章和第三章）．

§1.3.2 K—泛函

J. Peetre 在 1969 年首次引入 K—泛函[9]. K—泛函是逼近论的一个重要工具，它表示一个函数逼近的内在性质．K—泛函和光滑模在逼近理论中起着同等重要的作用．K—泛函是研究线性算子逼近问题的常用工具．我们在单位球 B 上 Q_p 空间的逼近研究中引入 K—泛函，同时利用 Riesz 算子研究了 Q_p 空间中的强逆不等式，多项式逼近和 Riesz 算子逼近的弱等价性，线性组合逼近，Marchaud 不等式及 K—泛函和光滑模的等价性等（见第四章）．

§1.3.3 Hardy—Littlewood 定理

对于单位圆盘 U 上的 Hardy 空间 $H^p(U)$，1932 年 Hardy 和 Littlewood 观察到这样的现象：导数 $f'(z)$ 的平均增长和边界函数 $f(e^{i\theta})$ 的光滑性有着紧密的关系．

定理 1.3.1[10] 设 $f(z)\in H^p(U)$，$1\leqslant p<\infty$，及 $0<\alpha\leqslant 1$. 则

$$f(e^{i\theta})\in \Lambda_\alpha^p \Longleftrightarrow M_p(r,\ f')=O\left(\frac{1}{(1-r)^{1-\alpha}}\right),\qquad r\to 1^-.$$

这里，Λ_α^p 是由所有满足下列条件的 $\phi\in L^p([0,2\pi))$ 构成：

$$\omega_p(t,\phi):=\sup_{0\leqslant\theta\leqslant t}\|\phi(e^{i\theta}z)-\phi(z)\|_{L^p[0,2\pi)}=O(t^\alpha),t\to 0^+.$$

Hardy 空间 H^p(U) 中的一个函数 f 称为属于 Hölder 类是指其边界函数 $f(e^{i\theta})$ 在空间 $L^p(0,2\pi)$ 中为 Hölder 类，即，$f(e^{i\theta})\in\Lambda_\alpha^p$．故定理 1.3.1 可解释为 Hardy 空间中的 Hölder 函数类按照导数增长的等价刻画．Kryakin 和 Trebels 在[11]中利用连续模和本性 K—泛函推广了这一结果．我们把 Hardy—Littlewood 定理推广到有界对称域 Ω 上的 Bergman 型空间，建立有界对称域 Ω 上 Bergman 型空间中的 Hölder 类利用径向导数的等价刻画（见第五章）.

§1.3.4 Fejér 算子逼近

周期函数可以通过其 Fourier 级数的 Fejér 算子逼近[12]．在单位圆盘上全

纯函数 f 有类似结果[13,14,15,16]．最近，Savchuk[17]得到单位圆盘 U 上 Dirichlet 类由 Fejér 算子逼近的精确估计：若 f 的 Taylor 展开为

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j z^j,\ a_j=\frac{f^{(j)}(0)}{j!},\ z\in U.$$

Fejér 算子序列 $\{\sigma_k(f)\}_{k=0}^{\infty}$ 定义为

$$\sigma_0(f)(z)=0,$$

$$\sigma_k(f)(z):=\sum_{j=0}^{k-1}(1-\frac{j}{k})a_j z^j,k\in\mathrm{N}.$$

单位圆盘 U 上的 Dirichlet 函数类定义为

$$D_p(U):=\{f\in H(U):\|f\|_{D_p}^p=\int_U|f'(z)|^p dm(z)\leqslant 1\},$$

其中 $dm(z)$ 为 U 上规范化的 Lebesgue 测度．

定理 1.3.2[17]　设 $1\leqslant p<\infty$ 和 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$．则

(1) 对任意 $k\in\mathrm{N}$，

$$\frac{\frac{1}{2}\min(p,q)}{\left(\left(\frac{q}{2}\right)(k-1)+1\right)^{\frac{1}{q}}}\leqslant E_k(D_p,H^p)\leqslant F_k(D_p,H^p)\leqslant\frac{1}{\left(\left(\frac{q}{2}\right)(k-1)+1\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

(2) 对任意 $f\in D_p$，

$$\|f-\sigma_k(f)\|_{H^p}=o(k^{-\frac{1}{q}}),k\to\infty,$$

其中

$$F_k(D_p,H^p):=\sup_{f\in D_p}\{\|f-\sigma_k(f)\|_{H^p}\},$$

$$E_k(D_p,H^p):=\sup_{f\in D_p}\{E_k(f)_{H^p}\},$$

上式中

$$E_k(f)_{H^p}:=\inf\{\|f-P\|_{H^p}:P\in\mathrm{P}_{k-1}\},$$

P_{k-1}表示至多 $k-1$ 次代数多项式全体．

我们将上述结果推广到单位球 B 上的 Dirichlet 函数类，给出 Dirichlet 函数类利用 Fejér 算子在 Hardy 空间范数下的确切逼近阶和上界估计（见第六章）．

第二章　Jackson 定理

函数的光滑性究竟对函数逼近速度产生怎样影响？D. Jackson 在 1912 年证明了可微函数的一致三角逼近.

