# 目　录

# 引　言

本书主要介绍多变量线性系统理论中的多项式矩阵法的基本理论。

众所周知，40年代以后发展起来的古典控制理论，系统的数学描述是传递函数。系统的传递函数是系统的一种输入—输出描述，集中参数线性定常系统的传递函数为复变量S的有理分式，因此，传递函数法又称复域法。利用传递函数法研究系统，其数学基础是多项式和有理分式，并且系统的动态品质可与系统的传递函数的极点和零点直接联系起来，系统的稳定性，稳态误差和过渡过程品质等问题都可以归结为系统的极点和零点的设置问题，因此，利用传递函数法研究系统，分析计算简单，物理概念清晰，而以传递函数为基础的分析与综合系统的频率法和根轨迹法，虽然是一种试凑法，却具有直观，简便，得到的系统结构简单等特点。然而，古典控制理论中的传递函数法仅适用于单变量线性定常系统，对于多变量线性定常系统，各个输入和各个输出之间均存在一传递函数，就整个系统而言，变成了传递函数矩阵。利用古典控制理论的传递函数法研究多变量系统，不仅需要分别研究各个输入—— 输出之间的传递函数，而且需要研究各个传递函数之间的关系。显然，这是个异常复杂的问题，因而，古典控制理论不适用于多变量系统，对于时变系统和非线性系统，由于这类系统的动态特性不能利用传递函数来描述，自然，传递函数法对于时变系统和非线性系统也是不适用的。

由于空间技术发展的需要和电子计算机的飞速发展和普及，50年代末60年代初发展起来的状态空间法，不仅适用于线性，定常，单变量系统，而且适用于非线性，时变，多变量系统，利用状态空间法研究系统时，系统的数学描述是动态方程，因此状态空间法是一种时域法，状态空间法是以"状态"这个概念为基础的，系统的"状态"全面表征了系统的内部

动态特征，在此基础上引出了系统的可控性和可观测性等新概念。系统的可控性和可观测性进一步揭示了系统的内部动态特性。利用状态空间法，综合系统的方法是最优控制，即在一定约束条件下使系统的某个或某些性能指标达到最优。最优控制是一种解析法，并可通过状态反馈实现之。虽然状态空间法是一种一般的普遍方法，同样适用于非线性时变系统。但是，真正有效的还是线性定常系统，况且，实际系统中的大部分系统均可近似看成线性定常系统，或用线性定常系统的理论来处理。

在古典控制理论和状态空间法的基础上，随着多项式矩阵理论的发展，70年代以后发展起来的，研究多变量线性定常系统的多项式矩阵方法，本质上也是一种传递函数法，即复域法。但是，由系统的多项式矩阵描述导出的系统传递函数矩阵，不仅表征了系统的输入—输出特性，而且表征了系统的内部动态特性。并且系统的动态方程可以视为系统的一种特殊多项式矩阵描述，利用多项式矩阵方法研究系统的可控性和可观测性问题，变成了系统的传递函数矩阵有无公因式的问题。因而，利用多项式矩阵描述研究系统的可控性和可观测性问题，无论从概念上还是从分析计算上均比状态空间法来得简单、清晰。不仅如此，利用多项式矩阵描述还可将单变量传递函数中的极点和零点的概念，推广到多变量系统中来，用以表征系统的动态特性。系统的稳定性，稳态误差，即所谓渐近跟踪和干扰抑制，以及解耦控制等问题同样可以归结为系统的极点和零点的设置问题。这就使对系统动态特性的分析和计算大大简化了，并且物理概念清晰。而系统的综合，则不仅可以利用线性二次型性能指标下的最优控制，而且可以利用广义频率法和广义根轨迹法进行。线性二次型性能指标下最优的复域法可以直接导出系统的最佳传递函数矩阵，并且容易求出实现最佳传递函数矩阵的补偿器，广义频率法和广义根轨迹法是古典控制理论中的频率法和根轨迹法在多变量情况下的推广，它具有设计的补偿器结构简单的优点，

