

思维潜能 小学版

“中环杯”思维能力训练活动编委会 编



上海交通大学出版社

思维潜能

(小学版)

——“中环杯”中小学生思维能力训练
活动核心内容解析(一)

“中环杯”思维能力训练活动编委会 编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

从 2001 年至今,每年九月开学伊始,新一届的“中环杯”中小学生思维能力训练活动就会拉开序幕。应广大读者要求,我们邀请了部分数学专家编写了《思维潜能》丛书供大家学习参考。丛书分小学版和中学版,本书是小学版第一册。本书按章、节进行编写,内容主要包括速算与巧算、正整数的性质、常见应用题、行程问题、基本数学原理、平面图形、立体图形、极值问题及参考答案。每章中部分内容包括“中环杯”中小学生思维能力训练活动举办至今的部分核心训练专题,每一专题都由专家举例并讲解,同时设计了具有针对性的训练内容,有助于学生开拓思维能力,掌握解题方法。

图书在版编目(CIP)数据

思维潜能:小学版 / “中环杯”思维能力训练活动编委会编. —上海:上海交通大学出版社,2012
ISBN 978-7-313-08895-6

I. ①思… II. ①中… III. ①小学数学课—课外读物
IV. ①G624.503

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 188132 号

思维潜能

(小学版)

——“中环杯”中小学生思维能力训练活动核心内容解析(一)

“中环杯”思维能力训练活动编委会 编

上海交通大学 出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话:64071208 出版人:韩建民

上海春秋印刷厂印刷 全国新华书店经销

开本:787 mm×1 092mm 1/16 印张:12.75 插页:2 字数:311 千字

2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 1 次印刷

印数:1~32500

ISBN 978-7-313-08895-6/G 定价:30.00 元

版权所有 侵权必究

告读者:如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

前言

“中环杯”中小学生思维能力训练活动由上海青少年思维能力训练活动组委会主办,从2001年举办至今。活动将思维训练和动手动脑紧密联系起来,让学生将课本知识和实践能力融会贯通,为提高中小学生的综合素质起到了十分重要的作用。活动举办至今,每年都受到学校、学生、家长及社会各界的普遍欢迎,在学生中引发了思维训练活动热潮。“中环杯”思维能力训练活动正在成为华东地区乃至全国青少年中有重要影响力的品牌活动。

为了能让更多的中小學生参与到此项活动中来,为他们提供参加活动和提高能力的参考,应广大中小學生、教师及家长的要求,我们邀请了部分数学专家编写了《思维潜能》丛书。丛书分小学版和中学版,本书是小学版第一册。本书按章、节进行编写,共有8章。每章中部分内容 by 专家对历届“中环杯”小学生思维能力训练活动的部分核心训练专题进行举例并作深入浅出的讲解,且很多例题中,一题多解,列举了多种形式的思维方式,有助于学生开拓思维能力,掌握新的解题方法。

本书还在每一章节最后精心设计了训练内容,相信通过这些核心知识的学习和训练,能引导学生作规律性的探讨,从中得到启迪,熟悉思维训练的方法。

本书在编写过程中难免会有不足之处,欢迎大家批评指正。

编者

2012年7月

目 录

第一章	速算与巧算	1
第一节	整数的速算与巧算	1
第二节	小数的速算与巧算	8
第三节	分数的速算与巧算	13
第二章	正整数的性质	21
第一节	概论	21
第二节	数的组成	22
第三节	数的分类	24
第四节	数的运算特性	31
第五节	余数问题	37
第三章	常见应用题	43
第一节	倍数问题	43
第二节	盈亏问题	50
第三节	置换问题	54
第四节	牛吃草问题	59
第四章	行程问题	65
第一节	基本行程问题	65
第二节	复杂行程问题	70
第三节	特殊的行程问题	74
第五章	基本数学原理	77
第一节	加法与乘法原理(一)	77
第二节	加法与乘法原理(二)	79
第三节	抽屉原理	83
第四节	容斥原理	85



