# 经济应用数学

## ——微积分复习

上册

翟连林 编著

## 内 容 简 介

电视大学、职工大学及参加高等教育自学考试的学员，他们学习刻苦，但工作忙，家务负担重，学习困难大．作者积多年电视播讲及面授之经验，编写了这本经济类微积分复习用书，供广大学员复习用．本书的章节与教材对应，每章均提出复习要求、复习内容和基本要点等，并通过典型的例题介绍了解题的思路与技巧，并给出一定量的练习题．最后一章是综合练习，选编了电视大学经济类期末试题及其解答和评分标准．原稿经教学实践，反映较好，受到学员好评．

本书可供电视大学(经济类)、职工大学(经济类)等学员及参加高等教育自学考试的青年参考，亦可供财经类普通高等院校师生阅读．


电视大学 职工大学 高等教育自学考试

经济应用数学

——微积分复习

下 册

翟连林 编著

责任编辑 徐一帆

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986年11月第一版 开本：787×1092 1/32

1986年11月第一次印刷 印张：3 1/4

印数：0001—50,000 字数：71,000

统一书号：4031·2

本社书号：5580·4

定价： 0.65 元

电视大学　职工大学　高等教育自学考试

# 经济应用数学

## ——微积分复习

科学出版社

1986

# 前　言

近几年来，我一直从事电视大学《经济应用数学基础》的电视和面授的教学工作，许多经济类学员把数学视为“拦路虎”，也确实有一部分学员被这只“虎”拦住，经济类学员，绝大多数人的数学基础比较差，加上工作忙，家务负担重，学习时间少，确实困难不小．

期末复习是整个教学过程的一个重要环节，特别是对于成人学员，平时工作忙，有的人听课断断续续，作业不能很好完成，期末复习就显得格外重要，怎样用较短的时间，根据成人的学习特点，通过期末复习，把学过的知识系统化、条理化，掌握基本的理论和基本的方法，这是我近几年来一直思考并有意识地进行试验的课题．83级电大经济类，在期末复习阶段，我选择了一个数学较差的教学班．开始，不少学员失去复习好的信心，特别是工作负担重的干部，平日丢了不少课，认为一定被数学这只“虎”拦住，接班后我先摸底，然后做学员的思想工作，让学员建立起能复习好数学的信心，我针对学员的情况，把他们学过的零散知识系统化，把他们学得薄弱或未学的知识补上，总共花了21学时，最后全班都通过了考试．近一年来我又承担了我校工业企业管理专业（厂长、经理班）的《经济应用数学基础》的电视和面授的教学任务，这批学员都是领导干部，工作特别忙，数学基础也很差，家务负担重，学习中的困难更大．我选择了一个近80人的教学班进行试验，期末考试一般教学班平均约有20%被数学这只“虎”拦住，而这个教学班全部通过(一人因公长期出差除外)．

本书是我近几年来对电大学员进行期末复习的讲稿，经过加工、补充、整理而成的．使用的教材是中央广播电视大学出版社出版的《经济应用数学（一）微积分》（1986年5月版）和中国人民大学出版社出版的《经济应用数学基础(一)微积分》（1982年5月版）．每一章包括复习要求、复习内容、练习题和练习题解答四部分，最后一章是综合练习，包括自我检查题及解答，近几年电大经济类各专业期末考试题及解答．

我的试验刚刚开始，把这个不成熟的讲稿拿出来供读者参考，希望和大家一起探讨和总结这方面的经验，请读者特别是同行，提出宝贵意见，为提高成人高等教育的数学教学质量而共同努力．

北京广播电视大学　翟连林

1986．9．28．

# 目　　录

## 上　　册


**第一章　函数** …… 1
一、复习要求 …… 1
二、复习内容 …… 1
（一）函数的概念 …… 1
（二）函数的几个特性 …… 6
（三）反函数、复合函数 …… 9
（四）初等函数 …… 12
（五）几个常用的经济函数 …… 14
三、练习题 …… 19
四、练习题解答 …… 22
**第二章　极限与连续** …… 26
一、复习要求 …… 26
二、复习内容 …… 26
（一）极限的概念 …… 26
（二）无穷大量与无穷小量 …… 29
（三）求极限的主要方法 …… 30
（四）函数的连续性 …… 41
三、练习题 …… 43
四、练习题解答 …… 45
**第三章　导数与微分** …… 50
一、复习要求 …… 50
二、复习内容 …… 50
（一）导数的概念 …… 50
（二）求导数的基本方法 …… 54