由于多变量情况的复杂性，广义频率法和广义根轨迹法必须借助于计算机方能实现，本书介绍多项式矩阵法的基本理论，最优控制和广义频率法与广义根轨迹法本书中没有介绍，但是，本书的内容为学习这部分内容打下了必要的基础。

本书共分五章

第一章，介绍线性系统的多项式矩阵法的数学基本——多项式矩阵理论的有关概念和性质。

第二章，介绍传递函数矩阵的矩阵分式描述，在此基础上讨论系统的传递函数矩阵及其矩阵分式描述和动态方程之间的关系。

第三章，介绍线性定常系统的多项式矩阵描述，用多项式矩阵描述分析系统的等价性，可控性，可观测性和稳定性等问题，以及多变量系统的零点、极点和可逆性等概念。

第四章，介绍组合系统（并联，串联和反馈联接）中的有关问题。

第五章，介绍线性定常系统的补偿器设计，主要介绍了任意配置系统的极点和／或零点的补偿器的设计，解耦控制以及输出跟踪和输出调节等问题。

本教材是在研究生“线性多变量系统”课多项式矩阵法部分讲稿的基础上修改，扩充写成的。在教材的编写过程中，得到了徐和生付教授的热忱指导和帮助，在此表示衷心感谢。

由于编者水平所限，教材中缺点和错误在所难免，诚恳地欢迎读者批评指正。

编者 84.9.30

# 第一章　多项式和多项式矩阵

多项式矩阵理论是利用多项式矩阵描述研究线性多变量系统的理论基础。因此，本章首先介绍多项式和多项式矩阵的基本概念和性质，重点是多项式矩阵。

## §1-1 群．环．域

在介绍多项式和多项式矩阵之前，首先让我们回顾一下线性代数中群，环，域的基本概念。

在代数中，研究的对象（即集合）有各种各样，例如，实数集，多项式集，有理分式集，$n\times n$ 实数矩阵集等等。集合不同，它们的代数运算的定义方法也不同，但其运算性质可能相同。根据代数运算性质，又可以分成不同的代数系，这里介绍的群，环，域就是这样的代数系。

定义1-1-1　若在非空集合 $G$ 上定义了一个代数运算"$\circ$"，而且它满足下列条件，则称 $G$ 为群。

(1) 封闭性，唯一性。对于 $G$ 中任意两个元 $a$ 和 $b$，$a\circ b\in G$，且唯一确定。

(2) 结合律，对于 $G$ 中任意三个元 $a$，$b$ 和 $c$，有

$$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$$

(3) 单位元，$G$ 中具有元 $e$，对于 $G$ 中任何元 $a$，有

$$e\circ a=a\circ e=a$$

(4) 逆元。对于 $G$ 中每个元 $a$，都存在一元素 $a^{-1}\in G$，使有

$$a^{-1}\circ a=a\circ a^{-1}=e$$

如果 $G$ 除满足上述条件外，还满足

(5) 交换律，对于 $G$ 中任意两个元 $a$ 和 $b$，有

$$a\circ b=b\circ a$$

则称该群为可交换群。

当运算“ $\circ$ ”为加法时，通常将 $(a\circ b)$ 记为 $(a+b)$，则称满足(1)～(4)各条的群 G 为加法群，满足(1)～(5)各条的可交换群 G 为可交换加法群。在加法群中，单位元 e 通常记为 o，又称为零元；逆元 $a^{-1}$ 通常记为 $-a$，又称为负元。当运算“ $\circ$ ”为乘法时，通常将 $a\circ b$ 记为 $a\,b$，并称满足(1)～(4)各条的群 G 为乘法群，满足(1)～(5)各条的可交换群 G 为可交换乘法群。在乘法群中，单位元 e,通常记为 1。

