高中

同步学程

TONG BU XUE CHENG

高中新课程

数学

选修2–2 选修2–3

明天出版社

高中

同步学程

高中新课程

数学

选修 2–2 选修 2–3

明天出版社

同 步 学 程
数学
选修 2－2 选修 2－3
※
明天出版社出版发行
（济南市经九路胜利大街 39 号）
http://www.sdpress.com.cn
http://www.tomorrowpub.com
各地新华书店经销 山东省无棣县教育实业公司印刷厂印刷
※
787×1092 毫米 16 开 13 印张 362 千字
2009 年 1 月第 1 版 2009 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978－7－5332－5997－6
定价：11.00 元

前言

为了更好地贯彻素质教育要求，落实《山东省普通高中课程设置及教学指导意见（试行）》，帮助广大师生准确理解和把握实验教材的内容和要求，全面提高学生的自主学习能力，我们依据教育部颁布的《普通高中课程方案（实验）》、各学科课程标准和现行教材，组织部分一线骨干教师和教学研究人员编写了这套《同步学程》丛书，主要供高中学生同步学习使用。这套丛书对指导普通高中新课程实验，提高学生的综合素质，都将起到积极的促进作用。

这套丛书包括思想政治、语文、数学、英语、物理、化学、生物、历史、地理共九个学科的所有必修模块和部分选修模块，并根据教学进度同步发行。各模块根据新课程的内容特点按单元（节、课）编写，指导学生在规定的课时内完成学习任务，提高学习效率。

这套丛书有以下几个方面的特点：

1. 注重体现普通高中课程改革的理念和要求，帮助师生进行课程实验，用好用活教材；

2. 注重体现“知识和能力、过程和方法、情感态度和价值观”的三维目标要求，在帮助学生牢固掌握基础知识的前提下，努力提高学生的应用能力；

3. 注重设置问题情境，拓宽知识背景，指导学生掌握科学的学习方法，自主探求未知领域，培养学生的探索精神和创新能力；

4. 注重与新课程实验的同步性，紧密配合各学科的学习，按单元（节、课）分配学习课时，组织学习训练内容，既便于教师指导又便于学生自学。

参加《数学》（选修 2—2　选修 2—3）编写工作的老师及分工情况：杨雪峰、刘玉武（第一章）、王会军（第二章）、李在功、王擎天（第三章）、刘明（第一章）、刘洪福（第二章）、聂作庆（第三章）。于清堂、刘玉武、高天祥、商金琳、吕文彬、左登良参加审稿。王文清老师负责统稿。

希望这套《同步学程》丛书能够帮助同学们学好新课程，打牢基础，提升素质，实现理想。

2009 年 1 月

目录

选修2—2

第一章　导数及其应用

§1.1　变化率与导数……………………（1）
§1.2　导数的计算……………………（7）
§1.3　导数在研究函数中的应用 …（13）
§1.4　生活中的优化问题举例 ……（20）
§1.5　定积分的概念 ………………（26）
§1.6　微积分基本定理 ……………（32）
§1.7　定积分的简单应用 …………（38）
单元测试……………………………（44）

第二章　推理与证明

§2.1　合情推理与演绎推理 ………（47）
§2.2　直接证明与间接证明 ………（54）
§2.3　数学归纳法 …………………（61）
单元测试……………………………（66）

第三章　数系的扩充与复数的引入

§3.1　数系的扩充和复数的概念 …（69）
§3.2　复数代数形式的四则运算 …（74）
单元测试……………………………（79）
综合测试(一)………………………（81）
综合测试(二)………………………（85）

选修2—3

第一章　计数原理

§1.1　分类加法计数原理与分步乘法计数原理 ……………………（89）
§1.2　排列与组合 …………………（95）
§1.3　二项式定理…………………（102）
单元测试 ……………………………（109）

第二章　随机变量及其分布

§2.1　离散型随机变量及其分布列 ……………………………………（112）
§2.2　二项分布及其应用…………（118）
§2.3　离散型随机变量的均值与方差 ……………………………………（124）
§2.4　正态分布……………………（130）
单元测试 ……………………………（134）

第三章　统计案例

§3.1　回归分析的基本思想及其初步应用 ……………………………（137）
§3.2　独立性检验的基本思想及其初步应用……………………………（142）
单元测试 ……………………………（147）
综合测试(一) ……………………（149）
综合测试(二) ……………………（153）
参考答案 …………………………（157）

选修 2—2

第一章 导数及其应用

§1.1 变化率与导数

课标要求

1. 了解导数的概念的某些实际背景(如瞬时速度、加速度、光滑曲线切线的斜率等),掌握函数在一点处导数的定义和导数的几何意义.