第六章 平面图形	89
第一节 几何学和几何图形	89
第二节 等积变形	90
第三节 图形的分与合	97
第四节 图形的割与补	101
第五节 巧妙添加辅助线	104
 第七章 立体图形	114
第一节 概论	114
第二节 计数问题	115
第三节 最短路线问题	120
第四节 表面积与体积问题	124
第五节 容积问题	131
 第八章 极值问题	135
第一节 简单的数组成的极值问题	135
第二节 图形极值问题、复杂的数组成的极值问题	138
第三节 统筹的数学思想——最优化原则	141
 参考答案	145

第一章 速算与巧算

计算,是数学的基础技能,也是今后研究其他自然科学的一个工具。在小学数学竞赛中,计算的速度直接决定了思考复杂问题时间的多少。因此,在任何一本竞赛类学习教材中,速算与巧算总是首当其冲要解决的问题。速算指利用数与数之间的特殊关系进行较快的加减乘除运算。巧算指运用加减乘除运算定律与运算性质巧妙地算出答案。巧算中所运用的运算定律与运算性质往往又加快了运算的速度。例如: $203 \times 18 = 200 \times 18 + 3 \times 18 = 3654$,将203拆成“ $200 + 3$ ”,运用“乘法分配律”进行巧算,从而快速地计算出结果。因此,速算与巧算总是两个不可分割的有机统一的整体。

第一节 整数的速算与巧算

(注意:本节内容适合三、四、五年级的学生)

一、交换律与结合律

1. 加法

加法交换律 两个数相加,交换加数的位置,它们的和不变(用字母式表示: $a + b = b + a$)。

加法结合律 三个数相加,先把前两个数相加,再加上第三个数,或者先把后两个数相加,再和第一个数相加,它们的和不变(用字母式表示: $(a + b) + c = a + (b + c)$)。

例1 计算: $397 + 157 + 203$ 。

分析 在加法运算中,运用加法的交换律或结合律,先把加起来是整十、整百、整千……的数加起来,使计算简便,这种方法称为“凑整法”。

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= 397 + 203 + 157 \\ &= 600 + 157 \\ &= 757\end{aligned}$$

例2 计算: $63 + 27 + 82 + 37 + 173 + 218 + 156$ 。

分析 此算式中参与运算的数字较多,要注意合理凑整,将能凑成整百的数先算。

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= (63 + 37) + (173 + 27) + (82 + 218) + 156 \\ &= 100 + 200 + 300 + 156 \\ &= 756\end{aligned}$$



例 3 计算:

(1) $574 + 289$;

(2) $9 + 99 + 999 + 9\,999$ 。

分析 有些加法看起来并不具备巧算的条件,但是在运算中将某个加数拆成两个或若干个数的和或差,使计算简便。

解 (1) 原式 $= 563 + 11 + 289$
 $= 563 + (11 + 289)$
 $= 563 + 300$
 $= 863$

或原式 $= 574 + 300 - 11$
 $= 300 + 574 - 11$
 $= 300 + 563$
 $= 863$

(2) 原式 $= 6 + 1 + 1 + 1 + 99 + 999 + 9\,999$
 $= 6 + (1 + 99) + (1 + 999) + (1 + 9\,999)$
 $= 11\,106$

或原式 $= 9 + (100 - 1) + (1\,000 - 1) + (10\,000 - 1)$
 $= 6 + 100 + 1\,000 + 10\,000$
 $= 11\,106$

2. 乘法

乘法交换律 两个数相乘,交换因数的位置,它们的积不变(用字母式表示: $a \times b = b \times a$)。

乘法结合律 三个数相乘,先把前两个数相乘,再乘第三个数,或者先把后两个数相乘,再和第一个数相乘,它们的积不变(用字母式表示: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$)。

例 4 计算: $25 \times 19 \times 4$ 。

分析 在乘法运算中,运用乘法的交换律与结合律,先把乘起来是 10, 20, ..., 90, 100, 200, ..., 900, 1 000, 2 000, ..., 9 000, ... 的数先乘,使计算简便。