定义 1-1-2 若在非空集合 $\widetilde{R}$ 上定义了两个代数运算：加法和乘法，而且它满足下列各条，则称集合 $\widetilde{R}$ 为环。

(1) 封闭性，唯一性．对于 $\widetilde{R}$ 中任意两个元 a 和 b，$(a+b)\in\widetilde{R}$，$(a\ b)\in\widetilde{R}$，且均唯一确定。

(2) $\widetilde{R}$ 为可交换加法群，即对加法满足结合律，交换律，具有零元和负元。

(3) 乘法结合律，对于 $\widetilde{R}$ 中任意三个元 a，b 和 c，有

$$(ab)c = a(bc)$$

(4) 乘法对加法的分配律，对于 $\widetilde{R}$ 中任意三个元 a，b 和 c 有

$$(a+b)c = ac + bc$$

$$a(b+c) = ab + ac$$

如果 $\widetilde{R}$ 除满足上述条件外，还满足

(5) 乘法交换律．

则称环 $\widetilde{R}$ 为可交换环。

定义 1-1-3 若集合 F 为可交换环，且

(1) 乘法单位元存在。即 F 中存在一元素 e，对于 F 中任何元 a，有

$$ea = ae = a$$

(2) 乘法逆元存在。即对 F 中每个非零元 a，都存在一元素 $a^{-1}\in F$，

便有

$$a^{-1}a=aa^{-1}=e$$

则称 F 为域。

例 1　全体实数集 R 和复数集 C 分别构成域，通常称为实数域 R 和复数域 C。其零元均为"0"，单位元均为"1"。

R 或 C 中去掉"0"之外的集合，不构成域，是乘法可交换群。这是因为，它们对于加法运算其零元不存在。

例 2　以 S 为变量，系数属于某个数域 F 的多项式

$$a(s)=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots\cdots+a_1 s+a_0=\sum_{k=0}^{n}a_k s^k$$

的全体记为 F[s]，对于通常定义的多项式加法运算

$$a(s)+b(s)\triangleq\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)s^k$$

乘法运算

$$a(s)b(b)\triangleq\sum_{k=0}^{2n}c_k s^k$$

$$c_k\triangleq\sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\le n}}a_i b_j$$

其中　$a(s)=\sum_{k=0}^{n}a_k s^k$，$b(s)=\sum_{k=0}^{n}b_k s^k$ 为 F[s] 中两个任意多项式，F[s] 为可交换环，而不构成域，这是因为，对于乘法运算其逆元一般为有理分式而不是多项式，即乘法运算的逆元不定义在 F[s] 上，只有当 $a(s)=a_0$ 时，其逆元 $a_0^{-1}\in F[s]$，并称之为可逆元。F[s] 通常称为多项式环。

例 3　以 s 为变量，系数属于某个数域 F 的有理分式

$$\frac{n(s)}{d(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

的全体记为 $F(s)$。对于通常定义的有理分式加法运算

$$\frac{n_1(s)}{d_1(s)}+\frac{n_2(s)}{d_2(s)}\triangleq\frac{n_1(s)d_2(s)+n_2(s)d_1(s)}{d_1(s)d_2(s)}$$

乘法运算

$$\frac{n_1(s)}{d_1(s)}\frac{n_2(s)}{d_2(s)}\triangleq\frac{n_1(s)n_2(s)}{d_1(s)d_2(s)}$$

其中 $\frac{n_1(s)}{d_1(s)}$ 和 $\frac{n_2(s)}{d_2(s)}$ 为 $F(s)$ 中任意两个有理分式，显然，$F(s)$ 构成域，通常称为有理分式域。

若数域 $F$ 为实数域 $R$ 域复数域 $C$，则 $F[s]$ 写成 $R[s]$ 或 $C[s]$，$F(s)$ 写成 $R(s)$ 或 $C(s)$。亦即 $R[s]$ 和 $C[s]$ 分别表示以 $s$ 为变量，系数属于实数域 $R$ 和复数域 $C$ 的多项式的全体，$R(s)$ 和 $C(s)$ 分别表示以 $s$ 为变量，系数属于实数域 $R$ 和复数域 $C$ 的有理分式的全体。

