

GAODENGSHUXUE TONGBULIANXICE

# 高等数学同步练习册

主 编 杨策平 刘 磊



同济大学出版社  
TONGJI UNIVERSITY PRESS

# 高等数学同步练习册

主 编 杨策平 刘 磊  
副主编 黄 斌 王 红



同濟大學出版社  
TONGJI UNIVERSITY PRESS

## 内 容 提 要

本书是按照教育部最新《高等数学课程教学基本要求》，结合近几年来普通高等学校高等数学教学改革的实践、发展与变化而编写出来的。内容包括：函数与极限，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程，空间解析几何，多元函数微分学及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数。每章每节的习题都是由浅入深，起到练习、巩固和提高的作用。本书的习题附有答案，如有需要请联系本社责编索取。

本书可供普通高等学校理工类本科学生使用，非理工类学生可选做，对于有志报考研究生的学生，本书也是一本有价值的参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步练习册/杨策平,刘磊主编. —上海:  
同济大学出版社,2013.9

ISBN 978-7-5608-5285-0

I. ①高… II. ①杨…②刘… III. ①高等数学—高等  
学校—习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 215256 号

---

---

## 高等数学同步练习册

主编 杨策平 刘磊 副主编 黄斌 王红

责任编辑 陈佳蔚

责任校对 徐春莲

封面设计 潘向葵

出版发行 同济大学出版社 [www.tongjipress.com.cn](http://www.tongjipress.com.cn)  
(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 12.5

印 数 1—3 100

字 数 312 000

版 次 2013 年 9 月第 1 版 2013 年 9 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-5285-0

---

定 价 26.00 元

---

---

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

# 前 言

近几十年来,数学已向自然科学和社会科学的各个领域迅速渗透。在经济建设、金融管理及工程技术等各个方面发挥着日益重要的作用,而发展迅猛的计算机技术与数学的结合,更成为当代高新技术的一个重要组成部分,用数学来解决各类问题,数学建模起着关键的作用。因此,为 21 世纪培养高层次、高素质的人才,就不能不重视高等数学这门课程的教学与改革。

目前高等数学课程及其教学辅导教材很多,它们都各有各的特色,但是适用于独立学院,质量较高的却很少。为了更好地提高独立学院本专科学生的数学基础,加强他们对高等数学的学习兴趣,湖北工业大学工程技术学院的同仁在长期教授高等数学课程中,深感有针对性又较为完备地编写一部高等数学辅导教材的重要性和迫切性。

作为一种尝试,我们将多年的教学经验及培训资料归纳整理,并借鉴同行同类教材的精髓,编写出这本《高等数学同步练习册》,以飨读者。具体编写人员为:王红(第一章),刘磊(第二章),朱莹(第三章),胡二琴(第四章),黄毅(第五章),黄斌(第六章),朱长青(第七章),商豪(第八章),朱玲(第九章),杨策平(第十章),任潜能(第十一章)。本书的习题附有答案,如有需要请联系本社责编索取。

本书在编写过程中,得到湖北工业大学工程技术学院的领导和专家的大力支持和帮助,在此表示衷心地感谢。

编 者

2013 年 8 月

# 目 录

## 前言

第一章 函数与极限	1
第一节 函数	1
第二节 数列的极限	3
第三节 函数的极限	7
第四节 极限存在准则与两个重要极限	9
第五节 无穷小与无穷大	13
第六节 函数的连续性	15
第七节 闭区间上连续函数的性质	17
第一章复习题	19
第二章 导数与微分	23
第一节 导数的概念	23
第二节 函数的求导法则	25
第三节 反函数的导数与复合函数的导数	27
第四节 隐函数及由参数方程确定的函数的导数 相关变化率	31
第五节 高阶导数	33
第六节 函数的微分及其应用	35
第二章复习题	37
第三章 微分中值定理与导数的应用	39
第一节 微分中值定理	39
第二节 洛必达法则	41
第三节 泰勒定理	43
第四节 函数单调性的判断 函数的极值	45
第五节 函数的最大值、最小值及其应用	47
第六节 函数的凹凸性与拐点	49
第七节 函数图形的描绘	51
第八节 曲率	53
第三章复习题	55