(三) 导数概念在经济问题中的一些应用 …………………… 64
三、练习题…………………………………………………… 69
四、练习题解答……………………………………………… 70
**第四章　中值定理及导数应用**…………………………… 75
一、复习要求………………………………………………… 75
二、复习内容………………………………………………… 75
(一) 中值定理 ……………………………………………… 75
(二) 函数的增减性 ………………………………………… 77
(三) 函数的极值 …………………………………………… 78
(四) 函数的最大值与最小值 ……………………………… 82
(五) 曲线的凹向、拐点及渐近线 ………………………… 87
(六) 函数的作图 …………………………………………… 88
三、练习题…………………………………………………… 90
四、练习题解答……………………………………………… 91
**第五章　不定积分**………………………………………… 97
一、复习要求………………………………………………… 97
二、复习内容………………………………………………… 97
(一) 原函数与不定积分的概念 …………………………… 97
(二) 不定积分的性质和基本积分表 ……………………… 99
(三) 积分法 ………………………………………………… 100
三、练习题…………………………………………………… 112
四、练习题解答……………………………………………… 115
**第六章　定积分**…………………………………………… 122
一、复习要求………………………………………………… 122
二、复习内容………………………………………………… 122
(一) 定积分的概念及性质 ………………………………… 122
(二) 定积分与不定积分的关系 …………………………… 124
(三) 定积分的换元法和分部积分法 ……………………… 127
(四) 定积分的应用 ………………………………………… 130

（五）广义积分…………………………………………………… 138
三、练习题…………………………………………………… 142
四、练习题解答……………………………………………… 145
**第七章　综合练习**……………………………………………… 153

## 下　　册

**第八章　多元函数**……………………………………………… 169
一、复习要求………………………………………………… 169
二、复习内容………………………………………………… 169
（一）空间直角坐标系……………………………………… 169
（二）二元函数……………………………………………… 170
（三）偏导数………………………………………………… 172
（四）全微分………………………………………………… 174
（五）复合函数的微分法…………………………………… 177
（六）隐函数的求导法……………………………………… 181
（七）极值问题……………………………………………… 183
（八）二重积分……………………………………………… 192
三、练习题…………………………………………………… 199
四、练习题解答……………………………………………… 201
**第九章　微分方程简介**…………………………………………… 212
一、复习要求………………………………………………… 212
二、复习内容………………………………………………… 212
（一）微分方程的一般概念………………………………… 212
（二）一阶微分方程………………………………………… 215
三、练习题…………………………………………………… 222
四、练习题解答……………………………………………… 223
**第十章　综合练习**……………………………………………… 227
一、自我检查题……………………………………………… 227
二、试题选编………………………………………………… 240

# 第一章　函　　数

## 一、复 习 要 求

1. 深刻理解函数的概念(包括分段函数)，知道符号 $y=f(x)$，$f(x_0)$ 或 $f(x)|_{x=x_0}$，$y|_{x=x_0}$ 的意义.

2. 熟练掌握函数的定义域的求法.

3. 了解反函数的定义,会由已知函数求出它的反函数,知道它们的图形关于直线 $y=x$ 对称.

4. 理解复合函数的概念，会把复合函数拆成几个简单函数,并知道它们的复合关系.

5. 掌握由简单实际问题建立函数解析式的方法，特别是建立经济问题中的总成本函数、价格函数、收益函数、利润函数、平均成本函数等的函数解析式,要深刻理解库存问题中的函数关系.

6. 掌握判断函数奇偶性,单调增减性、周期性和有界性的方法.

7. 熟记基本初等函数的公式及图形. 会用基本初等函数的图形，利用函数的性质以及函数之间的关系描绘较简单的函数图形.