2. 理解导函数的概念.

基础诊断

1. 函数 $f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率

函数 $f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率为__________,若用 Δx 表示 x_2-x_1,Δy 表示 $f(x_2)-f(x_1)$,则平均变化率可以表示为__________.

2. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数

(1)定义

函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率__________为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数,记作__________或__________,即__________.

(2)几何意义

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是过曲线 $y=f(x)$ 上点__________的切线的斜率.

(3)过曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x_0,y_0)$ 的切线的方程为__________.

3. 用定义求导数的基本步骤是____________________.

4. 函数 $f(x)$ 的导函数

称函数 $f'(x)=$__________为 $f(x)$ 的导函数,导函数有时也记作__________.

典型示例

【例 1】求函数 $y=\sqrt{x^2+1}$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率.

【分析】紧扣定义 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 进行计算.

【解析】

$$\because \Delta y=\sqrt{(x_0+\Delta x)^2+1}-\sqrt{x_0^2+1}$$

$$=\frac{(x_0+\Delta x)^2+1-x_0^2-1}{\sqrt{(x_0+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}}$$

$$=\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\sqrt{(x_0+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}},$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x_0+\Delta x}{\sqrt{(x_0+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}}.$$

【反思与小结】

求函数 $f(x)$ 平均变化率的步骤:

①求函数值的增量 $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$;

②计算平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

解这类题目仅仅是简单套用公式,解答过程相对简单,只要注意运算过程就可以了.

【例 2】求函数 $y=2x^2+4x$ 在 $x=3$ 处的导数.

【分析】函数 $y=f(x)$ 在 $x=3$ 处的瞬时变化率就是函数 $f(x)$ 在 $x=3$ 处的导数,即 $f'(3)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$.

【解析】解法一:$\Delta y=2(3+\Delta x)^2+4(3+$

$\Delta x)-(2\times3^2+4\times3)$

$=12\Delta x+2(\Delta x)^2+4\Delta x$

$=2(\Delta x)^2+16\Delta x$,

$\therefore\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2(\Delta x)^2+16\Delta x}{\Delta x}=2\Delta x+16.$

$\therefore y'|_{x=3}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}(2\Delta x+16)=16.$

解法二：$f'(x)=$

$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{2(x+\Delta x)^2+4(x+\Delta x)-(2x^2+4x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{4x\cdot\Delta x+2(\Delta x)^2+4\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}(4x+2\Delta x+4)=4x+4$,

$\therefore y'|_{x=3}=f'(3)=4\times3+4=16.$

【反思与小结】(1)求函数在某点处的导数可分以下三步：①计算 Δy；②计算$\frac{\Delta y}{\Delta x}$；③计算$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

(2)求函数在某点处的导数，还可以先求出函数的导数，再计算这点处的导数值.

【例 3】已知：曲线 $y=\frac{1}{3}x^3$ 上一点 $P(2,\frac{8}{3})$，求过点 P 的切线斜率，并写出切线方程.

【分析】根据导数的几何意义知，函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数就是曲线在该点处切线的斜率，再由直线方程的点斜式便可求出切线的方程.

【解】$\because y=\frac{1}{3}x^3$，

$\therefore y'=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\frac{1}{3}(x+\Delta x)^3-\frac{1}{3}x^3}{\Delta x}$

$=\frac{1}{3}\lim\limits_{\Delta x\to0}[3x^2+3x\cdot\Delta x+\Delta x^2]=x^2.$

$\therefore$切线斜率 $k=y'|_{x=2}=2^2=4.$

$\therefore$在点 P 的切线方程为：$y-\frac{8}{3}=4(x-2)$.

即 $12x-3y-16=0$.

【反思与小结】由函数 $y=f(x)$在 x_0 处导数的几何意义可知，解此类问题一般步骤是：

1. 先求 x_0 处的导数；
2. 写出方程整理化简.

【变式】若曲线 $y=x^2-1$ 的一条切线平行于直线 $y=4x-3$，求这条切线的方程.