解 原式 $= 25 \times 4 \times 19$
 $= 100 \times 19$
 $= 1\,900$

例 5 计算: $125 \times 2 \times 25 \times 15 \times 4 \times 4$ 。

分析 在一个较复杂的乘法算式中,要有耐心仔细观察,将能凑成 10, 100, 1 000, ... 的数交换后结合在一起先进行计算。

解 原式 $= (125 \times 4 \times 2) \times (25 \times 4) \times 15$
 $= 1\,000 \times 100 \times 15$
 $= 1\,500\,000$

例 6 计算:

(1) 28×35 ;



$$(2) 125 \times (37 + 27) \times 25。$$

分析 类似的在乘法中也有看起来并不具备巧算条件的算式,同样需要在运算中将某个因数拆成两个或若干个因数,使计算简便。

$$\begin{aligned}\text{解 (1) 原式} &= 14 \times 2 \times 35 \\ &= 14 \times (2 \times 35) \\ &= 14 \times 70 \\ &= 980\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \text{原式} &= 125 \times 64 \times 25 \\ &= 125 \times 8 \times 8 \times 25 \\ &= (125 \times 8) \times (8 \times 25) \\ &= 1\,000 \times 200 \\ &= 200\,000\end{aligned}$$

二、运算性质

1. 减法

性质 1 一个数减去两个数的和,等于从这个数里依次减去括号中的每个加数。(用字母式表示: $a - (b + c) = a - b - c$)。

性质 2 一个数减去两个数的差,等于从这个数中减去括号中的被减数,再加上括号中的减数(用字母式表示: $a - (b - c) = a - b + c$)。

例 7 计算:

$$\begin{aligned}(1) & 743 - (143 + 189); \\ (2) & 923 - 337 - 163.\end{aligned}$$

分析 在运用减法性质进行速算时,一定要注意再加上或去掉括号时,括号内的运算符号要及时变号。

$$\begin{aligned}\text{解 (1) 原式} &= 743 - 143 - 189 \\ &= 600 - 189 \\ &= 411\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \text{原式} &= 923 - (337 + 163) \\ &= 923 - 500 \\ &= 423\end{aligned}$$

例 8 计算: $1\,000 - 100 + 99 - 98 + 97 - 96 + 95 - 94 + 93 - 92 + 91$ 。

分析 在实际运算中往往需要 we 们注意数与数之间的规律,灵活地运用减法性质进行巧算。

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= 1\,000 - (100 - 99) - (98 - 97) - (96 - 95) - (94 - 93) - (92 - 91) \\ &= 1\,000 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 \\ &= 1\,000 - (1 + 1 + 1 + 1 + 1) \\ &= 995\end{aligned}$$

2. 除法

商不变性质 如果被除数和除数同时乘以或除以同一个数(0 除外),所得的商不变。



性质 1 一个数除以另一个数所得的商再去除以第三个数,等于这个数除以两个数的积(用字母式表示: $a \div b \div c = a \div (b \times c)$)。

性质 2 一个数除以两个数的商,等于用这个数除以商里的被除数,再乘商里的除数。(用字母式表示: $a \div (b \div c) = a \div b \times c$)。

例 9 计算:

(1) $675 \div 25$;

(2) $2\,800 \div 25 \div 4$;

(3) $125 \div (25 \div 4)$ 。

分析 除法的运算性质在运用时,首先要注意当除数个位是 5 时,可以利用“ $5 \times 2 = 10$ ”这个特点进行凑整;其次要注意观察被除数与除数之间的倍数关系,有倍数关系的被除数与除数可以先算。