<b>第四章 不定积分</b> .....	59
第一节 不定积分的概念与性质 .....	59
第二节 换元积分法 .....	61
第三节 分部积分法 .....	63
第四节 有理函数的积分 .....	65
第四章复习题 .....	67
<b>第五章 定积分及其应用</b> .....	69
第一节 定积分的概念与性质 .....	69
第二节 微积分基本公式 .....	71
第三节 定积分的换元法和分部积分法 .....	73
第四节 广义积分 .....	75
第五节 定积分应用 .....	77
第五章复习题 .....	79
<b>第六章 微分方程</b> .....	83
第一节 微分方程的基本概念 .....	83
第二节 可分离变量的微分方程 .....	85
第三节 齐次方程 .....	87
第四节 一阶线性微分方程 .....	89
第五节 可降阶的高阶微分方程 .....	91
第六节 二阶常系数齐次线性微分方程 .....	93
第七节 二阶常系数非齐次线性微分方程 .....	95
第六章复习题 .....	97
<b>第七章 空间解析几何</b> .....	101
第一节 空间直角坐标系 .....	101
第二节 向量及其坐标表示法 .....	103
第三节 数量积与向量积 .....	105
第四节 平面及其方程 .....	107
第五节 空间直线及其方程 .....	109
第六节 二次曲面与空间曲线 .....	111
第七章复习题 .....	115
<b>第八章 多元函数微分法及其应用</b> .....	119
第一节 多元函数的基本概念 .....	119
第二节 偏导数 .....	121
第三节 全微分 .....	123
第四节 多元复合函数的求导法则 .....	125

第五节	隐函数的求导法则	127
第六节	多元函数微分学的几何应用	129
第七节	方向导数与梯度	131
第八节	多元函数的极值及其求法	133
第八章	复习题	135
<b>第九章</b>	<b>重积分</b>	<b>141</b>
第一节	二重积分的概念和性质	141
第二节	二重积分的计算	143
第三节	三重积分	145
第四节	重积分的应用	147
第九章	复习题	149
<b>第十章</b>	<b>曲线积分与曲面积分</b>	<b>153</b>
第一节	对弧长的曲线积分	153
第二节	对坐标的曲线积分	155
第三节	格林公式及其应用	157
第四节	对面积的曲面积分	159
第五节	对坐标的曲面积分	161
第六节	高斯公式 通量与散度	163
第七节*	斯托克斯公式 环流量与旋度	165
第十章	复习题	167
<b>第十一章</b>	<b>无穷级数</b>	<b>171</b>
第一节	常数项级数的概念与性质	171
第二节	数项级数的审敛法	173
第三节	幂级数	179
第四节	函数展开成幂级数	181
第五节	函数的幂级数展开式的应用	183
第六节	傅立叶级数	185
第十一章	复习题	187

# 第一章 函数与极限

## 第一节 函 数

### 一、填空题

1. 函数  $y = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  的定义域为 \_\_\_\_\_, 值域为 \_\_\_\_\_.

2. 设  $f(x-1) = x^2 + x + 1$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_,  $f\left(\frac{1}{x-1}\right) =$  \_\_\_\_\_.

### 二、选择题

1. 下列函数中既是奇函数, 又是单调增加函数的是( ).

(A)  $y = \sin^3 x$

(B)  $y = x^3 + 1$

(C)  $y = x^3 + x$

(D)  $y = x^3 - x$

2. 下列函数在  $(-\infty, +\infty)$  内无界的是( ).

(A)  $y = \frac{x}{1+x^2}$

(B)  $y = \arctan x$

(C)  $y = \sin x + \cos x$

(D)  $y = x \cos x$

### 三、解答题

1. 设  $f(x) = \begin{cases} 3^x, & x \geq 1, \\ \arcsin x, & -1 < x < 1, \\ 1+x, & x \leq -1, \end{cases}$  求  $f(-3)$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $f(2)$ .



2. 设  $f(x)$  的定义域是  $[0, 1]$ , 问

(1)  $f(x^2)$ ; (2)  $f(\sin x)$ ; (3)  $f(x+a)$ ,  $f(x+a) + f(x-a)$  ( $a > 0$ ) 的定义域各是什么?

3. 设  $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases} g(x) = 10^x$ , 求  $f[g(x)]$ , 并作出函数的图形.

4. 在下列各题中, 求由所给函数构成的复合函数, 并求此函数分别对应于给定自变量值  $x_1$  和  $x_2$  的函数的值.

(1)  $y = \sqrt{u}$ ,  $u = 8 + x^2$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1$ ;

(2)  $y = 6^u$ ,  $u = \sin v$ ,  $v = 2x$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{4}$ .

5. 某运输公司规定货物的吨公里运价为: 在  $a$  km 以内为  $k$  元/km; 超过  $a$  km, 超过部分为  $\frac{4}{5}k$  元/km, 求运价  $m$  与里程  $x$  间的函数关系.

## 第二节 数列的极限

### 一、填空题

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6^n} =$  \_\_\_\_\_.
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n}} =$  \_\_\_\_\_.
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) =$  \_\_\_\_\_.
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) =$  \_\_\_\_\_.

### 二、选择题

1.  $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ 为奇数,} \\ 10^{-10}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$  则下列选项中正确的有( ).