## 二、复 习 内 容

### (一) 函 数 的 概 念

1. 函数的定义：在某一变化过程中，设有两个变量 $x$ 和

$y$，变量 $x$ 的变化范围为 $D$（实数集），如果对于 $D$ 中的每个 $x$ 值，按照某一对应规律 $f$，变量 $y$ 总有唯一确定的值和它对应，则称 $y$ 是 $x$ 的函数，记作

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

其中 $x$ 叫做自变量，$y$ 叫做因变量．并称自变量 $x$ 的变化范围 $D$ 叫做函数的定义域，而称因变量 $y$ 的变化范围叫做函数的值域．

函数 $y = f(x)$ 中的符号"$f$"表示 $x$ 与 $y$ 之间的某种对应规律，$f(x)$ 是一个完整的符号，不要误认为 $f$ 与 $x$ 相乘．对于不同的对应规律，可以用不同的符号，如 $y = g(x)$，$y = F(x)$ 等等．有时甚至可以重复用一个字母表示，如 $y=y(x)$，$L = L(x)$，$C = C(x)$ 等等．

记号 $f(x_0)$ 叫做 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 时的函数值．$x = x_0$ 时的函数值有时也记作 $y|_{x=x_0}$，或 $f(x)|_{x=x_0}$．

根据函数的定义，对于自变量 $x$ 所取定的每一个值，仅要求变量 $y$ 总有唯一确定的值和它对应，并没有要求 $y$ 一定要变化，因此，作为函数的特例，可以把常数 $C$ 也看作是函数，即 $y = C$．

有些函数在其定义域内，不能用一个式子表示，而是用两个或两个以上的式子表示，这样的函数我们称为分段函数．例如，

$$y = \begin{cases} x - 1 & (-\infty < x < 0), \\ 0 & (x = 0), \\ x + 1 & (0 < x < +\infty). \end{cases}$$

变量 $y$ 与 $x$ 之间的关系，完全符合函数的定义．

函数概念反映着自变量和因变量之间的依从关系．它涉及到定义域、对应规律和值域．但是很明显，只要定义域和对应规律确定了，值域也就随之确定．因此，定义域和对应规律

是确定函数的两个要素，只要两个函数的定义域和对应规律都相同，那么这两个函数就相同；只要定义域或对应规律之一不相同，那么这两个函数就不相同。

例如，$y=1$ 与 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$，这两个函数的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，对应规律都是：不管 $x$ 取任何值，$y$ 都恒等于 1（因为有三角恒等式 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$），因此它们是相同的函数。

又如，$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$，虽然它们的定义域都一样 $(-\infty<x<+\infty)$，值域也相同 $(|y|\leqslant 1)$，但对应规律不同. 比如取 $x=\frac{\pi}{2}$，$\sin\frac{\pi}{2}=1$，而 $\cos\frac{\pi}{2}=0$，因此它们是不同的函数。

再如，$y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$，前者定义域不包括 $x=1$，后者不受这个限制，二者定义域不同，所以它们是不同的函数。

2. 函数定义域的求法

除了在解决实际问题时，根据变量的实际变化范围来确定定义域之外，在数学中，当函数 $y=f(x)$ 通过一个表达式表示时，我们规定其定义域就是使该式子有意义的自变量的值的全体. 因此，在确定函数的定义域时，必须注意下面几点：

(1) 函数式里如果有分式，则使分母为零的自变量的值必须除外。

(2) 函数式里如果有偶次根式，则根号里的整个式子必须大于或等于零。

(3) 函数式里如果有对数记号，则要使真数为正。

(4) 函数式里如果有正切函数或余切函数，则在正切、余

切符号下的式子的值分别不能等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\pi(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

(5) 函数式里如果有反正弦或反余弦函数,则在反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值不能大于1.

(6) 如果函数的表达式由若干项组成，则它的定义域是各项定义域的公共部分。

(7) 对于几个式子表示的分段函数，其定义域是各式定义域加在一起.

**例1** 求函数

$$y=\sqrt{x-2}+\frac{1}{x-3}+l_g(5-x)$$

的定义域.

**解**: 在实数范围内,当 $x-2\geqslant0$ 时, $\sqrt{x-2}$ 才有意义;

当 $x\neq3$ 时, $\frac{1}{x-3}$ 才有意义;

当 $5-x>0$ 时, $l_g(5-x)$ 才有意义.