例 4　$n\times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$ $i,j=1,j=1,2,\cdots n$，$\forall a_{ij}\in\tilde{R}$ 则称 $A$ 为环 $\tilde{R}$ 上的矩阵，这类矩阵的全体记为 $\tilde{R}^{n\times n}$。显然，对于通常定义的矩阵加法运算

$$A+B\triangleq[a_{ij}+b_{ij}]\quad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

乘法运算

$$AB\triangleq\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right]\quad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

其中 $A=[a_{ij}]$，$B=[b_{ij}]$ $i,j=1,2,\cdots,n$ 为 $\tilde{R}^{n\times n}$ 中的任意两个元，$\tilde{R}^{n\times n}$ 构成环，通常称为矩阵环，矩阵环中的单位元为单位阵 $I_n$，零元为零阵 $O_n$，因为矩阵乘法不满足交换律，矩阵环不是可交换环。如果 $\forall a_{ij}\in F$，则 $F^{n\times n}$ 也构成环。

## §1-2 多项式和多项式的互质

本节讨论系数在复数域 C 中的多项式环 $C[s]$。若多项式 $a(s)=a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0$，$a_i\in C$，$(i=1, 2, \cdots, n)$ 中 $a_n\neq 0$，则称 $a(s)$ 为 n 次多项式，亦即 $a(s)$ 的次数 $\deg a(s)=n$。如果 $a(s)=a$，则称 $a(s)$ 为零次多项式，亦即 $\deg a(s)=0$。如果 $a(s)=0$，就说 $a(s)$ 没有次数。若 $a_n=1$，则称 $a(s)$ 为首 1 多项式。

定理1-2-1　$a(s)$，$b(s)\in C[s]$，$a(s)\neq 0$，$b(s)\neq 0$，则有

1°　$a(s)b(s)\neq 0$

2°　$\deg[a(s)b(s)]=\deg[a(s)]+\deg[b(s)]$

3°　$a(s)$，$b(s)$ 均为首1多项式，则 $a(s)b(s)$ 亦为首 1 多项式。

4°　$\deg[a(s)b(s)]=0$ 的充分必要条件是 $\deg[a(s)]=\deg[b(s)]=0$。

5° 若 $a(s)+b(s)\neq 0$，则有

$$\deg[a(s)+b(s)]\leq\max\{\deg[a(s)],\ \deg[b(s)]\}$$

证明　直接验证即得　　　　证 毕

定理1-2-2　(Euclide 除法定理) 设 $a(s)$，$b(s)\in C[s]$，且 $b(s)\neq 0$，则存在唯一的 $g(s)$ 和 $r(s)$，使

$$a(s)=q(s)b(s)+r(s) \qquad (1\text{-}2\text{-}1a)$$

$$\deg r(s)<\deg b(s) \text{ 或 } r(s)=0 \qquad (1\text{-}2\text{-}1b)$$

证明 若 $\deg a(s)<\deg b(s)$ 或 $a(s)=0$，则 $q(s)=0$，$r(s)=a(s)$，满足定理要求。

若 $a(s)\neq 0$，且 $\deg a(s)>\deg b(s)$，设 $a(s)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_ks^k$，$b(s)=\sum\limits_{k=0}^{m}b_ks^k$，令 $q_{n-m}=a_n/b_m$，于是

$$\deg[a(s)-q_{n-m}s^{n-m}]<\deg a(s)$$

若 $\deg[a(s)-q_{n-m}s^{n-m}]\geq\deg b(s)$，则以$[a(s)-q_{n-m}s^{n-m}]$代换$a(s)$重复上面的步骤，得$q_{n-m-1}$。如此进行下去，直至$\deg[a(s)-q_{n-m}s^{n-m}-q_{n-m-1}s^{n-m-1}-\cdots]<\deg b(s)$。并且

$$a(s)=q(s)b(s)+r(s)$$

其中 $q(s)=q_{n-m}s^{n-m}+q_{n-m-1}s^{n-m-1}\cdots+q_1s+q_0$，$\deg r(s)<\deg b(s)$。