解 (1) 原式 $= (675 \times 4) \div (25 \times 4)$

$$= 2\,700 \div 100$$

$$= 27$$

(2) 原式 $= 2\,800 \div (25 \times 4)$

$$= 2\,800 \div 100$$

$$= 28$$

(3) 原式 $= 125 \div 25 \times 4$

$$= 5 \times 4$$

$$= 20$$

例 10 计算: $444\,444 \div 37\,037 \times 34$ 。

分析 在实际运算中,利用除法的性质进行巧算,要多尝试各种搭配,从而找到使计算简便的合适组合。

解 原式 $= 4 \times 111\,111 \div (37 \times 1\,001) \times 34$

$$= 4 \times (111 \times 1\,001) \div 37 \div 1\,001 \times 34$$

$$= 4 \times (111 \div 37) \times (1\,001 \div 1\,001) \times 34$$

$$= 34 \times 4 \times 3$$

$$= 136 \times 3$$

$$= 408$$

三、乘法分配律

乘法分配律 两个数的和与一个数相乘,可以把两个加数分别与这个数相乘,再把两个积相加,所得的结果不变(用字母式表示: $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$)。

乘法分配律的延伸应用:

$$(a-b) \times c = a \times c - b \times c,$$

$$(a+b) \div c = a \div c + b \div c. \text{ (注意:只有当求两个数的和除以一个数时才能运用该方法。)}$$

例 11 计算: $4 \times (125 + 250)$ 。

分析 乘法分配律是在各类计算中运用最为广泛的技巧之一,因此可以说是巧算的灵魂。



$$\begin{aligned}
 \text{解 原式} &= 4 \times 125 + 4 \times 250 \\
 &= 500 + 1\,000 \\
 &= 1\,500
 \end{aligned}$$

例 12 计算:

- (1) 36×99 ;
 (2) 36×102 。

分析 将一个数拆成两个数的和与差再利用乘法分配律巧算是分配律运用中比较常见的一个技巧,必须要学会熟练的运用。

$$\begin{aligned}
 \text{解 (1) 原式} &= 36 \times (100 - 1) \\
 &= 36 \times 100 - 36 \times 1 \\
 &= 3\,600 - 36 \\
 &= 3\,564
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(2) 原式} &= 36 \times (100 + 2) \\
 &= 36 \times 100 + 36 \times 2 \\
 &= 3\,600 + 72 \\
 &= 3\,672
 \end{aligned}$$

例 13 计算:

- (1) $36 \div 17 + 49 \div 17$;
 (2) $37 \times 27 \times 17$ 。

分析 算式(1)中两个除法的除数相同,此时可以利用分配的思想逆向运用分配律将 36 与 49 先算出和再除以 17;而算式(2)中要注意 $37 \times 27 = 999$ 这一特殊情况的运用。

$$\begin{aligned}
 \text{解 (1) 原式} &= (36 + 49) \div 17 \\
 &= 85 \div 17 \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(2) 原式} &= 37 \times 3 \times 9 \times 17 \\
 &= 111 \times 9 \times 17 \\
 &= 999 \times 17 \\
 &= (1\,000 - 1) \times 17 \\
 &= 17\,000 - 17 \\
 &= 16\,983
 \end{aligned}$$

(注意:为运算简便起见,请记住 $37 \times 27 = 999$ 。)

四、几种特殊的运算技巧

1. 带着符号“搬家”

分析 在运算中,我们已经学过了交换加数和交换因数,其实减数与除数的位置也可以交换,但是在交换过程中往往会忘了带着运算符号一起交换,因此,我们把此类交换称之为带着符号“搬家”。而此种运算技巧往往和其他运算定律或运算性质混合应用。

例 14 计算: $3\,343 - (1\,653 - 932 + 343)$ 。



分析 通过对算式的观察我们可以发现,当去掉算式中的括号后,“3 343 与 343”可以凑整。

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= (3\,343 - 343) - (1\,653 - 932) \\ &= 3\,000 - 721 \\ &= 2\,279\end{aligned}$$

例 15 计算: $57 \times 8 \div 24$ 。

分析 观察一下可以发现 24 与 8 存在倍数关系。

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= 57 \div 24 \times 8 \\ &= 57 \div (24 \div 8) \\ &= 57 \div 3 \\ &= 19\end{aligned}$$

例 16 计算: $999 \div 222 \times 888$ 。

分析 观察一下可以发现 888 与 222 存在倍数关系,而 999 可以拆成“1 000 - 1”。

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= 999 \times 888 \div 222 \\ &= 999 \times 4 \\ &= (1\,000 - 1) \times 4 \\ &= 4\,000 - 4 \\ &= 3\,996\end{aligned}$$