【分析】首先设出切点坐标为(x_0,y_0)，根据导数的几何意义求出过该点的切线的斜率，然后利用两直线平行斜率相等求切点坐标.

【解】$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{(x+\Delta x)^2-1-(x^2-1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}(2x+\Delta x)=2x.$

设切点坐标为(x_0,y_0)，则由题意知，

$f'(x_0)=4$，即 $2x_0=4$，$\therefore x_0=2$，

代入曲线方程得 $y_0=3$.

故该切线过点$(2,3)$且斜率为 4.

所以这条切线的方程为 $y-3=4(x-2)$，

即 $4x-y-5=0$.

【反思与小结】解这类问题，要先设切点坐标，利用导数的几何意义求出过切点的切线斜率，再结合题意列出方程，求出切点坐标，从而使问题得以解决，可以说设切点求切点是问题解决的关键.

【例 4】物体的运动方程是 $S=4t-0.3t^2$(S 的单位：m，t 的单位：s)，求物体在 $t=2$ 时的速度.

【解析】此题就是求 S 在 $t=2$ 时导数.

【解】$\because\Delta S=4(2+\Delta t)-0.3(2+\Delta t)^2-4\times2+0.3\times4$

$=8+4\Delta t-1.2-1.2\Delta t-0.3\Delta t^2-8+1.2$

$=2.8\Delta t-0.3(\Delta t)^2$

$\therefore\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{2.8\Delta t-0.3(\Delta t)^2}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to0}(2.8-0.3\Delta t)$

$=2.8.$

$\therefore$物体在 $t=2$ 的速度是 2.8m/s.

【反思与小结】本题是求物体在某时刻的瞬时速度问题，根据导数的物理意义，瞬时速度就是位移函数 $S(t)$在时间 t 处的导数.

归纳总结

1. 导数的实质就是函数值相对于自变量的变化率.

导数的定义：把$\frac{\Delta y}{\Delta x}$叫做函数$y=f(x)$在$x_0$到$x_0+\Delta x$之间的平均变化率，并把$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$叫做$f(x)$在$x=x_0$处的导数或变化率，定义的这种叙述说明了导数的实质是函数值相对于自变量的变化率.

2. 求导数的方法

(1)求函数的增量$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；

(2)求平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$；

(3)求极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
$=f'(x)$.

3. 对于较复杂的函数求导，一般要遵循先化简再求导的原则.

拓展提高

1. 设函数$f(x)$在$x=2$处可导，且$f'(2)=1$，求$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{2\Delta x}$.

【解析】$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{2\Delta x}=\frac{1}{2}$.

【解】$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{2\Delta x}$

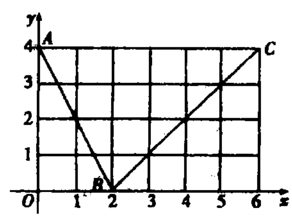
$=\frac{1}{2}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\frac{1}{2}f'(2)=\frac{1}{2}$.

【变式1】设函数$f(x)$在$x=2$处可导，且$f'(2)=1$，求$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{2h}$.

【变式2】设函数$f(x)$在$x=2$处可导，且$f'(2)=1$，求$\lim\limits_{h\to 2}\frac{f(h)-f(2)}{h-2}$.

【变式3】如图函数$f(x)$的图象是折线段ABC，其中A,B,C的坐标分别为$(0,4),(2,0),(6,4)$，则$f(f(0))=$____________；$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$________(用数字作答).



2. 设P为曲线$C:y=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}$上的点，直线$l$是曲线$C$在$P$点处的切线，若切线$l$的倾斜角的取值范围是$[0,\frac{\pi}{4}]$，求切点$P$的横坐标的取值范围.

【解析】设P点坐标为(x_0,y_0)，直线l的倾斜角为α，则

$$y'|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{3}(x_0+\Delta x)^3-\frac{1}{3}x_0^3}{\Delta x}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{\Delta x\to 0}[3x_0^2+3x_0\Delta x+\Delta x^2]$$
$$=x_0^2.$$

$\because 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$，

$\therefore 0\leqslant\tan\alpha\leqslant 1$，

$\therefore 0\leqslant x_0^2\leqslant 1$，

从而得$-1\leqslant x_0\leqslant 1$.

【变式 1】求曲线 $C:y=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}$ 在 $P(2,4)$ 处的切线方程.

【变式 2】求曲线 $C:y=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}$ 过点 $P(2,4)$ 的切线方程.