现在证明$q(s)$和$r(s)$是唯一的。设存在另一$q_1(s)$和$r_1(s)$，使有

$$a(s)=q_1(s)b(s)+r_1(s)$$

则

$$a(s)=q(s)b(s)+r(s)=q_1(s)b(s)+r_1(s)$$

$$[q(s)-q_1(s)]b(s)=r_1(s)-r(s)$$

若$q(s)\neq q_1(s)$，则 $\deg[q(s)-q_1(s)]+\deg b(s)\geq\deg b(s)>\deg[r_1(s)-r(s)]$这是不可能的。因而必有$q_1(s)=q(s)$，从而$r_1(s)=r(s)$唯一性得证。　　　　证毕

通常称(1-2-1)中$q(s)$为$b(s)$除$a(s)$的商，$r(s)$为$b(s)$除$a(s)$的余式，若$r(s)=0$，则称$b(s)$可整除$a(s)$或称$b(s)$是$a(s)$的因式，并记为$b(s)|a(s)$。

定理1-2-3 （余数定理）若$a(s)\in C[s]$，$\alpha\in C$，则$a(s)$以$(s-\alpha)$除其余式为$a(\alpha)$，即

$$a(s)=q(s)(s-\alpha)+a(\alpha) \qquad (1-2-2)$$

证明　若$(s-\alpha)|a(s)$，则存在$q(s)\in C[s]$，使$a(s)=$

$=q(s)(s-\alpha)$，且$a(\alpha)=0$，定理成立。

若$(s-\alpha)$不是$a(s)$的因式，由于$\deg(s-\alpha)=1$，则存在$q(s)\in C[s]$和$\rho\in C$，使$a(s)=q(s)(s-\alpha)+\rho$，由此可得$\rho=a(\alpha)$，定理得证。

证 毕

定义1-2-1 设$r(s)$，$a(s)$，$b(s)\in C[s]$。若$r(s)$是$a(s)$和$b(s)$的因式，则称$r(s)$为$a(s)$和$b(s)$的公因式，若$r(s)$是$a(s)$和$b(s)$的公因式，且能被$a(s)$和$b(s)$的所有公因式整除，则称$r(s)$为$a(s)$和$b(s)$的最大公因式(gcd)，若$a(s)$和$b(s)$的gcd为与$s$无关的非零常数，则称$a(s)$和$b(s)$是互质的。

显然，如果$r(s)$是$a(s)$和$b(s)$的gcd，则$cr(s)$也是其gcd，其中$c$为任何非零常数。这就是说，$a(s)$和$b(s)$的gcd不是唯一的，它们之间可以相差一常数，若我们要求gcd为首1多项式，则它是唯一的。

可以看出，$a(s)$和$a(s)$的gcd就是$a(s)$，$a(s)$和0的gcd也是$a(s)$。$a(s)$和$b\in C$是互质的。

设有$a(s)$，$b(s)\in C[s]$，$\deg b(s)<\deg a(s)$，由Euclide除法可得

$$
\begin{aligned}
a(s)&=q_1(s)b(s)+r_1(s) && \deg r_1(s)<\deg b(s)\\
b(s)&=q_2(s)r_1(s)+r_2(s) && \deg r_2(s)<\deg r_1(s)\\
r_1(s)&=q_3(s)r_2(s)+r_3(s) && \deg r_3(s)<\deg r_2(s)\\
&\ \ \vdots && \qquad\vdots\\
r_{p-2}(s)&=q_p(s)r_{p-1}(s)+r_p(s) && \deg r_p(s)<\deg r_{p-1}(s)\\
r_{p-1}(s)&=q_{p+1}(s)r_p(s)
\end{aligned}
\tag{1-2-3}
$$