因此,要使函数 $y$ 的表达式有意义,必须有

$$\begin{cases}x-2\geqslant0,\\x\neq3,\\5-x>0.\end{cases}\quad 即\quad\begin{cases}x\geqslant2,\\x\neq3,\\x<5.\end{cases}$$

所以函数 $y$ 的定义域为

$$2\leqslant x<5,\quad 但\quad x\neq3.$$

**说明**: 函数的定义域一般有五种表示方法,即: (1) 不等式表示法; (2) 区间表示法; (3) 集合表示法; (4) 图示法; (5) 叙述法.

本题用的是不等式表示法. 若用区间表示法，则为 [2,

3) $\cup(3, 5)$；若用集合表示法，则为$\{x \mid 2 \leqslant x < 5, 但 x \neq 3\}$；若用图示法，则如图 1-1 所示.

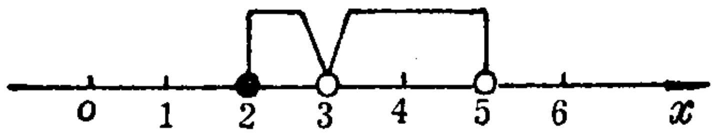

图 1-1

**例 2** 求函数 $y=\sqrt{16-x^2}+\ln \sin x$ 的定义域.

**解**：要使函数 $y$ 的表达式有意义，必须有

$$\begin{cases} 16-x^2 \geqslant 0 & \text{①} \\ \sin x > 0 & \text{②} \end{cases}$$

解①：$x^2 \leqslant 16$，即 $|x| \leqslant \sqrt{16}=4$，

$\therefore \quad -4 \leqslant x \leqslant 4$ ③

解②：正弦函数在第一、二象限为正，因此

$$0 < x < \pi.$$

又，正弦函数的周期为 $2\pi$，所以

$$2k\pi < x < \pi + 2k\pi \ (k \in 整数集\ Z) \quad ④$$

把③、④表示的 $x$ 的取值范围画在数轴上，如图 1-2 所示.

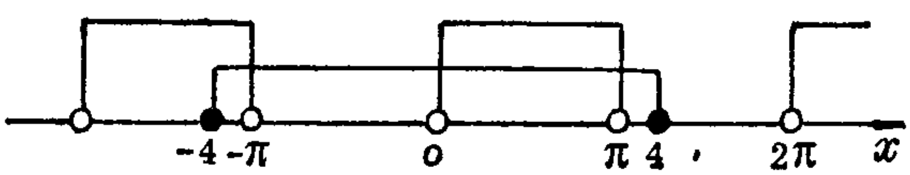

图 1-2

取③、④的公共部分(交集)，得所求的定义域为

$$[-4, -\pi) \cup (0, \pi).$$

**例 3** 设函数

$$f(x)=\begin{cases}-x, & (x<0)\\ x^2, & (0\leqslant x<2)\\ x+2. & (x>2)\end{cases}$$

求 $f(x)$ 的定义域及 $f(-2)$，$f(3)$.

**解**：这是个分段函数，把几个式子的定义域加在一起就是 $f(x)$ 的定义域 $D$，即

$$\begin{aligned}D&=\{x\mid x\in(-\infty,0)\}\cup\{x\mid x\in[0,2)\}\\&\quad\cup\{x\mid x\in(2,+\infty)\}\\&=(-\infty,2)\cup(2,+\infty).\end{aligned}$$

$\because$ $-2<0$，则函数的表达式是 $f(x)=-x$，

$\therefore$ $f(-2)=-(-2)=2$.

$\because$ $3>0$，则函数的表达式是 $f(x)=x+2$，

$\therefore$ $f(3)=3+2=5$.

## （二）函数的几个特性

1. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域是对称区间 $[-a,a](a>0)$，若在它的定义域内任取一点，总有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 是偶函数；若总有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 是奇函数.

偶函数的图象关于 $y$ 轴对称；奇函数的图象关于原点对称.

**例 1** 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=f(x)=2x^2+1$；

(2) $y=f(x)=-x+\sin x$；

(3) $y=f(x)=x^2+x$.

**解**：(1) 函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$. 在这个对称区

间内任取一点 $x$, 总有

$$f(-x)=2(-x)^2+1=2x^2+1=f(x),$$

所以 $f(x)=2x^2+1$ 是偶函数.