2. 基准数法

分析 当一个算式中所有的数都与某一个数比较接近时,可以利用某些运算技巧进行巧算。我们将这个数称为基准数。

例 17 计算: $141 + 137 + 143 + 148 + 135$ 。

分析 通过观察可以发现这些数都接近 140,因此可以利用拆数的方法进行巧算。

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= (140 + 1) + (140 - 3) + (140 + 3) + (140 + 8) + (140 - 5) \\ &= 140 \times 5 + (3 - 3 + 1 + 8 - 5) \\ &= 700 + 4 \\ &= 704\end{aligned}$$

例 18 计算: $11 + 14 + 17 + 20 + 23$ 。

分析 如果一个算式中所有的数能排成一个差相等的序列,且数的个数为奇数个时,我们可以将中间的数作为基准数,直接乘算式中数的个数。

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= 17 \times 5 \\ &= 85\end{aligned}$$

3. 积不变

分析 一个乘法算式中,一个因数乘一个数,另一个因数除以相同的数,积不变。

例 19 计算: 196×25 。

分析 由于“ $25 \times 4 = 100$ ”,巧妙地利用积不变的规律可以让运算变得更快。

$$\text{解 原式} = (196 \div 4) \times (25 \times 4)$$



$$= 49 \times 100$$

$$= 4\,900$$

例 20 计算： $87 \times 240 + 24 \times 130$ 。

分析 通过观察可以发现 240 是 24 的 10 倍，利用积不变的规律可以把“ 87×240 ”转换成“ 870×24 ”，从而可以利用乘法分配律进行巧算。

解 原式 $= (87 \times 10) \times (240 \div 10) + 24 \times 130$

$$= 870 \times 24 + 24 \times 130$$

$$= 24 \times (870 + 130)$$

$$= 24 \times 1\,000$$

$$= 24\,000$$

例 21 计算： $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + 98 \times 99 + 99 \times 100$ 。

分析 通过对算式的观察可以发现无法直接利用任何运算定律进行巧算。因此必定需要主动构建算式，对原有算式进行拆分才有可能化繁为简。通过局部尝试发现，将每个乘法算式扩大 3 倍后可以得到“ $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 3 = 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times (4 - 1) = 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 - 1 \times 2 \times 3 = 2 \times 3 \times 4$ ”，因此利用积不变的方法能得到“ $1 \times 2 + 2 \times 3 = 2 \times 3 \times 4 \div 3$ ”。

解 原式 $= (1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 3 + 3 \times 4 \times 3 + \cdots + 98 \times 99 \times 3 + 99 \times 100 \times 3) \div 3$

$$= [1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times (4 - 1) + 3 \times 4 \times (5 - 2) + \cdots + 98 \times 99 \times (100 - 97) + 99 \times 100 \times (101 - 98)] \div 3$$

$$= [1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 - 1 \times 2 \times 3 + 3 \times 4 \times 5 - 2 \times 3 \times 4 + \cdots + 98 \times 99 \times 100 - 97 \times 98 \times 99 + 99 \times 100 \times 101 - 98 \times 99 \times 100] \div 3$$

$$= 99 \times 100 \times 101 \div 3$$

$$= 99 \div 3 \times 101 \times 100$$

$$= 333\,300$$

4. 巧算 11

例 22 计算： 63×11 。

分析 一个两位数与 11 相乘，我们可以用“两头拆开中间相加”的简便方法，将 6 与 3 的和放在 6 和 3 之间就得到了此题的答案。

解 原式 $= 693$

5. 巧算平方

例 23 计算： 37^2 。

分析 在计算中，我们经常会遇到两个相同数相乘，我们将这样的积称为平方数。当一个两位数与本身相乘时就需要用到笔算了。为了加快运算的速度可以用如下方法来运算。

$$\text{解 } 37^2 \begin{cases} 37 + 3 = 40 \\ 37 - 3 = 34 \end{cases} = 34 \times 40 + 3^2 = 1\,360 + 9 = 1\,369$$

$$\text{或 } 37^2 \begin{cases} 37 + 7 = 44 \\ 37 - 7 = 30 \end{cases} = 44 \times 30 + 7^2 = 1\,320 + 49 = 1\,369$$