由于$r_i(s)$的次数逐步下降，上述递推运算终将停止，将(1-2-3)式从后向前迭代，不难看出，$r_p(s)$是$a(s)$和$b(s)$的公因式，且对于

$r_i(s)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots p)$ 均存在$x_i(s)$，$y_i(s)\in C[s]$，使有

$$r_i(s)=x_i(s)a(s)+y_i(s)b(s) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,p)$$

这就表明，$a(s)$和$b(s)$的公因式$r_p(s)$满足下式

$$r_p(s)=x_p(s)a(s)+y_p(s)b(s) \qquad (1-2-4)$$

可以断言，(1-2-4)式中$x_p(s)$和$y_p(s)$是互质的，否则，将与$r_p(s)$是$a(s)$和$b(s)$的公因式的前提相矛盾，进而还可以断言$r_p(s)$是$a(s)$和$b(s)$的gcd。的确，若$c(s)$是$a(s)$的任一公因式，即有

$$a(s)=\overline{a}(s)c(s) \quad , \quad b(s)=\overline{b}(s)c(s)$$

则有

$$r_p(s)=[x_p(s)\overline{a}(s)+y_p(s)\overline{b}(s)]c(s)$$

亦即，$r_p(s)$能被$a(s)$和$b(s)$的任何公因式整除，$r_p(s)$是$a(s)$和$b(s)$的gcd。

这里，(1-2-3)式给出了求取$a(s)$和$b(s)$的gcd的一种递推算法，(1-2-4)式则给出了$a(s)$和$b(s)$的gcd和$a(s)$与$b(s)$的关系式。

例1　设有$a(s)=s^4+2s^3+2s^2+2s-4$，$b(s)=s^2+s-2$，求其gcd。

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad s^2+s+3 \\
\cline{2-2}
s^2+s-2 & s^4+2s^3+2s^2+2s-4 \\
 & \underline{s^4+s^3-2s^2\qquad\qquad} \\
 & \qquad s^3+4s^2+2s-4 \\
 & \qquad \underline{s^3+s^2-2s\qquad} \\
 & \qquad\qquad 3s^2+4s-4 \\
 & \qquad\qquad \underline{3s^2+3s-6} \\
 & \qquad\qquad\qquad s+2
\end{array}
$$

即有

$$a(s)=(s^2+s+3)b(s)+(s+2),\quad r_1(s)=s+2$$

$$\begin{array}{r|l}
 & s-1 \\ \hline
s+2 & s^2+s-2 \\
 & \underline{s^2+2s} \\
 & -s-2 \\
 & \underline{-s-2} \\
 & 0
\end{array}$$

亦即

$$b(s)=(s-1)r_1(s)$$

故 $a(s)$ 和 $b(s)$ 的最大公因式（gcd）为（$s+2$）

现将（1-2-4）式给出的gcd的关系式，以定理的形式表述如下。

定理1-2-4 设 $a(s)$，$b(s)\in C[s]$，$r(s)$ 为 $a(s)$ 和 $b(s)$ 的gcd，则存在互质的 $x(s)$，$y(s)\in C[s]$，使有

$$x(s)a(s)+y(s)b(s)=r(s) \tag{1-2-5}$$

应注意的是，其逆定理不成立，（1-2-3）式中对于 $r_1(s)$ 有

$$1\cdot a(s)-q_1(s)b(s)=r_1(s)$$

1和 $[-q_1(s)]$ 是互质的，但是 $r_1(s)$ 不是 $a(s)$ 和 $b(s)$ 的gcd，

定理1-2-5 设 $a(s)$，$b(s)\in C[s]$，且 $a(s)\neq 0$，则下列各条是等价的。

1° $a(s)$ 和 $b(s)$ 互质

2° $$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} a(\lambda) \\ b(\lambda) \end{bmatrix}=1 \quad \forall\lambda\in C \tag{1-2-6}$$