展示平台

基础训练

1. 在曲线 $y=x^2+1$ 的图象上取一点 $(1,2)$ 及邻近一点 $(1+\Delta x,2+\Delta y)$，则 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 为 ( )

A. $\Delta x+\frac{1}{\Delta x}+2$　　B. $\Delta x-\frac{1}{\Delta x}-2$

C. $\Delta x+2$　　D. $2+\Delta x-\frac{1}{\Delta x}$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ( )

A. 与 x_0,h 都有关

B. 仅与 x_0 有关而与 h 无关

C. 仅与 h 有关而与 x_0 无关

D. 与 x_0、h 均无关

3. 在导数的定义中，自变量的增量 Δx 满足 ( )

A. $\Delta x<0$　B. $\Delta x>0$　C. $\Delta x=0$　D. $\Delta x\neq 0$

4. 设 $f(x)$ 为可导函数，且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则过曲线 $y=f(x)$ 上点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 ( )

A. 2　B. -1　C. 1　D. -2

5. 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $2x+y-1=0$，则 ( )

A. $f'(x_0)>0$　　B. $f'(x_0)<0$

C. $f'(x_0)=0$　　D. $f'(x_0)$ 不存在

6. 已知函数 $y=x^3+ax^2-\frac{4}{3}a$ 的导数为 0 的 x 值也使 y 值为 0，则常数 a 的值为 ( )

A. 0　　B. ± 3

C. 0 或 ± 3　　D. 非以上答案

7. 过曲线 $y=\frac{1}{2}x^2+1$ 上的一点 $(2,3)$ 的切线的斜率为 ( )

A. $\frac{1}{2}$　B. 1　C. 2　D. 3

8. 已知曲线 $y=x^3$ 上过点 $(2,8)$ 的切线方程为 $12x-ay-16=0$，则实数 a 的值是 ( )

A. -1　B. 1　C. -2　D. 2

9. 自由落体的运动方程是 $S_{(t)}=\frac{1}{2}gt^2$，物体在 $t=3$ 这一时刻的速度是________.

10. 曲线 $f(x)=x^3$ 在某点切线的斜率等于 3，则此点坐标为________.

11. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $M(1,f(1))$ 处的切线方程是 $y=\frac{1}{2}x+2$，则 $f(1)+f'(1)=$________.

12. 设函数 $f(x)=ax^3+2$，若 $f'(-1)=3$，则 a 等于________.

13. 已知:曲线 $C:y=2x^3+1$ 上一点 $P(1,3)$,求:(1)C 在 P 处的切线斜率;

(2)C 在点 P 处的切线方程.

14. 已知函数 $y=x^2$. 求:

(1)y';

(2)求抛物线 $y=x^2$ 在$(-\frac{1}{2},\frac{1}{4})$处的切线的倾斜角;

(3)若直线 $y=kx-1$ 是抛物线 $y=x^2$ 的切线,求 k.

能力训练

15. 质量为 10kg 的物体按照 $S(t)=3t^2+t+4$ 的规律作直线运动，求运动刚开始时物体的动能.（S 的单位：m，t 的单位：s）

16. 已知直线 l_1 为曲线 $y=x^2+x-2$ 在(1,0)处的切线，l_2 为该曲线的另一切线，且 $l_1\perp l_2$.

(1)求 l_2 的方程；

(2)求由直线 l_1，l_2 和 x 轴所围成的三角形面积.

反思提高

§1.2　导数的计算

课标要求

1. 熟记基本导数公式.

2. 掌握两个函数的和、差、积、商的求导法则和复合函数的求导法则,会求某些简单函数的导数.

基础诊断

1. 几种常见函数的导数

(1)$c'=$__________.

(2)$(x^n)'=$__________.$(n\in\mathbf{Q}^*)$

(3)$(\sin x)'=$__________.

(4)$(\cos x)'=$__________.

(5)$(\ln x)'=$__________.

(6)$(\log_a x)'=$__________.

(7)$(e^x)'=$__________.

(8)$(a^x)'=$__________.

2. 导数的四则运算法则

(1)$[f(x)\pm g(x)]'=$__________.

(2)$[f(x)\cdot g(x)]'=$__________.

(3)$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=$__________.$(g(x)\neq 0)$

3. 复合函数的求导.