到底运用哪种方法就要看实际情况而定了，就这题来说上面这种方法就显得比较简便。

**【实战练习 1-1】**

1. 计算: $42 + 68 + 31 + 32 + 38$ 。
2. 计算: $2\,500 - 987 - 13 + 162$ 。
3. 计算: $399\,999 + 39\,999 + 3\,999 + 399 + 39$ 。
4. 计算: $20 + 19 - 18 - 17 + 16 + 15 - 14 - 13 + 12 + 11 - 10 - 9$ 。
5. 计算: $200 - (15 - 16) - (14 - 15) - (13 - 14) - (12 - 13)$ 。
6. 计算: $375 \div 25$ 。
7. 计算: $5\,600 \div 7 \div 8$ 。
8. 计算: $22\,500 \div (100 \div 4)$ 。
9. 计算: $(20 + 8) \times 125$ 。
10. 计算: $6 \times 999 + 4 \times 998 + 2 \times 997 + 20$ 。
11. 计算: $44\,444 \times 99\,998 \div 11\,111$ 。
12. 计算: $(99 + 999 + 9\,999) \times 9$ 。
13. 计算: $4\,500 \div 25 \div 90$ 。
14. 计算: $(111 \times 58 - 148 \times 16) \div 37$ 。
15. 计算: $37 \times 27 \times 275$ 。
16. 计算: $999\,999 \div 185\,185 \times 20$ 。
17. 计算: $296 \times 297 - 298 \times 295$ 。
18. 计算: $11 \times 22 + 22 \times 33 + 33 \times 44 + 44 \times 55 + 55 \times 66 + 66 \times 77$ 。
19. 计算: 38×11 。
20. 计算: 76×11 。
21. 计算: 18^2 。
22. 计算: 32^2 。

第二节 小数的速算与巧算

(注意:本节内容适合四、五年级的学生)

小数的速算与巧算,其计算方法完全是建立在整数巧算的基础上,因此适用于整数的运算定律与运算性质以及一些运算技巧在小数的运算中都适用。但小数巧算的运算特点是在运算过程中要尽可能地得到整数,可以说“化整”是小数巧算中的核心思想。

例 1 计算: $3.17 + 2.74 + 4.7 + 5.27 + 0.26 + 6.3 + 5.83$ 。

分析 运用交换律与结合律凑整在小数里同样适用,但需要注意相同数位的数才能凑整。如,6.3 只能和 4.7 凑整,但不能和 3.17 凑整。同时,如果末位都能凑整那就要选择合适的数,比如 5.83 和 3.17, 5.27 百分位上都能凑整,但显然 5.83 和 3.17 凑整更合适。

解 原式 $= (3.17 + 5.83) + (2.74 + 0.26) + (4.7 + 6.3) + 5.27$
 $= 9 + 3 + 11 + 5.27$
 $= 28.27$

例 2 计算: (1) $9.26 - 4.38 - 2.62$;



$$(2) 9.26 - (4.38 + 2.26)。$$

分析 减法的运算性质,在小数运算中仍然适用。

$$\text{解 } (1) \text{ 原式} = 9.26 - (4.38 + 2.62)$$

$$= 9.26 - 7$$

$$= 2.26$$

$$(2) \text{ 原式} = 9.26 - 4.38 - 2.26$$

$$= 9.26 - 2.26 - 4.38$$

$$= 7 - 4.38$$

$$= 2.62$$

例 3 计算: $9.06 - (4.6 - 1.94)。$

分析 在凑整时要注意 9.06 与 4.6 并不能凑整,但是在去掉括号后,9.06 与 1.94 可以凑整,不过要注意最后运算结果是 11。

$$\text{解 } \text{原式} = 9.06 - 4.6 + 1.94$$

$$= 9.06 + 1.94 - 4.6$$

$$= 11 - 4.6$$

$$= 6.4$$

例 4 计算: (1) $8 \times 25 \times 1.25 \times 0.04;$

$$(2) 0.25 \times 1.25 \times 32。$$

分析 在小数运算时,整数巧算中的“ $125 \times 8 = 1\,000$ ”,“ $25 \times 4 = 100$ ”仍然是常用的凑整算式,只是在小数运算时要注意积中小数点的位置。