Jackson **定理**：若 $f \in C^r([0,2\pi))$，$r \in \mathrm{N}$，则对于一切正整数 k 都成立：

$$E_k(f) \leqslant C(r)k^{-r}\omega(\frac{1}{k},\ f^{(r)}),$$

其中 $E_k(f)$ 表示 f 的 k 阶最佳逼近，$\omega(\frac{1}{k},\ f^{(r)})$ 表示 $f^{(r)}$ 的连续模，$C(r)$ 表示与 r 有关的常数.

其后，Jackson 定理在许多实变量函数空间得到了拓展[1,2]，并在一些单复变函数空间中也得到相应的结论[3].

在逼近论中，Jackson 定理给出了函数利用多项式逼近的上界估计 . 我们将研究各全纯函数空间上的 Jackson 定理.

§2.1　单位圆盘上的 Q_p 空间

§2.1.1　Q_p 空间

我们用 $g(\cdot,\ w)$ 表示单位圆盘 U 上极点为 w 的 Green 函数，

$$g(z,w) = -\log|\varphi_w(z)|,\quad z,w \in U,$$

其中 φ_w 为 U 上的 Möbius 变换

$$\varphi_w(z) = \frac{w-z}{1-\overline{w}z}\ .$$

$H(U)$ 表示 U 上全纯函数的全体，$dm(z)$ 为 U 上 Lebesgue 测度 . 函数 $f \in H(U)$ 属于 Q_p 空间($0 \leqslant p < \infty$)，如果

$$\|f\|_{Q_p}^2 := \sup_{w\in U}\int_U |f'(z)|^2 g^p(z,w)dm(z) < +\infty.$$

易知 $\|\cdot\|_{Q_p}$ 为半模．如果模取为 $|f(0)|+\|f\|_{Q_p}$，则 Q_p 为 Banach 空间（参见[18,19]）．熟知 $Q_1=\mathrm{BMOA}$，$Q_0=$Dirichlet 空间，而且对任意 $p\in(1,\infty)$，$Q_p=$Bloch 空间．关于 Q_p 空间的最新进展参见[19]和[20].

逼近论中，Jackson 正定理已由实函数空间推广到了单复变全纯函数空间．例如 Storozhenko 在 Hardy 空间 H^p 中建立了如下 Jackson 定理．

定理 2.1.1[21] 存在 k 次多项式 P_k 和正常数 $C(k)$，使得对任意 $0<p<\infty$，有

$$\|f-P_k\|_{H^p}\leqslant C(k)\omega(1/k,\ f,\ H^p),\qquad \forall f\in H^p.$$

该方面更多结果可参考[1,2,15,22]等文献．

假设 $f\in H(U)$，则它具有 Taylor 展开

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j z^j,\qquad a_j\in \mathrm{C}\qquad . \tag{2.1}$$

函数 f 的径向导数及高阶径向导数定义为

$$Rf(z)=\sum_{j=0}^{\infty} ja_j z^j,\ R^r f=R(R^{r-1}f),\qquad r\in \mathrm{N}.$$

自然的问题是定理 2.1.1 在 $p\to\infty$ 是否成立？即给出 BMOA 或更一般 Q_p 空间上的 Jackson 定理．我们将得到比定理 2.1.1 更深刻的 Q_p 空间中的高阶 Jackson 定理．

§2.1.2 逼近多项式

为构造逼近多项式，我们需引入一个 $[-\pi,\pi)$ 上的复测度：固定 $a>0$，

$$d\mu_k^\rho(\varphi)=iC_k^a(\rho e^{i\varphi})^{1-k}\left(\frac{1-(\rho e^{i\varphi})^{k+1}}{1-\rho e^{i\varphi}}\right)^{a+1}d\varphi\ ,$$

其中

$$C_k^a=(2\pi i)^{-1}\frac{\Gamma(k)\Gamma(a+1)}{\Gamma(k+a)}.$$

从下面引理 2.1.2（取 $f\equiv 1$，$r=1$）易知：对任意 $\rho\in(0,1]$ 和 $k\in\mathrm{N}$，$d\mu_k^\rho(\varphi)$ 都为 $[-\pi,\pi)$ 上的概率测度．

当 $\rho=1$ 时，记

$$dv_k := d\mu_k^1(\varphi).$$

其全变差测度可由广义 Jackson 核函数给出：

$$d|v_k| = |C_k^a| \cdot T_{k+1}^{\frac{a+1}{2}}(\varphi)d\varphi,$$

其中广义 Jackson 核函数为

$$T_k^\beta(\varphi) := \left|\frac{\sin\dfrac{k\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}\right|^{2\beta}.$$

我们引入一类重要算子 $P_k[\cdot]$，

$$P_k[f](z) = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+a)}\sum_{m=1}^{r+1}(-1)^{m+1}\binom{r+1}{m}\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{m}\right]}\frac{\Gamma(k-mj+a)}{\Gamma(k-mj)}a_j z^j, \quad (2.2)$$