3° 存在唯一的两个多项式 $x(s)$ 和 $y(s)$，使

$$x(s)a(s)+y(s)b(s)=1 \tag{1-2-7}$$

且 $x(s)$ 和 $y(s)$ 互质

4° 不存在 $g(s)$，$f(s)\in c[s]$，且 $\deg f(s)<\deg a(s)$ 使

$$\frac{b(s)}{a(s)}=\frac{g(s)}{f(s)}$$

或

$$-g(s)a(s)+f(s)b(s)=[-g(s)\ f(s)]\begin{bmatrix}a(s)\\ b(s)\end{bmatrix}=0$$

(1-2-8)

证明　若 $a(s)$ 和 $b(s)$ 互质，则复数域 $c$ 中不存在使 $a(s)$ 和 $b(s)$ 同时为零的 $s$ 值，亦即对于复数域 $c$ 中所有 $s$，$\operatorname{rank}[a(s)\ b(s)]'=1$。若 $a(s)$ 和 $b(s)$ 非互质，则在复数域 $c$ 中至少存在一个 $s$，使 $a(s)$ 和 $b(s)$ 同时等于零。亦即对于此 $s$ 值，$\operatorname{rank}[a(s)\ b(s)]'=0$。这就证明了 1° 和 2° 等价。

设 $a(s)$ 和 $b(s)$ 不是互质的，$c(s)$ 为它们的一个公因式，则有 $a(s)=\bar{a}(s)c(s)$，$b(s)=\bar{b}(s)c(s)$，因而

$$\frac{b(s)}{a(s)}=\frac{\bar{b}(s)}{\bar{a}(s)}$$

且 $\deg\bar{a}(s)<\deg a(s)$。反之亦然，这就证明了 1° 和 4° 等价，

现在证明 $a(s)$ 和 $b(s)$ 互质的充分必要条件是 3°。

必要性由定理1-2-4直接可得。

充分性，用反证法，设存在一互质的 $x(s)$ 和 $y(s)$，使 $x(s)a(s)+y(s)b(s)=1$，即有 $\deg[x(s)a(s)+y(s)b(s)]=0$，但 $a(s)$ 和 $b(s)$ 非互质，则有 $a(s)=\bar{a}(s)c(s)$，$b(s)=\bar{b}(s)c(s)$，其中 $\deg c(s)\geq 1$ 于是

$$x(s)a(s)+y(s)b(s)=[x(s)\bar{a}(s)+y(s)\bar{b}(s)]c(s)$$

即有

$$\deg[x(s)a(s)+y(s)b(s)]$$

$$=\deg[x(s)\overline{a}(s)+y(s)\overline{b}(s)]+\deg c(s)\geq 1$$

故与假设矛盾，充分性得证。

证毕

## §1-3 多项式矩阵的一般概念和性质

$q\times p$ 矩阵 $A(s)=[a_{ij}(s)]$，$a_{ij}(s)\in F[s]$，则称 $A(s)$ 为多项式矩阵，其全体记为 $F[s]^{q\times p}$，本节仅讨论数域 $F$ 为复数域 $c$ 的情况，即 $a_{ij}(s)\in c[s]$，则 $q\times p$ 多项式矩阵 $A(s)$ 的全体记为 $c[s]^{q\times p}$

若将 $q\times p$ 多项式矩阵 $A(s)$ 的元 $a_{ij}(s)\in c[s]$ 写成

$$a_{ij}(s)\triangleq a_{ij}^{n}s^{n}+a_{ij}^{n-1}s^{n-1}+\cdots\cdots+a_{ij}^{0}$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots q;\quad j=1,2,\ \cdots,\ p \qquad (1-3-1)$$