(2) 函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

$\because\quad f(-x)=-(-x)+\sin(-x)=x-\sin x$

$\qquad\qquad =-(-x+\sin x)=-f(x),$

$\therefore\quad f(x)=-x+\sin x$ 是奇函数.

(3) $f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x$.

由于 $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$,

所以 $f(x)=x^2+x$ 是非奇非偶函数.

2. 周期性

对于函数 $y=f(x)$, 如果存在正的常数 $T$, 使 $f(x)=f(x+T)$ 恒成立,则称此函数为周期函数. 满足这个等式的最小正数 $T$, 称为函数的周期.

例如, $y=\sin x$, $y=\cos x$ 的周期是 $2\pi$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ 的周期是 $\pi$.

一般地, $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ (其中 $A$, $\omega$, $\varphi$ 为常数,且 $A\neq 0$, $\omega>0$) 的周期是

$$T=\frac{2\pi}{\omega}.$$

**例 2** 试判断函数 $y=\sin x\cos x$ 的奇偶性, 并求出它的周期.

**解**: 函数 $y$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

$\because\quad f(-x)=\sin(-x)\cos(-x)=-\sin x\cos x$

$\qquad\qquad =-f(x),$

$\therefore\quad y=\sin x\cos x$ 是奇函数.

又 $y=\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x,$

$$\therefore \quad T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi.$$

3. 单调增减性

若函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a, b)$ 内的任意两点 $x_1$ 和 $x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称此函数在 $(a, b)$ 内是单调增加的；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称此函数在区间 $(a, b)$ 内是单调减少的.

判断函数的增减性，常用导数判别法，即：对于 $y=f(x)$，$x\in(a, b)$. 当 $f'(x)>0$ 时，$f(x)$ 在 $(a, b)$ 内单调增加；当 $f'(x)<0$ 时，$f(x)$ 在 $(a, b)$ 内单调减少.

4. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a, b)$ 内有定义[$(a, b)$ 可以是 $y=f(x)$ 的整个定义域，也可以是定义域的一部分]，如果存在一个正数 $M$，对于所有 $x\in(a, b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 内是有界的. 如果不存在这样的正数 $M$，则称 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 内是无界的.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的，因为 $|\sin x|\leqslant 1$，当 $x$ 取任一实数时都成立，这里 $M=1$（当然，也可以取任何大于 1 的数作为 $M$）. 函数 $y=\frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内是无界的，因为不存在这样的正数 $M$，使 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant M$，对于 $(0, 1)$ 内一切 $x$ 都成立. 但是 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(1, 2)$ 内是有界的，例如可以取 $M=1$，而 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 对于 $(1, 2)$ 内一切 $x$ 都成立. 因此，函数是否有界，不仅与函数有关，而且还与区间有关.

## （三）反函数、复合函数

1. 反函数

设已给 $y$ 是 $x$ 的函数：$y = f(x)$.

若将 $y$ 当作自变量，$x$ 当作函数，则由上面关系式所确定的函数：

$$x = f^{-1}(y)$$

叫做函数 $f(x)$ 的反函数.

为了与习惯一致，用 $x$ 表示自变量，用 $y$ 表示因变量，则 $y = f(x)$ 的反函数就写成

$$y = f^{-1}(x).$$

例如，求 $y = 3x - 1$ 的反函数，解出 $x = \dfrac{y+1}{3}$，按习惯写成 $y = \dfrac{x+1}{3}$，这就是 $y = 3x + 1$ 的反函数.

反函数 $y = f^{-1}(x)$ 与直接函数 $y = f(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

**例 1** 求函数 $y = \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1})\,(a > 0, a \neq 1)$ 的反函数.

**解：** 先由 $y = f(x)$ 求出 $x = f^{-1}(y)$，再将 $x = f^{-1}(y)$ 改为 $y = f^{-1}(x)$.

由 $y = \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1})$，得

$$x + \sqrt{x^2 - 1} = a^y$$

$$\Rightarrow x - a^y = -\sqrt{x^2 - 1}.$$

两边平方，得

$$(x - a^y)^2 = x^2 - 1$$