$$\text{解 } (1) \text{ 原式} = (1.25 \times 8) \times (25 \times 0.04)$$

$$= 10 \times 1$$

$$= 10$$

$$(2) \text{ 原式} = 0.25 \times 1.25 \times (4 \times 8)$$

$$= (0.25 \times 4) \times (1.25 \times 8)$$

$$= 1 \times 10$$

$$= 10$$

例 5 计算: $3\,600 \div 12.5。$

分析 商不变性质在小数巧算时依然是常用的技巧,这里要注意算式中被除数和除数同时扩大 0.08 倍后,除数变为 1。从中可以看出,化整是在小数运算时时刻要注意的。

$$\text{解 } \text{原式} = (3\,600 \times 0.08) \div (12.5 \times 0.08)$$

$$= 288 \div 1$$

$$= 288$$

例 6 计算: $7.24 \times 0.1 + 5 \times 7.24 + 4.9 \times 7.24。$

分析 在这道题中三个乘法算式中都有公因数 7.24,所以可以逆向运用乘法分配律,一般我们称之为提取公因数。

$$\text{解 } \text{原式} = 7.24 \times (0.1 + 4.9 + 5)$$



$$= 7.24 \times 10$$

$$= 72.4$$

例 7 计算: $1.83 \times 320 + 183 \times 6.7 + 18.3$ 。

分析 通过观察可以发现 1.83、18.3 和 183 依次都是 10 倍的关系。根据积不变的规律,我们可以将题中的这几个数进行适当的变化,再逆向运用乘法分配律计算就十分简便了。

解 原式 $= 18.3 \times 32 + 18.3 \times 67 + 18.3 \times 1$

$$= 18.3 \times (32 + 67 + 1)$$

$$= 18.3 \times 100$$

$$= 1830$$

例 8 计算: $1.25 \times 67.875 + 125 \times 0.675 + 1.25 \times 24.625$ 。

分析 此题不像上题可以很直观地看出能凑整的数,但是通过观察不难发现,1.25 和 125 通过积不变进行变化后必定可以得到相同的数进行乘法分配律的逆向应用。通过计算不难发现另外三个数也可以凑成整数。

解 原式 $= 1.25 \times 67.875 + 1.25 \times 67.5 + 1.25 \times 24.625$

$$= 1.25 \times (67.875 + 67.5 + 24.625)$$

$$= 1.25 \times 160$$

$$= 1.25 \times 8 \times 20$$

$$= 10 \times 20$$

$$= 200$$

例 9 计算: $7.5 \times 45 + 17 \times 2.5$ 。

分析 7.5 和 2.5 是 3 倍的关系,因此可以将 7.5×45 通过分拆的方法转化成 2.5×135 ,就能逆向运用乘法分配律了。但同时我们也发现 135 与 17 并不能凑成整十或整百数,那怎么办呢?别忘了,2.5 能利用积不变直接去找 4 的。

解 原式 $= 2.5 \times 3 \times 45 + 17 \times 2.5$

$$= 2.5 \times (135 + 17)$$

$$= 2.5 \times 152$$

$$= (2.5 \times 4) \times (152 \div 4)$$

$$= 10 \times 38$$

$$= 380$$

例 10 计算: $7.816 \times 1.45 + 3.14 \times 2.184 + 1.69 \times 7.816$ 。

分析 因为 $1.45 + 1.69 = 3.14$,所以可以通过两次逆向运用乘法分配律使计算变得更简便。

解 原式 $= 7.816 \times (1.45 + 1.69) + 3.14 \times 2.184$

$$= 7.816 \times 3.14 + 3.14 \times 2.184$$

$$= 3.14 \times (7.816 + 2.184)$$

$$= 3.14 \times 10$$

$$= 31.4$$

例 11 计算: $0.1 + 0.2 + 0.3 + \cdots + 0.9 + 0.10 + 0.11 + 0.12 + \cdots + 0.98 + 0.99$ 。