其中 $a_{ij}^{k}\in c$ $(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots n)$，$n=\max\{\deg[a_{ij}(s)]$ $i=1,\ 2,\ \cdots q,\ j=1,\ 2,\ \cdots p\}$，再引入

$$A_{k}\triangleq[a_{ij}^{k}]\in c^{q\times p}\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n \qquad (1-3-2)$$

则 $A(s)$ 亦可写成

$$A(s)=A_{n}s^{n}+A_{n-1}s^{n-1}+\cdots\cdots+A_{0} \qquad (1-3-3)$$

如果 (1-3-3) 式中，$A_{n}\neq 0$ 则称 $A(s)$ 的次数为 $n$，并记为 $\deg A(s)=n$，若 $A(s)=0$，则次数不定。

多项式矩阵的元是多项式，多项式集合 $c[s]$ 是环而不是域，当多项式的次数等于高于 1 时其乘法逆元是有理分式而不是多项式，如果将集合扩展到全部有理分式 $c(s)$，$c(s)$ 构成域，这样一来，元素在实数域 $R$ 或复数域 $c$ 中的实数矩阵和复数矩阵中，矩阵的秩，非奇异性和构成矩阵的各行向量或列向量的线性无关性等概念，同样适用于多项式矩阵，但

是，这是对有理分式域而言，而不是对复数域而言。

例如，2×2 多项式矩阵

$$A_1(s)=\begin{bmatrix} s+2 & s-1 \\ s-3 & s+1 \end{bmatrix} \tag{1-3-4}$$

其行列式 $\det A_1(s)=(s+2)(s+1)-(s-1)(s-3)=7s-1$ 不是有理分式域中的零元，因而 $A_1(s)$ 是非奇异的，其秩为 2，即满秩。

$$A_2(s)=\begin{bmatrix} s+2 & s^2+3s+2 \\ s-1 & s^2-1 \end{bmatrix} \triangleq [\underline{a}_1(s) \quad \underline{a}_2(s)] \tag{1-3-5}$$

其行列式 $\det A_2(s)=(s+2)(s^2-1)-(s^2+3s+2)(s-1)=0$，它是有理分式域中的零元，因而 $A_2(s)$ 是奇异的，但是 $A_2(s)$ 的 1×1 阶子矩阵均不为零，故 $\operatorname{rank} A_2(s)=1$。这就表明 $A_2(s)$ 的列向量 $\underline{a}_1(s)$ 和 $\underline{a}_2(s)$ 在有理分式域中是线性相关的，的确，存在有理分式 $\overline{\alpha_1}(s)=-1$ 和 $\overline{\alpha_2}(s)=\dfrac{1}{s+1}$，使

$$\overline{\alpha_1}(s)\underline{a}_1(s)+\overline{\alpha_2}(s)\underline{a}_2(s)=0$$

令 $\alpha(s)$ 是 $\overline{\alpha_1}(s)$ 和 $\overline{\alpha_2}(s)$ 的最小公分母，这里 $\alpha(s)=s+1$。又令 $\alpha_1(s)=\alpha(s)\overline{\alpha_1}(s)$，$\alpha_2(s)=\alpha(s)\overline{\alpha_2}(s)$，这里 $\alpha_1(s)=-(s+1)$，$\alpha_2(s)=1$，则

$$\alpha_1(s)\underline{a}_1(s)+\alpha_2(s)\underline{a}_2(s)=0 \tag{1-3-6}$$

其中 $\alpha_1(s)$ 和 $\alpha_2(s)$ 是多项式。上述分析说明，若多项式列向量 $\underline{a}_1(s)$ 和 $\underline{a}_2(s)$ 在有理分式域中线性相关，也必存在多项式 $\alpha_1(s)$ 和 $\alpha_2(s)$ 使（1-3-6）式成立。

为了清晰起见，现将多项式矩阵的秩，非奇异性和多项式向量的线性相关性，用定义的形式叙述如下。