(A)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

(B)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 10^{-10}$

(C)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数,} \\ 10^{-10}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

(D)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  不存在

2. 已知下列四个数列:

①  $x_n = \frac{1}{n^2}$ ; ②  $x_n = 6$ ; ③  $x_n = n - \frac{1}{n}$ ; ④  $x_n = \frac{2n+1}{2n-1}$ .

则其中收敛的数列有( ).

(A) ①③

(B) ①②④

(C) ①②③

(D) ①④

3. 已知下列四个数列:

①  $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$ ; ②  $x_n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{1}{n+1}, \frac{n+2}{n+1}, \dots$ ;

③  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ ; ④  $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2^2}, 0, \frac{1}{2^3}, \dots, 0, \frac{1}{2^n}, \dots$

则其中发散的数列有( ).

(A) ①③④

(B) ①②③

(C) ①②

(D) ①④

4. 数列  $\{x_n\}$  有界是  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在的( ).

(A) 必要条件

(B) 充分条件

(C) 充要条件

(D) 无关条件

### 三、解答题

1. 观察下列数列的变化趋势,指出哪些数列是收敛的,哪些数列是发散的?对于收敛数列求出其极限.

$$(1) x_n = \frac{(-1)^n}{n};$$

$$(2) x_n = \frac{n+1}{n^2};$$

$$(3) x_n = 1 - (-1)^n;$$

$$(4) x_n = 1 - \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}};$$

班级 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_

$$(5) x_n = \frac{6^n + (-1)^n}{7^n};$$

$$(6) x_n = \frac{3n-1}{2n+1}.$$

2. 设  $x_1 = 0.3, x_2 = 0.33, x_3 = 0.333, \dots, x_n = 0.\underbrace{333\dots3}_n, \dots$

(1) 试用 10 的负方幂表示  $x_n$ ;

(2) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  的值.

3. 证明: 数列  $x_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$  是发散的.

### 第三节 函数的极限

#### 一、填空题

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 3} (2x-1) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- 设  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ ax+b, & x > 0, \end{cases}$  则  $f(0^+) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $f(0^-) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  
当  $b = \underline{\hspace{2cm}}$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- 设  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(3x-2)^\alpha} = \beta$ , 则  $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\beta = \underline{\hspace{2cm}}$ .

#### 二、选择题

- 设  $f(x) = \begin{cases} |x|+3, & x \neq 0, \\ 5, & x = 0, \end{cases}$  则  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  的值为( ).  
(A) 0 (B) 3 (C) 5 (D) 不存在
- 函数  $f(x)$  在  $x = x_0$  处有定义是极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在的( ).  
(A) 必要条件 (B) 充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既不是充分条件也不是必要条件
- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  是极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在的( ).  
(A) 必要条件 (B) 充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既不是充分条件也不是必要条件
- 下列函数当  $x \rightarrow \infty$  时, 极限存在的是( ).  
(A)  $y = \sin x$  (B)  $y = e^x$  (C)  $y = \frac{x+3}{x^2-9}$  (D)  $y = \arctan x$

#### 三、解答题

1. 计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+x} - x}{x^2+1}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^3 - x - 1};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x}{x-2} - \frac{8}{x^2-4} \right);$$

$$(6) \lim_{k \rightarrow 0} \frac{(x+k)^2 - x^2}{k};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{9x^2 + 2x + 1});$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right);$$

$$(9) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 2^n}{2^{n+1} + 3^n};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-3)^{30} (2x+1)^{60}}{(x+6)^{90}};$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}};$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}.$$

2. 设函数  $f(x) = \begin{cases} x, & x < 2, \\ 3, & x = 2, \\ x^2, & x > 2, \end{cases}$  试画出  $f(x)$  的图形, 并求单侧极限  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$  和

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x).$$

3. 已知  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{1 - x} = 1$ , 求常数  $a$  与  $b$  的值.

## 第四节 极限存在准则与两个重要极限

### 一、选择题

1. 下列极限等式中错误的有( ).

(A)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

(B)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x-a} = 1$

(C)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$

(D)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

2. 下列极限等式中正确的是( ).

(A)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(B)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}} = e^2$

(C)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+2} = e^2$

(D)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x+2}} = e^2$

3. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \omega x}{x}, & x > 0, \\ x^2 + 5, & x \leq 0, \end{cases}$  且极限  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  存在, 则  $\omega$  的值为( ).

(A) 0

(B) 1

(C) 3

(D) 5

### 二、解答题

1. 计算下列极限.

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{5x};$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x + \sin x};$



$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x;$$

$$(4) \lim_{k \rightarrow +\infty} 3^k \sin \frac{x}{3^k} \quad (x \neq 0);$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}};$$