分析 0.1 到 0.9 之间的公差是 0.1, 0.10 到 0.99 之间的公差是 0.01, 所以解题的时候要注意, 绝不可像整数一般直接计算。

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= (0.1 + 0.9) \times 9 \div 2 + (0.10 + 0.99) \times 90 \div 2 \\ &= 4.5 + 49.05 \\ &= 53.55\end{aligned}$$

例 12 计算: $41.2 \times 8.1 + 53.7 \times 1.9 + 1.1 \times 92.5$ 。

分析 通过积不变可以把原式变为“ $41.2 \times 8.1 + 53.7 \times 1.9 + 1.1 \times 92.5$ ”, 容易看出 1.9 和 8.1 可以凑整, 1.9 和 1.1 也可以凑整, 但是却找不到相同的因数。所以这就需要我们自己来拆出相同的因数。

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= 41.2 \times 8.1 + 53.7 \times 1.9 + 1.1 \times 92.5 \\ &= 41.2 \times 8.1 + (41.2 + 12.5) \times 1.9 + 1.1 \times (12.5 + 80) \\ &= 41.2 \times 8.1 + 41.2 \times 1.9 + 12.5 \times 1.9 + 12.5 \times 1.1 + 1.1 \times 80 \\ &= 41.2 \times (8.1 + 1.9) + 12.5 \times (1.9 + 1.1) + 88 \\ &= 412 + 88 + 37.5 \\ &= 537.5\end{aligned}$$

例 13 计算: $(1 + 0.12 + 0.24) \times (0.12 + 0.24 + 0.35) - (1 + 0.12 + 0.24 + 0.35) \times (0.12 + 0.24)$ 。

分析 这个式子看似复杂无从下手, 但通过观察不难发现 $0.12 + 0.24$ 与 $0.12 + 0.24 + 0.35$ 分别出现了两次, 且两个乘法算式之间是减法运算。经过一定变型后必定有可互相抵消的部分, 使算式变得简单。因此不妨把这两个加法算式分别用字母代替, 使算式更易于变型。

$$\begin{aligned}\text{解 设 } A &= 0.12 + 0.24, B = 0.12 + 0.24 + 0.35, \\ \text{原式} &= (1 + A) \times B - (1 + B) \times A \\ &= 1 \times B + A \times B - 1 \times A - A \times B \\ &= B - A \\ &= 0.12 + 0.24 + 0.35 - 0.12 - 0.24 \\ &= 0.35\end{aligned}$$

例 14 若 $A = 9.876\,543 \times 3.456\,789$, $B = 9.876\,544 \times 3.456\,788$, 试比较 A, B 的大小。

分析 从题中不难看出 $9.876\,543$ 比 $9.876\,544$ 少了 $0.000\,001$, $3.456\,789$ 比 $3.456\,788$ 多了 $0.000\,001$ 。将 $3.456\,789$ 拆成 $3.456\,788 + 0.000\,001$, $9.876\,544$ 拆成 $9.876\,543 + 0.000\,001$ 后, 利用乘法分配律, A, B 分别可以分拆出相同部分, 之后只需要比剩余部分就可知晓两个数之间的大小了。

$$\begin{aligned}\text{解 } A &= 9.876\,543 \times (3.456\,788 + 0.000\,001) \\ &= 9.876\,543 \times 3.456\,788 + 9.876\,543 \times 0.000\,001 \\ B &= (9.876\,543 + 0.000\,001) \times 3.456\,788 \\ &= 9.876\,543 \times 3.456\,788 + 0.000\,001 \times 3.456\,788 \\ \text{因为, } 9.876\,543 \times 0.000\,001 &> 3.456\,788 \times 0.000\,001,\end{aligned}$$