若函数 $u=g(x)$ 在点 x 处有导数 $u'_x=g'(x)$,函数 $y=f(u)$ 在点 x 的对应点 u 处有导数 $y'(u)=f'(u)$,则复合函数 $y=f(g(x))$ 在点 x 处有导数 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

典型示例

【例 1】求下列函数的导数

(1)$y=x^3$;(2)$y=x^4$;(3)$y=x^{-2}$;

(4)$y=e^x$;(5)$y=\log_2 x$;(6)$y=2^x$.

【解】(1)$y'=(x^3)'=3x^{3-1}=3x^2$;

(2)$y'=(x^4)'=4x^{4-1}=4x^3$;

(3)$y'=(x^{-2})'=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}=-\dfrac{2}{x^3}$;

(4)$y'=(e^x)'=e^x$;

(5)$y'=(\log_2 x)'=\dfrac{1}{x\ln 2}$;

(6)$y'=(2^x)'=2^x\ln 2$.

【反思与小结】熟记求导公式是求导数的前提.

【例 2】求下列函数的导数

(1)$y=(2x^2+3)(3x-2)$;

(2)$y=\dfrac{1}{x+1}$;

(3)$y=\tan x$;

(4)$y=e^{\sin(ax+b)}$.

【分析】观察各函数的结构规律,联系基本初等函数求导公式,应用求导运算法则解决问题.

【解】(1)解法一:$y'=(2x^2+3)'(3x-2)+(2x^2+3)(3x-2)'$

$=4x(3x-2)+(2x^2+3)\cdot 3$

$=18x^2-8x+9$.

解法二:$\because y=(2x^2+3)\cdot(3x-2)$

$=6x^3-4x^2+9x-6$,

$\therefore y'=18x^2-8x+9$.

(2)解法一:$y'=\dfrac{-(x+1)'}{(x+1)^2}=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

解法二:$y'=[(x+1)^{-1}]'$

$=-1\cdot(x+1)^{-2}\cdot(x+1)'$

$=-(x+1)^{-2}=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

(3)$y'=(\tan\alpha)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$=\dfrac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

(4)解法一:设 $y=e^u$,$u=\sin v$,$v=ax+b$,则

$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x=e^u\cdot\cos v\cdot a$

$=a\cos(ax+b)\cdot e^{\sin(ax+b)}$.

解法二:$y'=[e^{\sin(ax+b)}]'$

$=e^{\sin(ax+b)}\cdot[\sin(ax+b)]'$

$=e^{\sin(ax+b)}\cdot\cos(ax+b)(ax+b)'$

$=a\cos(ax+b)e^{\sin(ax+b)}$.

【反思与小结】(1)求函数的导数时，首先根据解析式的结构特征分析它可看成哪些常见函数的和、差、积、商，然后再运用运算法则和求导公式，如果不能直接看成常见函数的和、差、积、商，要先对原函数解析式进行化简变形，如本例中的(3)，把 $\tan x$ 化成 $\frac{\sin x}{\cos x}$ 就可以用法则求导了.

(2)复合函数的求导过程就是对复合函数由外层向里层求导，每次求导都针对着本层相应变量进行，直至求到最里层为止，所谓最里层是指可以直接引用基本公式进行求导. 有些函数若先化简然后求导可能更简单.

【变式 1】$f'(x)$是函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x+1$ 的导函数，求 $f'(-1)$的值.

【解】$\because f'(x)=x^2+2$，所以 $f'(-1)=3$.

【变式 2】已知函数 $f(x)=\frac{f'(1)}{x}+4x$，求 $f'(-1)$的值.

【解】两边同时求导 $f'(x)=-\frac{f'(1)}{x^2}+4$，所以 $f'(1)=-f'(1)+4$，得 $f'(1)=2$. 故 $f'(-1)=-\frac{f'(1)}{(-1)^2}+4=2$.

【反思与小结】求函数在一个点处的导数，往往先求函数的导函数，再求导函数在该点处的函数值.

【例 3】已知曲线 $y=2\sqrt{x}+1$，

求：(1)在点(9,7)处的切线方程；

(2)曲线上哪一点处的切线与直线 $2x+y-3=0$ 垂直.

【分析】利用导数的几何意义求切线的斜率.

【解】(1)$y'=(2\sqrt{x}+1)'=\frac{1}{\sqrt{x}}$,

$\therefore y'|_{x=9}=\frac{1}{3}$,

即切线的斜率 $k=\frac{1}{3}$.