它将提供最佳逼近多项式．由引理 2.1.2 可看出它与变量 ρ 无关．

引理 2.1.2　若 $f\in H(U)$，则对任意 $z\in U$ 和任意 $\rho\in(0,1)$，

$$P_k[f](z) = \sum_{m=1}^{r+1}(-1)^{m+1}\binom{r+1}{m}\int_{-\pi}^{\pi} f((\rho e^{i\varphi})^m z)\,d\mu_k^\rho(\varphi) \quad . \quad (2.3)$$

$$P_k[f](z) = \sum_{m=1}^{r+1}(-1)^{m+1}\binom{r+1}{m}C_k^a\int_{|\lambda|=\rho} f(\lambda^m z)\lambda^{-k}(1-\lambda)^{-(a+1)}d\lambda.$$

(2.4)

(2.3) 式对 $\rho=1$ 也成立．

证明：对任固定的 $\rho\in(0,1)$，通过变量代换 $\lambda=\rho e^{i\varphi}$，有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f((\rho e^{i\varphi})^m z)\,d\mu_k^\rho(\varphi) = C_k^a\int_{|\lambda|=\rho} f(\lambda^m z)\lambda^{-k}\left(\frac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda}\right)^{a+1}d\lambda \quad . \quad (2.5)$$

由二项式级数 $(1-w)^{a+1}=1+\sum_{l=1}^{\infty} b_l w^l$，其中 $|w|<1$，我们有

$$(1-\lambda^{k+1})^{a+1} = 1+\sum_{l=1}^{\infty} b_l\lambda^{(k+1)l},\quad |\lambda|<1.$$

因此，式 (2.5) 中积分可以被分为两部分

$$f(\lambda^m z)\lambda^{-k}\left(\frac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda}\right)^{a+1} =$$

$$f(\lambda^m z)\lambda^{-k}(1-\lambda)^{-(a+1)} + \sum_{l=1}^{\infty} f(\lambda^m z)\lambda^{-k}(1-\lambda)^{-(a+1)}b_l\lambda^{(k+1)l}.$$

因为第二项在单位圆盘 $|\lambda|<1$ 上全纯，由留数定理知其在 $|\lambda|=\rho$ 积分为

零，所以由第一项得出

$$\int_{-\pi}^{\pi} f((\rho e^{i\varphi})^m z)\,d\mu_k^{\rho}(\varphi) = C_k^a \int_{|\lambda|=\rho} f(\lambda^m z)\lambda^{-k}(1-\lambda)^{-(a+1)}\,d\lambda.$$

记 (2.4) 中被积函数为

$$g_m(\lambda) = f(\lambda^m z)\lambda^{-k}(1-\lambda)^{-(a+1)} \quad . \tag{2.6}$$

由于 $g_m(\lambda)$ 在除原点外单位圆盘上全纯，由留数定理可得

$$\int_{|\lambda|=\rho} f(\lambda^m z)\lambda^{-k}(1-\lambda)^{-(a+1)}\,d\lambda = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(g_m(\lambda),0) \quad . \tag{2.7}$$

为计算上面的留数，对 (2.7) 的左侧利用 f 的 Taylor 展式，再由 (2.6) 和二项式级数

$$(1-\lambda)^{-(a+1)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(l+a+1)}{l!\,\Gamma(a+1)} = \lambda^l,$$

我们可获得 Laurent 展开

$$g_m(\lambda) = \sum_{l,j=0}^{\infty} a_j z^j\, \frac{\Gamma(l+a+1)}{l!\,\Gamma(a+1)} \lambda^{l+mj-k}.$$

这样得到

$$\mathrm{Res}(g_m(\lambda),0) = \sum_{l+mj=k-1} \frac{\Gamma(l+a+1)}{l!\,\Gamma(a+1)} a_j z^j.$$

结合 (2.7)，有

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{r+1}(-1)^{m+1}\binom{r+1}{m} C_k^a \int_{|\lambda|=\rho} f(\lambda^m z)\lambda^{-k}(1-\lambda)^{-(a+1)}\,d\lambda \\
&= 2\pi i C_k^a \sum_{m=1}^{r+1}(-1)^{m+1}\binom{r+1}{m}\sum_{l+mj=k-1}\frac{\Gamma(l+a+1)}{l!\,\Gamma(a+1)} a_j z^j \\
&= \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+a)}\sum_{m=1}^{r+1}(-1)^{m+1}\binom{r+1}{m}\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{m}\right]}\frac{\Gamma(k-mj+a)}{\Gamma(k-mj)} a_j z^j \\
&= P_k[f](z).
\end{aligned}$$

这就证明了 (2.3) 和(2.4)，其中 $\rho\in(0,1)$．对任固定点 $z\in U$，通过取 $\rho\to 1$，我们可知：(2.3) 在 $\rho=1$ 时也成立．故引理得证．

§2.1.3 误差函数的导数估计

考虑 $[-\pi,\pi)$ 上的测度：对任意 $1>\rho>0$，$\eta>0$，$a>0$，

$$dv_k^{\rho,\eta,a}(\varphi) := |C_k^a|^{\eta}\rho^{\eta(1-k)}(1-\rho)^{\eta-1}T_{k+1}^{\frac{\eta(a+1)}{2}}(\varphi)\,d\varphi \quad . \tag{2.8}$$