故切线方程为

$y-7=\frac{1}{3}(x-9)$,

即 $x-3y+12=0$.

(2)令 $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$,

解得 $x=4$.

代入 $y=2\sqrt{x}+1$,

得 $y=5$.

$\therefore$曲线在点(4,5)处的切线与直线 $2x+y-3=0$ 垂直.

【反思与小结】由导数的几何意义，已知切点坐标可求切线的方程，已知切线方程(或斜率)也可求切点的坐标. 此处的关键是正确求导及正确理解导数的几何意义.

【例 4】已知曲线 $C: y=3x^4-2x^3-9x^2+4$,

(1)求曲线 C 上横坐标为 1 的点的切线方程；

(2)在(1)中切线与曲线 C 是否还有其他公共点?

【分析】考查求导公式及法则，并正确运用导数的几何意义.

【解】(1)把 $x=1$ 代入 C 的方程，得 $y=-4$,

$\therefore$切点为$(1,-4)$.

$\because y'=12x^3-6x^2-18x$.

$\therefore$切线的斜率 $k=y'|_{x=1}=-12$,

$\therefore$切线方程为 $y+4=-12(x-1)$,

即 $12x+y-8=0$.

(2)由 $\begin{cases}y=3x^4-2x^3-9x^2+4,\\ y=-12x+8,\end{cases}$

消去 y，得

$3x^4-2x^3-9x^2+12x-4=0$,

即$(x-1)^2(x+2)(3x-2)=0$,

$\therefore x=1$，或 $x=-2$，或 $x=\frac{2}{3}$.

从而方程组有三组解：

$\begin{cases}x=1,\\ y=-4,\end{cases}\begin{cases}x=-2,\\ y=32,\end{cases}\begin{cases}x=\frac{2}{3},\\ y=0.\end{cases}$

即直线 $12x+y-8=0$ 与曲线 C 有三个公共点$(1,-4)$,$(-2,32)$,$(\frac{2}{3},0)$. 故除切点外，还有两个交点.

【反思与小结】曲线与直线相切，并不一定只有一个公共点，一般情况下，认为直线与曲线相

切有且只有一个公共点，是直线与二次曲线的情况，其他时候这个观点不正确.

归纳总结

1. 对于一些函数的导数，往往先将式子进行化简，然后再进行求导，这样有时会大大降低运算过程.

2. 复合函数的求导法则可以推广到多个中间变量的情形，我们以两个中间变量为例，设 $y=f(u)$，$u=g(v)$，$v=h(x)$，则复合函数 $f\{g[h(x)]\}$ 的导数为 $y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x$.

拓展提高

1. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数，若 $f(x)$ 是奇函数，试判断导函数 $f'(x)$ 的奇偶性.

【分析】判断函数的奇偶性，应从函数奇偶性的定义入手.

【解】∵ $f(x)$ 是奇函数，∴对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(-x)=-f(x)$，两边同时取导数得 $-f'(-x)=-f'(x)$，即 $f'(-x)=f'(x)$，所以导函数 $f'(x)$ 是偶函数.

【变式 1】上题中的 $f(x)$ 若是偶函数，试判断 $f'(x)$ 的奇偶性.

【变式 2】若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数，且对任意实数 x，都有 $f(x+5)=f(x)$，试判断 $f'(x)$ 的周期性.

【变式 3】设函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上以 5 为周期的可导偶函数，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=5$ 处的切线的斜率.

2. 设 $f_0(x)=\sin x$，$f_1(x)=f_0'(x)$，$f_2(x)=f_1'(x)$，…，$f_{n+1}(x)=f_n'(x)$，$n\in\mathbf{N}$，求 $f_{2005}(x)$.

【解】$f_1(x)=(\sin x)'=\cos x$，$f_2(x)=(\cos x)'=-\sin x$，$f_3(x)=(-\sin x)'=-\cos x$，$f_4(x)=-(\cos x)'=\sin x$，$f_5(x)=(\sin x)'=\cos x=f_1(x)$，$f_6(x)=f_2(x)$，….

∵ $f_{n+4}=f_n(x)$，可以推知周期为 4，

∴ $f_{2005}(x)=f_1(x)=\cos x$.

【反思与小结】掌握基本函数的求导是解决此题的关键，在运算中要发现式子的变化规律和周期性.

【变式 1】上题中若 $f_0(x)=\cos x$，求 $f_{2005}(x)$.

【变式 2】已知 $f_1(x)=\sin x+\cos x$，记 $f_2(x)=f_1'(x)$，$f_3(x)=f_2'(x)$，…，$f_n(x)=f_{n-1}'(x)(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant2)$，求 $f_1(\frac{\pi}{2})+f_2(\frac{\pi}{2})+\cdots+f_{2009}(\frac{\pi}{2})$ 的值.

展示平台

基础训练

1. 函数 $y=(2x+2a)(x-a)^2$ 的导数为 ( )

A. $2(x^2-a^2)$ B. $3(x^2+a^2)$

C. $3(x^2-a^2)$ D. $2(3x^2-2ax-a^2)$

2. 下列函数中,导数不等于$\frac{1}{2}\sin 2x$ 的是 ( )

A. $2-\frac{1}{4}\cos 2x$ B. $2+\frac{1}{2}\sin^2 x$

C. $\frac{1}{2}\sin^2 x$ D. $x-\frac{1}{2}\cos^2 x$

3. 已知函数 $y=(1+x^2)\ln x$,则 $y'=$ ( )

A. $(1+2x)\ln x+\frac{1+x^2}{x}$

B. $(1+2x)\ln x-\frac{1+x^2}{x}$

C. $2x\ln x+\frac{1+x^2}{x}$

D. $2x\ln x-\frac{1+x^2}{x}$

4. $f(x)=\frac{x+2}{3x^2}$,且 $f'(x_0)=0$,则 $x_0=$ ( )

A. $-\frac{2}{3}$ B. 2 C. -3 D. -4

5. $f(x)=ax^3+3x^2+2$,若 $f'(-1)=4$,则 a 的值等于 ( )

A. $\frac{19}{3}$ B. $\frac{16}{3}$ C. $\frac{13}{3}$ D. $\frac{10}{3}$

6. 过正弦曲线 $y=\sin x$ 上点 $P(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2})$的切线方程是 ( )

A. $\sqrt{3}x+2y+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}-1=0$

B. $\sqrt{3}x-2y+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}-1=0$

C. $\sqrt{3}x+2y-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}+1=0$

D. $\sqrt{3}x-2y-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}+1=0$

7. 曲线 $y=e^x$ 在点$(2,e^2)$处的切线与坐标轴所围成的三角形的面积为 ( )

A. $\frac{9}{4}e^2$ B. $2e^2$ C. e^2 D. $\frac{e^2}{2}$

8. 设函数 $f(x)=x^m+ax$ 的导数为 $f'(x)=2x+1$,则数列$\left\{\frac{1}{f(n)}\right\}(n\in\mathbf{N}^*)$的前 n 项和是 ( )

A. $\frac{n}{n+1}$ B. $\frac{n+2}{n+1}$

C. $\frac{n}{n-1}$ D. $\frac{n+1}{n}$

9. 设函数 $y=\frac{1}{(1-3x)^4}$,则 $y'=$__________.

10. 函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的导函数 $y'=$__________.

11. 给出下列三个等式:

①$(\frac{1+\cos x}{x^2})'=\frac{2x(1+\cos x)+x^2\sin x}{x^2}$

②$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2}\sqrt{x}$

③$(\sin^4\frac{x}{4}+\cos^4\frac{x}{4})'=-\frac{1}{4}\sin x$

其中正确等式的序号是________.

12. 曲线 $y=\ln(2x-1)$上的点到直线 $2x-y+3=0$ 的最短距离是__________.

13. 已知曲线 C:$y=x^3-3x^2+2x$,直线 l:$y=kx$,且直线 l 与曲线 C 相切于点$(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$,求直线 l 的方程及切点坐标.

14. 已知:函数 $f(x)-x^2(x-1)$,当 $x=x_0$ 时,有 $f'(x_0)=f(x_0)$,求 x_0 的值.

15. 已知曲线 $C_1: y=x^2$ 与 $C_2: y=-(x-2)^2$. 直线 l 与 C_1、C_2 都相切,求直线 l 的方程.

能力训练

16. 曲线 $y=e^{2x}\cdot\cos 3x$ 在点(0,1)处的切线与直线 l 的距离为$\sqrt{5}$,求直线 l 的方程.

17. 偶函数 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 的图象过点 $P(0,1)$,且在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=x-2$,求 $y=f(x)$ 的解析式.

反思提高